ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 3, 1985 Математика

УДК 517.53

К. Г. КАЗАРЯН, В. М. МАРТИРОСЯН

РЕШЕНИЕ КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ И РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НЕКОТОРЫМ БИОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ

§ 0. Введение

0.1 (а). Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из единичного круга, среди которых могут быть числа произвольной конечной или бесконечной кратности. Следуя М. М. Джрбашяну [1, 2], обозначим через $s_k \geqslant 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$.

В работе [2] М. М. Джрбашяном была поставлена общая задача свободной интерполяции с кратными узлами в классах H_p $(0 < p < +\infty)$ Харди—Рисса, которую можно сформулировать следующим образом.

Выявить условия на последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и на пространство последовательностей J, при которых имеет место совпадение

$$\{(f^{(s_k-1)}(\alpha_k))_{k=1}^\infty : f \in H_p\} = J, \tag{0.1}$$

и построить аппарат для эффективного представления решений интерполяционной задачи

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k \ (k=1, 2, \cdots); \ \{\gamma_k\}_1^\infty \in J. \tag{0.2}$$

В том специальном случае, когда $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — суть различные друг от друга точки круга $|z| < 1$ и, таким образом, $s_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, эта задача сводится к интерполяционной задаче

$$f(\alpha_k) = \gamma_k \ (k=1, 2, \cdots) \tag{0.2'}$$

с простыми узлами $\{\alpha_k\}_1^\infty$.

При рассмотрении этих задач оказалось естественным ограничиться идеальными банаховыми пространствами J последовательностей* и, в частности, весовыми l_p-пространствами последовательностей.

Критерии *существования решения* задачи (0.2′) в класса H^∞ ограниченных в круге $|z| < 1$ голоморфных функций, либо в классах H_p $(1 < p < +\infty)$ были установлены в ряде работ (см. [3—5], а также [6, 7], где приведены подробные литературные указания по этому поводу). В ра-

* Пусть J — банахово пространство последовательностей комплексных чисел, в котором плотны финитные последовательности. J называется идеальным, если из условий $\{a_k\}_1^\infty \in J$ и $|b_k| \leqslant |a_k|$ $(k \geqslant 1)$ следует, что $\{b_k\}_1^\infty \in J$.

боте В. П. Кабайла [8] было дано эффективное решение задачи (0.2′) в классах H_p $(0 < p \leqslant 1)$.

В случае, когда различные точки последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$ появляются двукратно либо с одинаковой кратностью, в классе H_2 задача была решена в работах [9—11], но вновь лишь в постановке существования ее решений. Отметим однако, что эти работы, посвященные решению задачи (0.1), существенно опираются на методы теории гильбертовых пространств.

б) В работе М. М. Джрбашяна [2] был предложен новый, по существу чисто аналитический, метод для полного решения сформулированной выше общей интерполяционной задачи (0.1)—(0.2) в классе H_2, метод, позволяющий дать также аналитический аппарат для представления решений этой задачи. Он основан на построении специальных систем аналитических в круге $|z| < 1$ систем функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, ассоциированных с последовательностью $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и биортогональных на окружности $|z|=1$.

Применением указанного метода биортогонализации М. М. Джрбашяна (по поводу этого метода см. [12], где приведены подробные литературные указания) было дано полное решение общей интерполяционной задачи (0.1)—(0.2) в классах H_p $(0 < p \leqslant +\infty)$ в круге $|z| < 1$, а также в классах H_p $(1 < p < +\infty)$ в полуплоскости и в угловых областях комплексной плоскости (см. [2, 12—21]). При этом была установлена непосредственная связь этой задачи с вопросами описания замыканий и разложений в ряды по вполне определенным системам рациональных функций.

0.2. В работах М. М. Джрбашяна [22, 23], посвященных систематическому изложению и исследованию вопросов представления и замкнутости ряда важных систем аналитических функций, была введена также система функций, определяемая следующим образом.

Пусть $\{\sigma_j\}_0^\infty$ $(|\mathrm{Im}\,\sigma_j| < \pi/2)$ — произвольная последовательность комплексных чисел и $p_k \geqslant 1$ $(k \geqslant 0)$ — кратность появления числа σ_k на отрезке $\{\sigma_j\}_0^k$.

Рассмотрим полиномы

$$\varkappa_0(t) \equiv 1;\ \varkappa_j(t) = \left(\frac{1}{2} + it\right)\left(\frac{3}{2} + it\right)\cdots\left(\frac{2j-1}{2} + it\right),\ j \geqslant 1, \quad (0.3)$$

и ассоциированную с последовательностью $\{\sigma_j\}_0^\infty$ систему функций

$$\{\varkappa_{p_j-1}(t)\, e^{-i\sigma_j t}\}_0^\infty. \quad (0.4)$$

Пусть, далее, $\{\rho_j(t)\}_0^\infty$ — ортогонализация этой системы на всей оси $(-\infty, +\infty)$ с весом $w(t) = \mathrm{ch}^{-1}\,\pi t$.

В процитированных работах [22, 23] были установлены интегральные представления для функций системы $\{\rho_j(t)\,\mathrm{ch}^{-\frac{1}{2}}\pi t\}_0^\infty$ и критерий ее замкнутости в метрике $L_2(-\infty, +\infty)$. Там же были установлены важные связи функций этой системы с полиномами Поллачека.

Отметим, что когда числа последовательности $\{\sigma_j\}_0^\infty$ попарно различны, и тогда $p_k = 1$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, система (0.4) переходит в систему $\{e^{-i\sigma_j t}\}_0^\infty$, критерий замкнутости которой на оси $(-\infty, +\infty)$ в метрике L_2 с весом $e^{-\pi|t|}$ был установлен Н. Винером и Р. Пэли [24].

Отметим также, что в общем случае линейные комбинации функций систем (0.4) и $\{e^{-i\sigma_j t}\, t^{p_j-1}\}_0^\infty$ совпадают. Следовательно, совпадают критерии замкнутости системы (0.4) в пространстве L_2 с весом $\mathrm{ch}^{-1}\,\pi t$ и системы $\{e^{-i\tau_j t}\, t^{p_j-1}\}_0^\infty$ в пространстве L_2 с весом $e^{-\pi|t|}$ на оси $(-\infty, +\infty)$.

0.3 (а). Данная работа посвящена решению интерполяционной задачи (0.1) — (0.2) в классах H_p $(1 < p < +\infty)$ в полосе $|Im z| < h$ $(0 < h < +\infty)$, а также исследованию связанных с этой задачей вопросов замыкания, минимальности и базисности определенных систем рациональных и экспоненциальных функций.

Напомним, что система $\{x_k\}_1^\infty$ элементов банахова пространства X называется минимальной, если ни один элемент этой системы нельзя приблизить в метрике X линейными комбинациями остальных элементов. При этом, как легко следует из теоремы Хана-Банаха, система $\{x_k\}_1^\infty$ минимальна в X тогда и только тогда, когда она имеет биортогональное дополнение, т. е. существует последовательность $\{x_k^*\}_1^\infty$ ограниченных линейных функционалов такая, что

$$x_k^*(x_m) = \delta_{k,m} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad (k, m = 1, 2, \cdots). \tag{0.5}$$

Система $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом в своем замыкании (т. е. в замыкании в метрике X линейной оболочки системы $\{x_k\}_1^\infty$, если каждый элемент x из этого замыкания единственным образом представим в виде суммы сходящегося по метрике X ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\, x_k, \tag{0.6}$$

где $c_k(x)$ $(k \geqslant 1)$ — комплексные коэффициенты.

б) Исследование ряда свойств пространств H_p в полосе $S_h = \{z;\ |\mathrm{Im}\, z| < h\}$ (их мы обозначаем $H_p[S_h]$) и пространств типа H_p в совокупности полуплоскостей $S_h^* = \{z;\ |\mathrm{Im}\, z| > h\}$ (которые мы обозначаем $H_p[S_h^*]$) проведено в § 1 данной работы.

В § 2 рассматриваются системы рациональных функций вида

$$r_k(z) = (s_k - 1)!\,(z - \lambda_k)^{-s_k} \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{0.7}$$

где $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset S_h$, а $s_k \geqslant 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$.

Устанавливаются критерии полноты и минимальности системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в $H_p[S_h^*]$ $(1 < p < +\infty)$. В случае неполноты такой системы дается полное внутреннее описание ее замыкания, а в случае минимальности применением отмеченного выше метода биортогонализации М. М. Джрбашяна строится биортогональная с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на ∂S_h^* система функций $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$.

В § 3 устанавливаются критерии базисности в их замыканиях систем функций $\{r_k(z)\}_1^\infty \subset H_p[S_h^*]$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty \subset H_p[S_h]$ $(1 < p < +\infty)$ и дается полное решение интерполяционной задачи (0.1)—(0.2) в классах $H_p[S_h]$ $(1 < p < +\infty)$.

В § 4 рассмотрены системы функций вида $\{e^{-i\lambda_k t} t^{s_k-1}\}_1^\infty$ в пространстве L_2 с весом $e^{-2h|t|}$ на оси $(-\infty, +\infty)$. Построено унитарное отображение этого пространства на $H_2[S_h^*]$, переводящее указанную систему в систему $\{r_k(z)\}_1^\infty$. С использованием результатов предыдущих параграфов приводится новое доказательство теоремы Винера—Пэли и М. М. Джрбашяна, дающей критерий замкнутости системы $\{e^{-i\lambda_k t} t^{s_k-1}\}_1^\infty$, и устанавливаются критерии ее минимальности и базисности в своем замыкании. В случае незамкнутости такой системы дается полное внутреннее описание ее замыкания, в случае ее минимальности построена биортогональная с ней на оси $(-\infty, +\infty)$ система функций $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$.

Отметим, что теоремы 1.1—1.4 и леммы 1—3 установлены авторами совместно. Лемма 4, теоремы 2.3—2.8 и результаты § 3 и § 4 принадлежат К. Г. Казаряну.

Авторы приносят глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за проявленное к работе внимание.

§ 1. Пространства $H_p[S_h]$ и $H_p[S_h^*]$

1.1. Пусть $0 < h < +\infty$. Обозначим через

$$S_h = \{z\colon |\mathrm{Im}\, z| < h\},\quad S_h^* = \{z\colon |\mathrm{Im}\, z| > h\} \tag{1.1}$$

соответственно, полосу S_h ширины $2h$ и дополнительное к ней множество S_h^*, состоящее из объединения полуплоскостей $\mathrm{Im}\, z > h$ и $\mathrm{Im}\, z < -h$. Их общую границу обозначим через ∂S_h (через ∂S_h^*), полагая, что направление на ∂S_h (на ∂S_h^*) совпадает с направлением положительного обхода S_h (обхода S_h^*).

Обозначим через $H_p[S_h]$ $(0 < p < +\infty)$ класс функций $F(z)$, аналитических в области S_h и удовлетворяющих условию

$$\|F;\, S_h\|_p = \sup_{|y|<h} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{1.2}$$

Далее, через $H_p[S_h^*]$ $(0 < p < +\infty)$ обозначим класс функций $F(z)$, аналитических в S_h^* и удовлетворяющих условию

$$\|F;\, S_h^*\|_p = \left\{ \sup_{y<-h} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^p\, dx + \sup_{y>h} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{1.3}$$

Наконец, обозначим через $L_p(\partial S_h)$ $(0 < p < +\infty)$ пространство измеримых на ∂S_h функций $F(\zeta)$ с нормой

$$\|F, \partial S_h^*\|_p = \left\{ \int\limits_{\partial S_h} |F(\xi)|^p \, |d\xi| \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{1.4}$$

(б) Пусть H_p $(0 < p < +\infty)$ — известный (см., например, [6]) класс функций $f(z)$, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{0<x<+\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dy \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

а H_p^* — это класс функций $f(z)$, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и таких, что

$$\|f\|_{H_p^*} = \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_{0}^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \, dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Следующая теорема при $p = 2$ была установлена в совместной работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [25], а при $p \in (0, +\infty)$ в одну сторону — в работе С. А. Акопяна [26], а в другую — в работе А. М. Седлецкого [27].

Теорема А. *Для любого $p \in (0, +\infty)$ справедливы утверждения:*

1°. $H_p = H_p^*$.

2°. $2^{-1/p} \|f\|_{H_p} \leq \|f\|_{H_p^*} \leq \|f\|_{H_p}$.

Стандартными методами (см., напр., [7], гл. VII) устанавливаются следующие две теоремы.

Теорема 1.1. *Для любой функции $F(z) \in H_p[S_h^*]$ $(1 < p < +\infty)$ справедливы следующие утверждения:*

1°. *Почти всюду на ∂S_h^* функция $F(z)$ имеет угловые граничные значения $F(\zeta) \in L_p(\partial S_h^*)$, причем*

$$\lim_{y \to \pm h} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy) - F(x \pm ih)|^p \, dx = 0;$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h^*} \frac{F(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \begin{cases} F(z), & z \in S_h^*, \\ 0, & z \in S_h. \end{cases}$$

Теорема 1.1*. *Для любой функции $F(z) \in H_p[S_h]$ $(1 < p < +\infty)$ справедливы следующие утверждения:*

1°. *Почти всюду на ∂S_h функция $F(z)$ имеет угловые граничные значения $F(\zeta) \in L_p(\partial S_h)$, причем*

$$\lim_{y\to\pm h}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x+iy)-F(x\pm ih)|^p\,dx=0;$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h}\frac{F(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\begin{cases}F(z), & z\in S_h,\\ 0 & z\in S_h^*;\end{cases}$$

3°. *Для любого* $h_0\,(0<h_0<h)$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\{\max_{|y|<h_0}|F(x+iy)|\}=0.$$

(в) Известно, что $H_p[S_h]$ — банахово пространство при $1\leqslant p<+\infty$ и пространсто Фреше при $0<p<1$ [27].

Убедимся в справедливости неравенств

$$2^{-1/p}\|F;\ \partial S_h\|_p\leqslant\|F;\ S_h\|_p\leqslant\|F;\ \partial S_h\|_p \tag{1.5}$$

для произвольного $F(z)\in H_p[S_h]$ $(0<p<+\infty)$, из которых следует, что нормы (1.2) и (1.4) порождают в $H_p[S_h]$ эквивалентные топологии.

Пусть $F(z)\in H_p[S_h]$. $w=e^{\pi z/2h}$ взаимно-однозначно и конформно отображает полосу S_h на правую полуплоскость.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(w)=\left(\frac{2h}{\pi}\right)^{1/p}F\left(\frac{2h}{\pi}\log w\right)w^{-1/p}=\left(\frac{2h}{\pi}\right)^{1/p}F(z)\,e^{-\pi z/2hp}.$$

Тогда $\Phi(w)\in H_p^*$ и

$$\|\Phi\|_{H_p^*}=\|F;\ S_h\|_p. \tag{1.6}$$

С другой стороны, легко проверить, что $\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(iy)|^p\,dy=\|F;\ \partial S_h\|_p^p$ и, принимая во внимание, что $\|\Phi\|_{H_p}^p=\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(iy)|^p\,dy$, получаем

$$\|\Phi\|_{H_p}=\|F;\ \partial S_h\|_p. \tag{1.7}$$

Из (1.6), (1.7) и теоремы А (2°) получаем неравенства (1.5).

Легко показывается, что $H_p[S_h^*]$ $(1\leqslant p<+\infty)$ с нормой (1.3) тоже является банаховым пространством. Из этого следует, что $H_p[S_h^*]$ можно рассматривать как замкнутое подпространство банахова пространства $L_p(\partial S_h^*)$.

1.2. Из известной теоремы о проектировании ([28], стр. 176—183) вытекает

Теорема 1. 2. *Если* $F(\xi)\in L_p(\partial S_h)$ $(1<p<+\infty)$, *то интеграл типа Коши*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}\frac{F(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \begin{cases} F^{(+)}(z), & z \in S_h, \\ F^{(-)}(z), & z \in S_h^{*}, \end{cases}$$

обладает следующими свойствами:

1°. $F^{(+)}(z) \in H_p[S_h]$, $F^{(-)}(z) \in H_p[S_h^{*}]$;

2°. *Имеют место неравенства*

$$\|F^{(+)};\ \partial S_h\|_p \leqslant B_p\|F;\ \partial S_h\|_p,\quad \|F^{(-)};\ \partial S_h\|_p \leqslant B_p\|F;\ \partial S_h\|_p,$$

где $B_p \in (0, +\infty)$ *не зависит от* $F(\xi)$;

3°. *Почти всюду на* ∂S_h $F(\xi) = F^{(+)}(\xi) - F^{(-)}(\xi)$.

Следствие. *Пусть* $F(\xi) \in L_p(\partial S_h)$ $(1 < p < +\infty)$. *Для того, чтобы* $F(\xi)$ *была граничной функцией некоторой функции из класса* $H_p[S_h]$, *необходимо и достаточно условие*

$$\int\limits_{\partial S_h}\frac{F(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = 0,\quad z \in S_h^{*}.$$

1.3. Мы хотим установить вид линейного функционала в пространстве $H^p[S_h^{*}]$ удобный для наших дальнейших целей. Сначала докажем две леммы.

Лемма 1. *Если* $F(z) \in H_p[S_h^{*}]$ *и* $G(z) \in H_q[S_h^{*}]$ $\left(1 < p < +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, *то*

$$\int\limits_{\partial S_h} F(\xi)\,G(\xi)\,d\xi = 0. \tag{1.8}$$

Доказательство. Поскольку $F(iz + ih) \in H_p^{*}, G(iz+ih) \in H_q^{*}$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x + ih)\,G(x + ih)\,dx = 0$ (см. [12], лемму 2). Аналогично $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x - ih)\,G(x - ih)\,dx = 0$. Из этих двух равенств и следует (1.8).

Лемма 2. *Если* $F(z) \in H_p[S_h]$ *и* $G(z) \in H_q[S_h]$ $\left(1 < p < +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, *то*

$$\int\limits_{\partial S_h} F(\xi)\,G(\xi)\,d\xi = 0. \tag{1.9}$$

Доказательство. Для фиксированных значений σ и l $(0 < \sigma < +\infty,\ 0 < l < h)$ обозначим через $C(\sigma; l)$ границу области $\{z: |\mathrm{Re}\,z| < \sigma, |\mathrm{Im}\,z| < l\}$. По теореме Коши

$$\int\limits_{C(\sigma;\,l)} F(z)\,G(z)\,dz = 0. \tag{1.10}$$

С другой стороны, в силу теоремы 1.1* (3°) имеем

$$\max_{|y|<l} |F(\pm\sigma+iy)|=o(1), \max_{|y|<l} |G(\pm\sigma+iy)|=o(1), \sigma\to+\infty,$$

откуда

$$\int_{-l}^{l} F(\pm\sigma+iy)\, G(\pm\sigma+iy)\, dy=o(1), \quad \sigma\to+\infty.$$

Следовательно, устремив в (1.10) $\sigma\to+\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x+il)\, G(x+il)\, dx-\int_{-\infty}^{+\infty} F(x-il)\, G(x-il)\, dx=0, \tag{1.11}$$

и поскольку в силу теоремы 1.1* (1°), при $l\to h$ будем иметь

$$F(x\pm ih)=\underset{l\to h}{\overset{(p)}{\text{l.i.m.}}}\, F(x\pm il),\quad G(x\pm ih)=\underset{l\to h}{\overset{(q)}{\text{l.i.m.}}}\, G(x\pm il),$$

то устремив в (1.11) $l\to h$, получим (1.9).

Теорема 1.3. *Пусть Φ — ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве $H_p[\overset{*}{S_h}]$ ($1<p<+\infty$). Тогда существует единственная функция $G(z)\in H_q[S_h]\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ такая, что*

$$\Phi[F]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \overset{*}{S_h}} F(\xi)\, G(\xi)\, d\xi, \quad F\in H_p[\overset{*}{S_h}]. \tag{1.12}$$

При этом

$$\|\Phi\|_* < \frac{1}{2\pi}\|G;\partial S_h\|_q \leqslant B_p\|\Phi\|_*, \tag{1.13}$$

где $\|\Phi\|_*$—это норма функционала Φ на пространстве $H_p[S_h]$, а $B_p\in(0,+\infty)$ не зависит от Φ.

Обратно, если $G(z)\in H_q[S_h]$, то формулой (1.12) определяется ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве $H_p[\overset{*}{S_h}]$.

Эта теорема доказывается по той же схеме, что и аналогичная теорема 4 из [12].

1.4. В заключение этого параграфа опишем множество нулей функций класса $H_p[S_h]$. При помощи отображения $w=e^{\pi z/2h}$ полосы S_h на полуплоскость $\operatorname{Re} w>0$, мы можем рассматривать произведение Бляшке для области S_h

$$B_h(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\pi z/2h}-e^{\pi\lambda_k/2h}}{e^{\pi z/2h}+e^{\pi\bar\lambda_k/2h}}\cdot\frac{|1-e^{\pi\lambda_k/h}|}{1-e^{\pi\lambda_k/h}}, \tag{1.14}$$

где $\{\lambda_k\}_1^{\infty}\subset S_h$. Тогда в силу известных свойств произведения Бляшке для полуплоскости $\operatorname{Re} w>0$ (см., напр., [16], гл. 5) справедлива

Лемма А. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Re}\lambda_k\right)} \tag{1.15}$$

сходится, то произведение Бляшке для S_h сходится абсолютно и равномерно внутри S_h и определяет аналитическую функцию $E_h(z)$, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Более того

$$|B_h(z)| \leqslant 1 \ (z \in S_h); \ B^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots);$$

$$|B_h(\zeta)| = 1 \text{ почти всюду на } \partial S_h.$$

Если же ряд (1.15) *расходится, то частичные произведения $B_{h,n}(z)$ произведения (1.14) при $n \to +\infty$ равномерно сходятся к нулю внутри* области S_h.

Следующая теорема доказывается по схеме доказательства теоремы 5 из [12].

Теорема 1.4. *Пусть $1 < p < +\infty$. Справедливы утверждения:*

1°. *Если ряд* (1.15) *сходится, то существует функция $G(z) \in H_p[S_h]$, обращающаяся в нуль лишь в точках последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$, причем*

$$G^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots); \tag{1.16}$$

2°. *Если ряд* (1.15) *расходится и функция $G(z) \in H_p[S_h]$ удовлетворяет условиям* (1.16), *то* $G(z) \equiv 0$.

§ 2. Полнота и замыкание биортогональных систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$

2.1. (а). Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из области S_h, среди которых могут быть числа произвольной конечной или даже бесконечной кратности. Для любого целого $k \geqslant 1$ обозначим через s_k и p_k кратности появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$, и во всей последовательности $\{\lambda_j\}_1^\infty$, соответственно. Очевидно, что $1 \leqslant s_k \leqslant p_n \leqslant +\infty$ $(k=1, 2, \cdots)$. Отметим также, что если ряд (1.15) сходится, то число p_k будет конечным при всех $k \geqslant 1$. Условимся также ниже полагать

$$1 < p < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ (\text{тогда } 1 < q < +\infty). \tag{2.1}$$

(б) С последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем систему простейших рациональных дробей $\{r_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$r_k(z) = \frac{(s_k-1)!}{(z-\lambda_k)^{s_k}} \ (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.2}$$

Так как $r_k(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{S_h}$, а при $|z| \to +\infty$ имеет порядок $O(|z|^{-1})$, то $r_k(z) \in H_p[S_h]$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

Теорема 2.1. *Для полноты системы* $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ *в пространстве* $H_p[S_h^*]$ *необходимо и достаточно, чтобы ряд* (1.15) *расходился.*

Эта теорема доказывается тем же способом, что и теорема 6 из [12].

Аналогично, если ряд (1.15) расходится, то система $\{r_k(z)\}_{k=2}^{\infty}$ полна в пространстве $H_p[S_h^*]$. Таким образом, если ряд (1.15) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ не минимальна в $H_p[S_h^*]$ и, следовательно, не имеет биортогонального дополнения.

(в) Если система $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ не полна в $H_p[S_h^*]$ (т. е. ряд (1.15) сходится), то она порождает в $H_p[S_h^*]$ некоторое замкнутое собственное подпространство. Мы хотим дать полное внутреннее описание этого подпространства.

При условии сходимости ряда (1.15) обозначим через $H_p\{\lambda_k; S_h^*\}$ множество тех функций $F(z)\in H_p[S_h^*]$, для которых $F(\xi)B_h(\xi)$, $\xi\in\partial S_h$, являются угловыми значениями некоторой функции из класса $H_p[S_h]$.

В силу следствия из теоремы 1.2 справедлива

Лемма 3. *Если ряд* (1.15) *сходится, то класс* $H_p\{\lambda_k; S_h^*\}$ *совпадает с множеством тех* $F(z)\in H_p[S_h^*]$, *для которых*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}\frac{F(\xi)B_h(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=0,\quad z\in S_h^*. \tag{2.3}$$

Из этой леммы легко следует, что $H_p\{\lambda_k; S_h^*\}$ является замкнутым подпространством пространства $H_p[S_h^*]$.

Теорема 2.2. *Если ряд* (1.15) *сходится, то замыкание в метрике* $H_p[S_h^*]$ *линейной оболочки системы* $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ *совпадает с классом* $H_p\{\lambda_k; S_h^*\}$.

Доказательство проводится тем же методом, что и доказательство теоремы 7 из [12].

2.2. (а). Если ряд (1.15) сходится, то, как было установлено выше, система $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ имеет биортогональную с ней на ∂S_h систему. Займемся ее построением, пользуясь известным методом, предложенным М. М. Джрбашяном (см., напр., [29], [30]).

(б). Пусть ряд (1.15) сходится. Тогда бесконечное произведение (1.14) сходится в области S_h и представляет там ограниченную аналитическую функцию $B_h(z)$, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$. При этом для функции $B_h(z)$ точка $z=\lambda_k$ является нулем кратности p_k. Очевидно, что функция

$$\zeta_k(z)=(z-\lambda_k)^{p_k}B_h^{-1}(z)\quad(k=1,2,\cdots) \tag{2.4}$$

регулярна и отлична от нуля в некоторой окрестности точки $z=\lambda_k$. Следовательно, при достаточно малом $\delta>0$ справедливо разложение

$$\zeta_k(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\lambda_k)(z-\lambda_k)^\nu,\quad |z-\lambda_k|<\delta; \tag{2.5}$$

$$a_\nu(\lambda_k)=\frac{1}{\nu!}\zeta_k^{(\nu)}(\lambda_k)\quad(\nu=0,1,\cdots;\ k=1,2,\cdots).\tag{2.6}$$

Отметим, что $a_0(\lambda_k)\neq 0$ $(k=1,2,\cdots)$.

Введем в рассмотрение полиномы

$$q_k(z)=\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}a_\nu(\lambda_k)(z-\lambda_k)^\nu\quad(k=1,2,\cdots)\tag{2.7}$$

и функции

$$\Omega_k(z)=\frac{B_h(z)\,q_k(z)}{(s_k-1)!\,(z-\lambda_k)^{p_k-s_k+1}}=\frac{B_h(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)^{p_k-s_k-\nu+1}}.\tag{2.8}$$

Так как функция $B_h(z)$ аналитична и ограничена в области S_h и в точке $z=\lambda_k$ имеет нуль кратности p_k, то $\Omega_k(z)$ аналитична и ограничена в той же области S_h. Более того, при $|z|\to+\infty$ функция $\Omega_k(z)$ имеет порядок $O(|z|^{-1})$. Отсюда легко видеть, что

$$\Omega_k(z)\in H_p[S_h]\ (k=1,2,\cdots).$$

Рассуждая, как и в работах [29, 30], получим следующее утверждение.

Лемма 4. *Функции системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ удовлетворяют следующим интерполяционным данным*

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\lambda_n)=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases}\quad(k,n=1,2,\cdots).$$

Теорема 2.3. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Тогда системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ биортогональны в следующем смысле:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h}r_n(\xi)\,\Omega_k(\xi)\,d\xi=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases}\quad(k,n=1,2,\cdots).\tag{2.9}$$

Эта теорема следует из леммы 4, так как написанный в (2.9) интеграл равен $\Omega_k^{(s_n-1)}(\lambda_n)$ (в силу (2.2) и теоремы 1.1* (2°)).

Из этой теоремы и замечания, приведенного после доказательства теоремы 2.1, заключаем, что для минимальности системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ необходима и достаточна сходимость ряда (1.15).

(в) Теперь мы хотим описать замкнутую линейную оболочку системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty\subset H_p[S_h]$. Напомним, что эта система определена лишь при условии сходимости ряда (1.15).

Пусть ряд (1.15) сходится. Обозначим через $\overline{H}_p\{\lambda_k;S_h\}$ множество тех функций $f(z)\in H_p[S_h]$, для которых $f(\xi)\,B_h^{-1}(\xi)$, $\xi\in\partial S_h$, являются граничными значениями некоторой функции из класса $H_p\{\lambda_k;S_h^*\}$.

Теорема 2.4. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Тогда замыкание в метрике $H_p[S_h]$ линейной оболочки системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ совпадает с классом $\overline{H}_p\{\lambda_k;S_h\}$.*

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 9 из [12].

Теорема 2.5. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Если* $f(z)\in \widetilde{H}_p\{\lambda_k; S_h\}$ *и* $f^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0$ $(k=1, 2, \cdots)$, *то* $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Так как $f^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0$ $(k\geqslant 1)$, то $f(\xi)\times\times B_h^{-1}(\xi)\in H_p[S_h]$. С другой стороны, из $f(z)\in \widetilde{H}_p\{\lambda_k; S_h\}$ имеем $f(\xi)\times\times B_h^{-1}(\xi)\in H_p\{\lambda_k; S_h\}$. Следовательно, в силу теоремы 1.1* (2°) и леммы 3

$$\int\limits_{\partial S_h}\frac{f(\xi)\,B_h^{-1}(\xi)}{\xi-z}\,d\xi\equiv 0,\ z\in S_h\cup \overset{*}{S_h}.$$

Отсюда заключаем, что $f(\xi)\,B_h^{-1}(\xi)=0$ почти всюду на ∂S_h (см. теорему 1.2 (3°)), и поскольку $|B_h(\xi)|=1$ почти всюду на ∂S_h, то $f(z)\equiv 0$.

Теорема 2.6. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Тогда любая функция* $G(z)\in H_p[S_h]$ *представима в виде*

$$G(z)=g(z)+\frac{B_h(z)}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}\frac{G(\xi)}{B_h(\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi-z},\ z\in S_h, \tag{2.10}$$

где

$$g(z)\in H_p\{\lambda_k;\ S_h\},\ \widetilde{G}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}\frac{G(\xi)}{B_h(\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi-z}\in H_p[S_h].$$

При этом справедливо неравенство

$$\|g;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p\,\|G;\ \partial S_h\|_p,$$

где $B_p\in(0, +\infty)$ *не зависит от* $G(z)$.

Доказательство. Пусть $G(z)\in H_p[S_h]$. Так как $|B_h(\xi)|=1$ почти всюду на ∂S_h, то по теореме 1.1* (1°)

$$G(\xi)\,B_h^{-1}(\xi)\in L_p(\partial S_h).$$

Следовательно, положив

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}\frac{G(\xi)}{B_h(\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi-z}=\begin{cases}\widetilde{G}(z),& z\in S_h,\\ -F(z),& z\in \overset{*}{S_h},\end{cases}$$

в силу теоремы 1.2 можем написать

$$\widetilde{G}(z)\in H_p[S_h],\quad F(z)\in H_p[\overset{*}{S_h}],$$

причем $\|F;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p\,\|G;\ \partial S_h\|_p$. Более того, почти всюду на ∂S_h

$$G(\xi)\,B_h^{-1}(\xi)=\widetilde{G}(\xi)+F(\xi).$$

Следовательно, определив функцию $g(z)$ равенством

$$g(z)=G(z)-B_h(z)\widetilde{G}(z),\ z\in S_h.$$

будем иметь: $g(z)\in H_p[S_h]$ и почти всюду на ∂S_h $g(\xi)B_h^{-1}(\xi)=F(\xi)$. Отсюда на основании определения класса $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ заключаем, что $F(z)\in H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\}$. Следовательно, $g(z)\in\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$, причем

$$\|G;\ \partial S_h\|_p=\|gB^{-1};\ \partial S_h\|_p=\|F;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p\|G;\ \partial S_h\|_p.$$

Теорема 2.7. *Если ряд (1.15) сходится, то*

1°. *При любом целом $k\geqslant 1$ формулой*

$$\chi_k[\varphi]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}\Omega_k(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi,\quad \varphi\in H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\},$$

на пространстве $H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\}$ определяется ограниченный линейный функционал χ_k;

2°. *Системы $\{\chi_k\}_1^\infty$ и $\{r_k\}_1^\infty$ биортогональны:*

$$\chi_k[r_n]=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases}\quad (k,\ n=1,\ 2,\cdots),$$

3°. *Справедливы неравенства*

$$\|\Omega_k;\ \partial S_h\|_q\leqslant C_p\|\chi_k\|\quad (k=1,\ 2,\cdots),$$

где $\|\chi_k\|$ — это норма функционала χ_k на пространстве $H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\}$, а $C_p\in(0,\ +\infty)$ не зависит от $k\geqslant 1$.

Доказательство. Так как $\Omega_k(z)\in H_q[S_h]$ и $H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\}\subset H_p[S_h^*]$, то утверждение 1° следует из теоремы 1.3. Утверждение 2° следует из теоремы 2.3. Перейдем к доказательству утверждения 3° теоремы.

Положим

$$T_k(\xi)=\Omega_k(\xi)B_h^{-1}(\xi)=\frac{1}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\lambda_k)}{(\xi-\lambda_k)^{p_k-s_k-\nu+1}},\quad \xi\in\partial S_h.$$

Нетрудно видеть, что $T_k\in H_q[S_h^*]$ и $\|T_k;\ \partial S_h\|_q=\|\Omega_k;\ \partial S_h\|_q$. Следовательно, по теореме 1.3 формулой

$$\Phi_k[G]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}T_k(\xi)G(\xi)\,d\xi,\quad G\in H_p[S_h]$$

определяется ограниченный линейный функционал Φ_k, заданный на пространстве $H_p[S_h]$. При этом

$$\|\Omega_k;\ \partial S_h\|_q=\|T_k;\ \partial S_h\|_q\leqslant 2\pi B_p\sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}T_k(\xi)G(\xi)\,d\xi\right|\right\},\qquad (2.11)$$

где верхняя грань берется по всем $G\in H_p[S_h]$ с нормой $\|G;\ \partial S_h\|_p\leqslant 1$. По теореме 2.6 каждая такая функция представима в виде

$$G(z)=g(z)+B_h(z)\,\tilde{G}(z),\quad z\in S_h, \tag{2.12}$$

где $g(z)\in\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$, $\tilde{G}(z)\in H_p[S_h]$, причем $\|g;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p$. Но так как функция $B_h(z)\,\tilde{G}(z)$ вместе с $B_n(z)$ в точке $z=\lambda_k$ имеет нуль кратности p_k, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h} T_k(\xi)\,B_h(\xi)\,\tilde{G}(\xi)\,d\xi=0,$$

и из (2.12) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h} T_k(\xi)\,G(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h} T_k(\xi)\,g(\xi)\,d\xi. \tag{2.13}$$

Однако $g(z)\in\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$. Значит

$$g(\xi)\,B_h^{-1}(\xi)=\varphi(\xi)\in H_p\{\lambda_k;\ \mathring{S}_h\}, \tag{2.14}$$

и поскольку $\|g;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p$, то $\|\varphi;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p$. Наконец, так как $T_k(\xi)\,B_h(\xi)=\Omega_k(\xi)$, то из (2.12) и (2.13) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h} T_k(\xi)\,G(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial \mathring{S}_h} \Omega_k(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда и из (2.11) заключаем, что

$$\|\Omega_k;\ \partial S_h\|_q\leqslant 2\pi B_p\sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h}\Omega_k(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\right|\right\},$$

где верхняя грань берется по всем $\varphi(\xi)\in H_p\{\lambda_k;\ \mathring{S}_h\}$ с нормой $\|\varphi;\ \partial S_h\|_p\leqslant B_p$, откуда и вытекает утверждение 3°.

Аналогично доказывается

Теорема 2.8. *Если ряд* (1.15) *сходится, то* 1°. *При любом целом $k\geqslant 1$ формулой*

$$R_k[g]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h} r_k(\xi)\,g(\xi)\,d\xi,\quad g\in\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\},$$

на пространстве $\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ определяется ограниченный линейный функционал R_k.

2°. *Системы $\{R_k\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k\}_1^\infty$ биортогональны:*

$$R_k[\Omega_n]=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases}\quad (k,\ n=1,\ 2,\cdots);$$

3°. *Справедливы неравенства*

$$\|r_k;\ \partial S_h\|_p\leqslant C_p\|R_k\|\quad (k=1,\ 2,\cdots),$$

где $\|R_k\|$ — это норма функционала R_k на пространстве $\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$, а $C_p\in(0,\ +\infty)$ не зависит от $k\geqslant 1$.

§ 3. Базисность системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$, $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ и решение кратной интерполяционной задачи в классах $H_p[S_h]$

3.1. (а) Для удобства читателя приведем здесь некоторые известные определения и факты.

Пусть X — банахово пространство и $\{x_k\}_1^\infty$ — система элементов этого пространства. Обозначим через $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$ замкнутую линейную оболочку системы $\{x_k\}_1^\infty$.

Как известно, система $\{x_k\}_1^\infty$ называется базисом пространства $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$, если любой элемент $x \in V(\{x_k\}_1^\infty; X)$ единственным образом разлагается в сходящийся по метрике X ряд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\, x_k, \tag{3.1}$$

где $c_k(x)$ — комплексные коэффициенты. В этом случае система $\{c_k(x)\}_1^\infty$ будет биортогональна с системой $\{x_k\}_1^\infty$.

Напомним, что системы $\{x_k\}_1^\infty \subset X$ и $\{x_k^*\}_1^\infty \subset X^*$ называются биортогональными, если

$$x_k^*(x_n) = \delta_{k,n} \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{3.2}$$

где $\delta_{k,n}$ — символ Кронекера.

Если система $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом пространства $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$, то эта система имеет биортогональное дополнение $\{x_k^*\}_1^\infty$, причем справедливо неравенство

$$\sup_{k \geq 1} \{\|x_k\|\, \|x_k^*\|\} < +\infty, \tag{3.3}$$

где $\|x_k^*\|$ — это норма функционала x_k^* на пространстве $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$ (см. [31], стр. 164—171).

Скажем, что система $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом $V(\{x_k\}_1^\infty; X)$, изоморфным стандартному базису пространства l_p, если существует ограниченный обратимый линейный оператор T_p: $V(\{x_k\}_1^\infty; X) \to l_p$ такой, что $T_p(x_k) = \{\delta_{k,n}\}_{n=1}^\infty$ при всех $k \geq 1$.

(б) Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset S_h$ — произвольная последовательность. Как и раньше, для произвольного целого $j \geq 1$ через s_j и p_j будем обозначать кратности появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_k\}_1^j$ и во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ соответственно.

Обозначим через $US(S_h)$ класс тех последовательностей $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset S_h$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

$$\inf_{k \geq 1} \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_k}}^{\infty} \left| \frac{e^{\pi\lambda_k/2h} - e^{\pi\lambda_j/2h}}{e^{\pi\lambda_k/2h} + e^{\overline{\pi\lambda_j}/2h}} \right| \right\} > 0, \quad \sup_{k \geq 1} \{p_k\} < +\infty. \tag{3.4}$$

Отметим, что из первого из этих условий вытекает сходимость ряда (1.15).

Очевидно также, что условия (3.4) можно записать и в следующем виде.

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_k}}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4h}(\lambda_k-\lambda_j)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{4h}(\lambda_k-\bar{\lambda}_j)}\right|\right\}>0,\ \sup_{k\geq 1}\{p_k\}<+\infty. \qquad (3.4')$$

С последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем новую последовательность $\lambda_{(q)}\equiv\{\lambda_k^{(q)}\}_1^\infty$, положив

$$\lambda_k^{(q)}=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_k\right)\right|^{s_k-\frac{1}{q}}\ (k=1,2,\cdots). \qquad (3.5)$$

Пусть, далее, $\varkappa\equiv\{\varkappa_k\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел. Обозначим через $l_p[\varkappa]$ банахово пространство всевозможных последовательностей комплексных чисел $\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\|\gamma;\varkappa\|_p=\left\{\sum_{k=1}^\infty\varkappa_k^p|\gamma_k|^p\right\}^{1/p}<+\infty.$$

Очевидно, что если последовательность $w\equiv\{w_k\}_1^\infty$ и $\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^\infty$ удовлетворяют условиям $w_k=\varkappa_k\gamma_k\ (k\geqslant 1)$, то $\gamma\in l_p(\varkappa)$ тогда и только тогда, когда $w\in l_p$.

Наконец, напомним, что выше мы условились через p и q обозначать параметры, определяемые из условий (2.1).

3.2 (а). Докажем лемму.

Лемма 5. *Если* $\lambda\in S_h$ *и* $n\geqslant 1$, *то*

$$\left[\frac{4h}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda\right)\right]^n\int_{\partial S_h}\frac{|d\xi|}{|\xi-\lambda|^{n+1}}\geqslant\frac{2}{n}\left(\frac{4}{\pi}\right)^n.$$

Доказательство. Имеем

$$I_n(\lambda)=\int_{\partial S_h}\frac{|d\xi|}{|\xi-\lambda|^{n+1}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^{n+1/2}}\left\{\frac{1}{(h+\operatorname{Im}\lambda)^n}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(h-\operatorname{Im}\lambda)^n}\geqslant\frac{2}{n}\left\{\frac{1}{(h+\operatorname{Im}\lambda)^n}+\frac{1}{(h-\operatorname{Im}\lambda)^n}\right\}.\right.$$

Следовательно, воспользовавшись неравенством $\sin\tau\geqslant\frac{2}{\pi}\tau\left(0\leqslant\tau\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ при $0\leqslant\operatorname{Im}\lambda<h$ можем написать

$$I_n(\lambda)>\frac{2}{n}(h-\operatorname{Im}\lambda)^{-n}=\frac{2}{n}\left(\frac{\pi}{2h}\right)^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda\right)^{-n}\geqslant$$

$$>\frac{2}{n}\left(\frac{\pi}{2h}\right)^n\left[\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda\right)\right]^{-n}=\frac{2}{n}h^{-n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda\right)\right]^{-n}.$$

Аналогично, при $-h<\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$

$$I_n(\lambda)>\frac{2}{n}h^{-n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda\right)\right]^{-n}.$$

Из полученных оценок следует утверждение леммы.

Лемма 6. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Если*

$$\sup_{k>1} \{\|r_k;\ \partial S_h\|_p \|\Omega_k;\ \partial S_h\|_q\} = C < +\infty, \tag{3.6}$$

то $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset US(S_h)$.

Доказательство. Сначала заметим, что в силу сходимости ряда (1.15) число p_n при любом $n \geqslant 1$ конечно.

Обозначим через $\{N\}$ множество тех индексов n, для которых $p_n = s_n$. Из определения (2.8) функций $\Omega_k(z)$ следует, что

$$\Omega_n(z) = \frac{a_0(\lambda_n)}{(p_n-1)!}\,\frac{B_h(z)}{z-\lambda_n},\quad n \in \{N\},$$

причем

$$|a_0(\lambda_n)| = \left\{\frac{4h}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_n\right)\right\}^{p_n}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_n}}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4h}(\lambda_n-\lambda_j)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{4h}(\lambda_n-\overline{\lambda}_j)}\right|\right\}. \tag{3.7}$$

Имеем также

$$r_n(z) = \frac{(p_n-1)!}{(z-\lambda_n)^{p_n}},\quad n \in \{N\}.$$

Учитывая, что $|B_h(\xi)| = 1$ почти всюду на ∂S_h и, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|a_0(\lambda_n)| \int_{\partial S_h} \frac{|d\xi|}{|\xi-\lambda_n|^{p_n+1}} = \int_{\partial S_h} |r_n(\xi)|\,|\Omega_n(\xi)|\,|d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \|r_n;\ \partial S_h\|_p \|\Omega_n;\ \partial S_h\|_q,\quad n \in \{N\}.$$

Отсюда и из теоремы 2.5 получаем $F(z) \equiv 0$, откуда заключаем, что

$$\frac{2}{p_n}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{p_n} \leqslant C\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_n}}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4h}(\lambda_n-\lambda_j)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{4h}(\lambda_n-\overline{\lambda}_j)}\right|\right\},\quad n \in \{N\}. \tag{3.8}$$

Так как $4/\pi > 1$, а выражение справа в (3.8) не превосходит C, то из (3.8) получаем (3.4).

Лемма 7. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Если система* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *при какой-либо перестановке членов является базисом замыкания в метрике* $H_p[\mathring{S}_h]$ *своей линейной оболочки, то* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$.

Доказательство. Напомним, что при условии сходимости ряда (1.15) система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ определена. При том же условии замыкание в метрике $H_p[\mathring{S}_h]$ линейной оболочки системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ совпадает с пространством $H_p\{\lambda_k;\ \mathring{S}_h\}$ (см. теорему 2.2).

Если система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ при какой-либо перестановке членов является базисом пространства $H_p\{\lambda_k;\ \mathring{S}_h\}$, то в силу теоремы 2.7 и (3.3) имеет место (3.6). Остается воспользоваться леммой 6.

Аналогично доказывается

Лемма 8. *Пусть ряд (1.15) сходится. Если система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ при какой-либо перестановке членов является базисом замыкания в метрике $H_p[S_h]$ своей линейной оболочки, то $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$.*

(б) Следующее утверждение играет существенную роль при установлении достаточных условий базисности систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$.

Теорема 3.1. *Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — последовательность попарно различных точек из S_h, удовлетворяющая условию*

$$\inf_{k>1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{e^{\pi z_k/2h}-e^{\pi z_j/2h}}{e^{\pi z_k/2h}+e^{\pi \bar{z}_j/2h}}\right|\right\}>0. \tag{3.9}$$

Тогда для любой функции $f(z)\in H_p[S_h]$ справедливы неравенства

$$L_r[f]\equiv\sum_{k=1}^{\infty}|z_k^{(r;\,q)}|^p\,|f^{(r-1)}(z_k)|^p\leqslant D_p^{(r)}\,\|f;\,\partial S_h\|_p^p, \tag{3.10}$$

где $D_p^{(r)}\in(0,+\infty)$ не зависит от $f(z)$, а

$$z_k^{(r;\,q)}=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im} z_k\right)\right]^{r-\frac{1}{q}}. \tag{3.5'}$$

Доказательство. Наряду с последовательностью $\{z_k\}_1^\infty$ рассмотрим новую последовательность $\{w_k\}_1^\infty$ из полуплоскости $\operatorname{Re} w>0$, где

$$w_k=e^{\pi z_k/2h}\quad(k=1,2,\cdots). \tag{3.11}$$

Тогда, как известно, [19], в силу (3.9) для любого $F(w)\in H_p$ будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{Re} w_k)^{p(r-1)+1}\,|F^{(r-1)}(w_k)|^p\leqslant A_p^{(r)}\,\|F\|_{H_p}^p\quad(r=1,2\cdots), \tag{3.12}$$

где $A_p^{(r)}\in(0,+\infty)$ не зависит от $F(w)$.

Пусть теперь $f(z)\in H_p[S_h]$. Положим

$$F(w)=\left(\frac{2h}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}f\left(\frac{2h}{\pi}\log w\right)w^{-\frac{1}{p}},\ \operatorname{Re} w>0. \tag{3.13}$$

Легко показать, что тогда $F(w)\in H_p^*$. Значит $F(w)\in H_p$ по теореме A и (3.12) для функции $F(w)$ имеет место.

С другой стороны, применив индукцию по r $(r=1,2,\cdots)$, нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$\left.\frac{d^{r-1}f(z)}{dz^{r-1}}\right|_{z=\frac{2h}{\pi}\log w}=\sum_{\nu=0}^{r-1}C_\nu^{(r)}\,w^{\nu+\frac{1}{p}}\,\frac{d^\nu F(w)}{dw^\nu},\ \operatorname{Re} w>0,$$

где $C_\nu^{(r)}$ $(0\leqslant\nu\leqslant r-1)$ не зависит от w и $f(z)$. Отсюда и из (3.11) с применением неравенства

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right|^p \leqslant N^{p/q} \sum_{n=1}^{N} |a_n|^p \tag{3.14}$$

получим

$$|f^{(r-1)}(z_k)|^p \leqslant B_p^{(r)} \sum_{\nu=0}^{r-1} |w_k|^{p\nu+1} |F^{(\nu)}(w_k)|^p \quad (k \geqslant 1),$$

где $B_p^{(r)} \in (0, +\infty)$ не зависит от $k \geqslant 1$ и $f(z)$. Следовательно

$$L_r[f] \leqslant B_p^{(r)} \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} |z_k^{(r;\,q)}|^p \, |w_k|^{p\nu+1} \, |F^{(\nu)}(w_k)|^p. \tag{3.15}$$

Легко проверить, что $p\left(r-\dfrac{1}{q}\right) > p\nu+1$, $\nu=0, 1, \cdots, r-1$ и поэтому

$$|z_k^{(r;\,q)}|^p \, |w_k|^{p\nu+1} \leqslant (\operatorname{Re} w_k)^{p\nu+1} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant r-1).$$

Воспользовавшись этим неравенством и (3.12), из (3.15) получим

$$L_r[f] \leqslant B_p^{(r)} \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Re} w_k)^{p\nu+1} \, |F^{(\nu)}(w_k)|^p \leqslant$$

$$\leqslant B_p^{(r)} \sum_{\nu=0}^{r-1} A_p^{(\nu+1)} \|F\|_{H_p}^p \quad (r=1, 2, \cdots),$$

откуда в силу равенства (1.7) вытекает (3.10). Теорема доказана.

Следствие. Если $\{\lambda_k\}_1^{\infty} \in US(S_h)$, то для любой функции $f(z) \in$ $\in H_p[S_h]$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{(q)}|^p \, |f^{(s_k-1)}(\lambda_k)|^p \leqslant D_p \|f;\ \partial S_h\|_p^p, \tag{3.16}$$

где $\{\lambda_k^{(q)}\}_1^{\infty}$ определяется из (3.5), а $D_p \in (0, +\infty)$ не зависит от $f(z)$.

(в) Сейчас нам понадобится следующая лемма об оценках коэффициентов разложения (2.5), которая доказывается так же, как и лемма 1.6 из работы [2].

Лемма 9. *Если* $\{\lambda_k\}_1^{\infty} \in US(S_h)$, *то для коэффициентов разложения* (2.5) *справедливы оценки*

$$|a_\nu(\lambda_k)| \leqslant A \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2h} \operatorname{Im} \lambda_k\right)\right\}^{p_k-\nu} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant p_k-1,\ k \geqslant 1),$$

где $A \in (0, +\infty)$ *не зависит от* ν *и* k.

Лемма 10. *Если* $\{\lambda_k\}_1^{\infty} \in US(S_h)$ *и последовательность* $\{\lambda_k^{(q)}\}_1^{\infty}$ *определяется согласно* (3.5), *то для любой функции* $F(\xi) \in L_q(\partial S_h)$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{(q)}|^{-q} \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_h} F(\xi)\, \Omega_k(\xi)\, d\xi\right|^q \leqslant C_q^1 \|F;\ \partial S_h\|_q, \tag{3.17}$$

где $C_q^1 \in (0, +\infty)$ *не зависит от* $F(\xi)$.

Доказательство. Положим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_h} \frac{F(\xi)\, B_h(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \in S_h. \tag{3.18}$$

Так как $F(\xi) B_h(\xi) \in L_q(\partial S_h)$, то по теореме 1.2 имеем $f(z) \in H_q[S_h]$, причем

$$\|f;\ \partial S_h\|_q \leqslant B_q \|F(\xi) B_h(\xi);\ \partial S_h\|_q = B_q \|F;\ \partial S_h\|_q, \tag{3.19}$$

где $B_q \in (0, +\infty)$ не зависит от $F(\xi)$.

Принимая во внимание определения (2.8) и (3.18) функций $\Omega_k(z)$ и $f(z)$, можем написать

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi)\, \Omega_k(\xi)\, d\xi = \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} \frac{a_\nu(\lambda_k)}{(s_k-1)!\,(p_k - s_k - \nu)!} f^{(p_k - s_k - \nu)}(\lambda_k).$$

Применив здесь неравенство (3.14) (с заменой p на q), получим

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi)\, \Omega_k(\xi)\, d\xi\right|^q \leqslant (p_k - s_k + 1)^{q/p} \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} |a_\nu(\lambda_k)|^q |f^{(p_k - s_k - \nu)}(\lambda_k)|^q. \tag{3.20}$$

Так как в силу условия $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$ должно быть

$$\sup_{k \geqslant 1} p_k = P < +\infty, \tag{3.21}$$

то из (3.20), воспользовавшись леммой 9, получим

$$[\lambda_k^{(q)}]^{-q} \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi)\, \Omega_k(\xi)\, d\xi\right|^q \leqslant P^{q/p} \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} [\lambda_k^{(q)}]^{-q} \times$$

$$\times \left[\cos\left(\frac{\pi}{2h} \operatorname{Im} \lambda_k\right)\right]^{(p_k - \nu) q} |f^{(p_k - s_k - \nu)}(\lambda_k)|^q = P^{q/p} A^q \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2h} \operatorname{Im} \lambda_k\right)\right]^{\left(p_k - s_k - \nu + \frac{1}{q}\right) q} |f^{(p_k - s_k - \nu)}(\lambda_k)|.$$

Произведя здесь замену переменной $p_k - s_k - \nu + 1 = r$ и учитывая (3.21), можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^{(q)}]^{-q} \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi)\, \Omega_k(\xi)\, d\xi\right|^q \leqslant P^{q/p} A^q \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{p_k - s_k + 1} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2h} \operatorname{Im} \lambda_k\right)\right]^{\left(r - \frac{1}{p}\right) q} |f^{(r-1)}(\lambda_k)|^q. \tag{3.22}$$

Теперь обозначим через $\{z_k\}_1^\infty$ последовательность попарно различных точек последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$, а через $\{J_k\}$ обозначим множество тех индексов $j \geqslant 1$, для которых $\lambda_j = z_k$ при $j \in \{J_k\}$. Непосредственно видно, что

$$\{J_{k_1}\} \cap \{J_{k_2}\} = \varnothing\ (k_1 \neq k_2);\ \bigcup_{k=1}^{\infty} \{J_k\} = \{j\}_1^\infty.$$

Учитывая эти замечания и (3.21), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2h} \operatorname{Im} \lambda_k\right)\right]^{(r - 1/p) q} |f^{(r-1)}(\lambda_k)|^q =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in\{J_k\}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}\lambda_j\right)\right]^{(r-1/p)q}|f^{(r-1)}(\lambda_j)|^q\leqslant$$

$$\leqslant P\sum_{k=1}^{\infty}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2h}\operatorname{Im}z_k\right)\right|^{(r-1/p)q}|f^{(r-1)}(z_k)|^q\ (1\leqslant r\leqslant P).$$

Отсюда и из (3.22) получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\lambda_k^{(q)}]^{-q}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h}F(\xi)\,\Omega_k(\xi)\,d\xi\right|^q\leqslant$$

$$\leqslant P^{q/p+1}A^q\sum_{r=1}^{P}\sum_{k=1}^{\infty}[z_k^{(r;p)}]^q\,|f^{(r-1)}(z_k)|^q. \tag{3.23}$$

Поскольку $\{\lambda_k\}_1^{\infty}\in US(S_h)$, то последовательность $\{z_k\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию (3.9). Следовательно, воспользовавшись теоремой 3.1 (предварительно заменив p на q) из (3.23) и (3.19) получим (3.17).

Лемма 11. *Если $\{\lambda_k\}_1^{\infty}\in US(S_h)$, то для любой функции $F(\xi)\in\in L_q(\partial S_h)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\lambda_k^{(p)}]^q\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h}F(\xi)\,r_k(\xi)\,d\xi\right|^q\leqslant C_q^2\|F;\partial S_h\|_q, \tag{3.24}$$

где $C_q^2\in(0,+\infty)$ не зависит от $F(\xi)$.

Доказательство. Положим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h}\frac{F(\xi)}{\xi-z}\,d\xi,\ z\in S_h. \tag{3.25}$$

По теореме 1.2 имеем $f(z)\in H_q[S_h]$, причем

$$\|f;\partial S_h\|_q\leqslant B_q\|F;\partial S_h\|_q. \tag{3.26}$$

Принимая во внимание определения (2.2) и (3.25) функций $r_k(z)$ и $f(z)$, можем написать

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_h}F(\xi)\,r_k(\xi)\,d\xi=f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\ (k\geqslant 1).$$

Следовательно, чтобы получить (3.24) остается воспользоваться следствием из теоремы 3.1 (пердварительно заменив p на q).

Лемма 12. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Если $f(z)\in H_p\{\lambda_k;S_h^*\}$ и*

$$\int_{\partial S_h}f(\xi)\,\Omega_k(\xi)\,d\xi=0\quad(k=1,2,\cdots), \tag{3.27}$$

то $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что при любом $k\geqslant 1$ функция $B_h(z)(z-\lambda_k)^{-s_k}$ принадлежит классу $\bar{H}_q\{\lambda_k;S_h\}$. Следовательно, воспользовавшись теоремой 2.4 (заменив в ней p на q) можем утверждать, что существует последовательность $\{P_n(z)\}$ линейных комбинаций функций системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, сходящаяся в метрике $H_q[S_h]$ к $B_h(z)(z-\lambda_k)^{-s_k}$. Но в силу (3.27) имеем

$$\int_{\partial S_h} f(\xi)\, P_n(\xi)\, d\xi = 0 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

Устремив здесь $n \to +\infty$, получим

$$\int_{\partial S_h} \frac{f(\xi)\, B_h(\xi)}{(\xi-\lambda_k)^{s_k}} d\xi = 0 \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{3.28}$$

Теперь заметим, что из определений классов $H_p\{\lambda_k;\ \overset{*}{S_h}\}$ и $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ следует, что если $f(z) \in H_p\{\lambda_k;\ \overset{*}{S_h}\}$, то $F(\xi) = B_h(\xi)\cdot f(\xi)$, $\xi \in \partial S_h$ является граничной функцией некоторой функции $F(z) \in \widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$. Для этой функции из (3.28) получаем

$$F^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Отсюда и из теоремы 2.5 получаем $F(z) \equiv 0$, откуда заключаем, что $f(z) \equiv 0$. Лемма доказана.

3.3. Пусть последовательность $\lambda_{(p)} = \{\lambda_k^{(p)}\}_1^\infty$ определяется из (3.5). Тогда имеет место

Теорема 3.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$, то система $\{\lambda_k^{(p)} r_k(z)\}_1^\infty$ является базисом пространства $H_p\{\lambda_k;\ \overset{*}{S_h}\}$, изоморфным стандартному базису пространства l_p.*

2°. *Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \overline{\in} US(S_h)$, то система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ ни при какой перестановке членов не является базисом замыкания в метрике $H_p[\overset{*}{S_h}]$ своей линейной оболочки.*

Доказательство 1°. Пусть $f(z)$ — произвольная функция из класса $H_p\{\lambda_k;\ \overset{*}{S_h}\}$. Определим последоватальность $\gamma(f) \equiv \{\gamma_k(f)\}_1^\infty$ следующим образом:

$$\gamma_k(f) = [\lambda_k^{(p)}]^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_h} f(\xi)\, \Omega_k(\xi)\, d\xi \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{3.29}$$

Из определения класса $H_p\{\lambda_k;\ \overset{*}{S_h}\}$ следует, что $f(\xi) \in L_p(\partial S_h)$. Следовательно, воспользовавшись леммой 10 (предварительно заменив в ней p на q), можем написать

$$\sum_{k=1}^\infty |\gamma_k(f)|^p = \sum_{k=1}^\infty [\lambda_k^{(p)}]^{-p} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_h} f(\xi)\cdot \Omega_k(\xi)\, d\xi \right|^p \leqslant C_p^1 \|f;\ \partial S_h\|_p^p,$$

где $C_p^1 \in (0, +\infty)$ не зависит от $f(\xi)$.

Определим теперь оператор T_p следующим образом:

$$T_p[f] = \gamma(f), \; f \in H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\}.$$

Из (3.30) следует, что T_p — ограниченный линейный оператор, отображающий $H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\}$ в l_p. При этом, в силу леммы 12, оператор T_p переводит разные элементы из $H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\}$ в разные элементы пространства l_p. С другой стороны, в силу теоремы 2.3

$$T_p[\lambda_k^{(p)} r_k] = \{\delta_{k,n}\}_{n=1}^{\infty} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

где $\delta_{k,n}$ — символ Кронекера.

Таким образом, чтобы завершить доказательство утверждения 1° теоремы, нам нужно показать, что T_p отображает $H_p\{\lambda_k;\ S_h^*\}$ на все пространство l_p.

Пусть $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^{\infty} \in l_p$. В силу теоремы Хана—Банаха

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \lambda_k^{(p)} r_k;\ \partial S_h \right\|_p = \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_h} F(\xi) \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \lambda_k^{(p)} r_k(\xi)\, d\xi \right| \right\}, \tag{3.31}$$

где верхняя грань берется по всем $F(\xi) \in L_q(\partial S_h)$ с нормой $\|F; \partial S_h\|_q \leqslant 2\pi$. Однако, в силу неравенства Гельдера и леммы 11 можем написать

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_h} F(\xi) \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \lambda_k^{(p)} r_k(\xi)\, d\xi \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \left\{ \lambda_k^{(p)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_h} F(\xi) r_k(\xi)\, d\xi \right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} [\lambda_k^{(p)}]^q \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_h} F(\xi) r_k(\xi)\, d\xi \right|^q \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C_q^2 \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} \|F; \partial S_h\|_q.$$

Отсюда и из (3.31) получаем

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k \lambda_k^{(p)} r_k;\ \partial S_h \right\|_p \leqslant 2\pi C_q^2 \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} \quad (n,\ m = 1, 2, \cdots).$$

Следовательно, ряд

$$f_\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \lambda_k^{(p)} r_k(z)$$

сходится в метрике $H_p[S_h^*]$ и определяет некоторую функцию $f_\gamma(z) \in H_p\{\lambda_k,\ S_h^*\}$ (см. теорему 2.2), а в силу теоремы 2.3 $T_p[f_\gamma] = \gamma = \{\gamma_k\}_1^{\infty}$. Утверждение 1° доказано.

2°. Если ряд (1.15) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ не минимальна в $H_p(S_h^*)$ и, следовательно, ни при какой перестановке членов не является базисом.

Если же ряд (1.15) сходится, то надо воспользоваться леммой 7. Теорема доказана.

Установим теперь критерий базисности системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$. Напомним, что эта система определена лишь при условии сходимости ряда (1.15). При этом замыкание в метрике $H_p[S_h]$ ее линейной оболочки совпадает с пространством $\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ (см. теорему 2.4).

Если $\lambda_{(q)}=\{\lambda_k^{(q)}\}_1^\infty$ определяется из (3.5), то имеет место

Теорема 3.3. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$, *то система* $\{(\lambda_k^{(q)})^{-1}\,\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *является базисом пространства* $\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$, *изоморфным стандартному базису пространства* l_p.

2°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \overline{\in} US(S_h)$, *то система* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *ни при какой перестановке членов не является базисом пространства* $\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$.

Доказательство 1°. Пусть $f(z)\in \tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$. Определим последовательность $\gamma(f)\equiv\{\gamma_k(f)\}_1^\infty$ следующим образом:

$$\gamma_k(f)=\lambda_k^{(q)}\ f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\quad (k=1,\ 2,\cdots).$$

Нетрудно видеть, что

$$\gamma_k(f)=\lambda_k^{(q)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S_h} f(\xi)\,r_k(\xi)\,d\xi\quad (k=1,\ 2,\cdots),$$

причем из определения класса $\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ следует, что $f(\xi)\in L_q(\partial S_h)$. Следовательно, воспользовавшись леммой 11 (предварительно заменив в ней q на p), можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k(f)|^p\leqslant C_p^2\|f;\ \partial S_h\|_p^p, \tag{3.32}$$

где $C_p^2\in(0,\ +\infty)$ не зависит от $f(\xi)$.

Определим теперь оператор Q_p следующим образом:

$$Q_p[f]=\gamma[f],\ f\in\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}.$$

Из (3.32) следует, что Q_p — ограниченный линейный оператор, отображающий $\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ в l_p. При этом, в силу теоремы 2.5, оператор Q_p переводит разные элементы из $\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ в разные элементы пространства l_p. С другой стороны, в силу леммы 4

$$Q_p[(\lambda_k^{(q)})^{-1}\,\Omega_k]=\{\delta_{k,\,n}\}_{n=1}^\infty\quad (k=1,\ 2,\cdots).$$

Таким образом, чтобы завершить доказательство утверждения 1° теоремы, нам нужно показать, что Q_p отображает $\tilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ на все пространство l_p.

Пусть $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty \in l_p$. В силу теоремы Хана—Банаха

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k (\lambda_k^{(q)})^{-1} \Omega_k; \partial S_h \right\|_p = \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi) \sum_{k=n}^{n+m} \gamma_k (\lambda_k^{(q)})^{-1} \Omega_k(\xi)\, d\xi \right| \right\}, \quad (3.33)$$

где верхняя грань берется по всем $F(\xi) \in L_q(\partial S_h)$ с нормой $\|F, \partial S_h\|_q \leqslant 2\pi$. Однако в силу неравенства Гельдера и леммы 10 можем написать

$$\left| \sum_{n=n}^{n+m} \gamma_k \left\{ (\lambda_k^{(q)})^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi)\, \Omega_k(\xi)\, d\xi \right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} (\lambda_k^{(q)})^{-q} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} F(\xi)\, \Omega_k(\xi)\, d\xi \right|^q \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=n}^{n+m} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p} C_q^1 \|F; \partial S_h\|_q \quad (n, m = 1, 2, \cdots).$$

Следовательно, ряд

$$f_\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (\lambda_k^{(q)})^{-1} \Omega_k(z)$$

сходится в метрике $H_p[S_h]$ и определяет некоторую функцию $f_\gamma(z) \in \in \bar{H}_p\{\lambda_k; S_h\}$ (см. теорему 2.4), а в силу леммы 4 $Q_p[f_\gamma] = \gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty$. Утверждение 1° доказано.

Утверждение 2° следует из леммы 8. Теорема доказана.

Воспользовавшись леммой 4 и теоремой 2.5, из теоремы 3.2 получаем

Следствие. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$, то для любой функции $f(z) \in H_p[S_h]$ справедливо представление вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\, \Omega_k(z) + \frac{B_h(z)}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_h} \frac{f(\xi)}{B_h(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - z}, \quad z \in S_h,$$

где ряд сходится по метрике $H_p[S_h]$.

3.4. Для пространств $H_p[S_h]$ задачу (0.1)—(0.2) можно сформулировать следующим образом:

Выявить условия на последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$, при которых пространство последовательностей

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f \in H_p[S_h]\} \quad (3.34)$$

совпадает с каким-либо идеальным пространством I и дать аппарат для явного построения решений интерполяционной задачи

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k) = \gamma_k \ (k=1, 2, \cdots); \ \{\gamma_k\}_1^\infty \in J.$$

В следующей теореме содержится полное решение этой задачи.

Теорема 3.4. 1°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$, *то справедливы следующие утверждения:*

а) *если последовательность* $\lambda_{(q)} \equiv \{\lambda_k^{(q)}\}_1^\infty$ *определяется из* (3.5), *то справедливы равенства*

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f(z) \in H_p[S_h]\} =$$

$$= \{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f(z) \in \widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}\} = l_p\{\lambda_{(q)}\}; \tag{3.35}$$

б) *Если* $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty \in l_p\{\lambda_{(q)}\}$, *то ряд*

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k \Omega_k(z) \tag{3.36}$$

сходится в метрике $H_p[S_h]$ *и определяет функцию* $f(z) \in \widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$ *которая удовлетворяет следующим интерполяционным данным:*

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k) = \gamma_k \quad (k=1,\ 2, \cdots); \tag{3.37}$$

в) *функция из класса* $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$, *удовлетворяющая интерполяционным данным* (3.37), *единственна.*

2°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \overline{\in} US(S_h)$, *то пространство* (3.34) *не совпадает ни с каким идеальным пространством последовательностей.*

Доказательство 1°. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(S_h)$. В силу следствия из теоремы 3.1 имеем

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f(z) \in \widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}\} \subset$$

$$\subset \{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f \in H_p[S_h]\} \subset l_p\{\lambda_{(q)}\}.$$

Следовательно, равенства (3.35) будут доказаны, если мы докажем утверждение б).

Пусть $\gamma = \{\gamma_k\}_1^\infty \in l_p\{\lambda_{(q)}\}$. Тогда последовательность $\{\lambda_k^{(q)}\gamma_k\}_1^\infty$ принадлежит l_p. Следовательно, в силу утверждения 1° теоремы 3.3 ряд (3.36) сходится по метрике $H_p[S_h]$, и по теореме (2.4) сумма этого ряда принадлежит классу $\widetilde{H}_p\{\lambda_k;\ S_h\}$.

Равенства (3.40) вытекают из леммы 4.

Наконец, утверждение в) является следствием теоремы (2.5) и утверждение 1° доказано.

2°. Пусть теперь $\{\lambda_k\}_1^\infty \overline{\in} US(S_h)$. Предположим, что пространство последовательностей (3.34) совпадает с каким-либо идеальным пространством последовательностей I. Но легко видеть, что пространство последовательностей (3.34) совпадает с пространством

$$\{(\Phi[r_k])_1^\infty:\ \Phi \in (H_p[S_h])^*\}, \tag{3.38}$$

где $(H_p[S_h])^*$ — это сопряженное пространство пространства $H_p[S_h$ (нужно только воспользоваться теоремами 1.1, 1.3 и определением (2.2) функций $r_k(z)$). Но тогда пространство последовательностей (3.38) также совпадает с J. Следовательно, система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ является безусловным базисом замыкания в метрике $H_p[S_h]$ своей линейной оболочки (см. [32], стр. 27), а это противоречит утверждению 2° теоремы 3.2. Теорема доказана.

Так как при любом $s(1 \leqslant s < +\infty)$ пространство $l_s(\varkappa)$ является идеальным, то из утверждения 2" теоремы 3.4, в частности, следует, что

если $\{\lambda_k\}_1^\infty \overline{\in} US(S_h)$, то пространство последовательностей (3.34) не совпадает ни с каким пространством вида $l_s(\varkappa)$ $(1 \leqslant s < +\infty)$.

§ 4. Замыкание, минимальность и базисность системы функций $\{e^{-i\lambda_k t}\, t^{s_k-1}\}_1^\infty$

4.1. Введем еще несколько необходимых обозначений. Обозначим через

$$S_h^*(+) = \{z;\ \operatorname{Im} z > h\},\quad S_h^*(-) = \{z;\ \operatorname{Im} z < -h\}.$$

Далее, через $H_2[S_h^*(+)]$ обозначим класс функций $F(z)$, аналитических в области $S_h^*(+)$ и удовлетворяющих условию

$$\|F;\ S_h^*(+)\|_2 = \sup_{y>h}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x+iy)|^2\,dx\right\}^{1/2} < +\infty.$$

Через $H_2[S_h^*(-)]$ обозначим класс функций $F(z)$, аналитических в области $S_h^*(-)$ и удовлетворяющих условию

$$\|F;\ S_h^*(-)\|_2 = \sup_{y<-h}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x+iy)|^2\,dx\right\}^{1/2} < +\infty.$$

Наконец, обозначим через $L_2(e^{-2h|t|}dt) = L_2(-\infty, +\infty;\ e^{-2h|t|}dt)$ пространство измеримых на вещественной оси функций $f(t)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L_2(e^{-2h|t|}dt)} = \|f(t)\,e^{-h|t|}\|_{L_2(-\infty,+\infty)} = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2 e^{-2h|t|}\,dt\right\}^{1/2} < +\infty.$$

3.2. (а) Рассмотрим функцию

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{izt} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{izt}\,e^{ht}\times$$

$$\times\{f(t)\,e^{-ht}\}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{i(z-ih)t}\{f(t)\,e^{-ht}\}\,dt.$$

Обозначим $\varphi(t) = f(t)\,e^{-ht}$ и предположим, что $\varphi(t) \in L_2(0, +\infty)$.

Рассмотрим также функцию

$$\Phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{iwt}\varphi(t)\,dt.$$

Ясно, что $\Phi(w) = F^+(w+ih)$. По теореме Винера—Пэли $\Phi(w) \in H_2^+$, то есть

$$\|\Phi\|_{H_2^+} = \sup_{0<y<+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x+iy)|^2 \, dx \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Следовательно, $F^+(w) \in H_2[S_h^*(+)]$. Кроме того

$$\|F^+;\ S_h^*(+)\|_2 = \|\Phi\|_{H_2^+} = \|\varphi\|_{L_2(0,+\infty)} = \|f(t)\, e^{-ht}\|_{L_2(0,+\infty)}. \tag{4.1}$$

Аналогично, если предполагать, что $f(t)\, e^{-h|t|} \in L_2(-\infty, 0)$, то для функции

$$F^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{izt} f(t)\, dt$$

будем иметь $F^-(z) \in H_2[S_h^*(-)]$ и

$$\|F;\ S_h^*(-)\|_2 = \|f(t)\, e^{-h|t|}\|_{L_2(0,+\infty)}. \tag{4.2}$$

Рассмотрим следующий оператор

$$W(f)(z) = F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{izt} f(t)\, dt, & \operatorname{Im} z > h, \\[2ex] F^-(z) = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{izt} f(t)\, dt, & \operatorname{Im} z < -h, \end{cases} \tag{4.3}$$

определенный на классе $L_2(e^{-2h|t|}dt)$.

Теорема 4.1. *Если в $H_2[S_h^*]$ рассматривать норму (1.4), то оператор $W(f)$ является изометрией между пространствами $L_2(e^{-2h|t|}\, dt)$ и $H_2[S_h^*]$.*

2°. *Обратный оператор W^{-1} определяется формулой*

$$W^{-1}(F)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\partial S_h^*} e^{-i\xi t} F(\xi)\, d\xi, \quad t \in (-\infty, +\infty), \tag{4.4}$$

где написанное равенство нужно понимать в том смысле, что

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\partial S_h^* \cap \{|\operatorname{Re}\xi|<\sigma\}} e^{-i\xi t} F(\xi)\, d\xi - f(t) \right|^2 e^{-2h|t|}\, dt = 0. \tag{4.5}$$

Доказательство. Утверждение 1° следует из (4.1) и (4.2). Теперь докажем утверждение 2°.

Из теоремы Винера-Пэли легко следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} F(x+ih)\, dx = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0), \\ f(t)\, e^{-ht}, & t \in (0, +\infty), \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} F(x-ih)\,dx = \begin{cases} -f(t)\,e^{-ht}, & t\in(-\infty, 0),\\ 0 &, t\in(0, +\infty),\end{cases}$$

где интегралы понимаются в смысле сходимости в среднем по метрике L_2.

Отсюда получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x+ih)} F(x+ih)\,dx = \begin{cases} 0 &, t\in(-\infty, 0),\\ f(t), & t\in(0,+\infty),\end{cases}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-ih)} F(x-ih)\,dx = \begin{cases} f(t), & t\in(-\infty, 0),\\ 0 &, t\in(0, +\infty).\end{cases}$$

Складывая эти равенства, получим (4.4).

Интегрированием по частям легко получается

Лемма 13. *Справедливы следующие равенства:*

$$W(e^{-i\lambda_k t} t^{s_k-1}) = \frac{i^{s_k}}{\sqrt{2\pi}} r_k(z) \quad (k=1, 2,\cdots). \tag{4.6}$$

(б) Приведем новое доказательство следующего утверждения, которое, как уже отмечалось во введении, было установлено М. М. Джрбашяном [22, 23] и в специальном случае, когда члены последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ попарно различны (тогда $s_k = 1$, $k > 1$), переходит в результат Н. Винера и Р. Пэли [24].

Теорема В. *Для полноты системы $\{e^{-i\lambda_k t}\, t^{s_k-1}\}_1^\infty$ в пространстве $L_2(e^{-2h|t|}\,dt)$ необходимо и достаточно, чтобы ряд* (1.15) *расходился.*

Доказательство. Поскольку оператор W изометричный, то из леммы 13 следует, что для полноты системы $\{e^{-i\lambda_k t}\, t^{s_k-1}\}_1^\infty$ в пространстве $L_2(e^{-2h|t|}\,dt)$ необходима и достаточна полнота системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в $H_2[S_h^*]$. Остается сослаться на теорему 2.1.

Если ряд (1.15) сходится, то система $\{e^{-i\lambda_k t} t^{s_k-1}\}_1^\infty$ не полна в $L_2(e^{-2h|t|}\,dt)$. При этом условии обозначим через $L_2\{e^{-2h|t|}\,dt;\ \lambda_k\}$ замыкание в метрике $L_2(e^{-2h|t|}\,dt)$ линейной оболочки системы $\{e^{-i\lambda_k t}\, t^{s_k-1}\}_1^\infty$.

Так как оператор W изометричный, то из теоремы 2.2 получаем следующую теорему

Теорема 4.2. *Пусть ряд* (1.15) *сходится. Тогда замыкание в метрике $L_2(e^{-2h|t|}\,dt)$ системы $\{e^{-i\lambda_k t}\, t^{s_k-1}\}_1^\infty$ совпадает с множеством функций $f(t)$, представимых в виде*

$$f(t) = W^{-1}(F)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\partial S_h^*} e^{-i\xi t} F(\xi)\,d\xi,$$

где $F\in H_2\{\lambda_k;\ S_h^*\}$ произвольна, а интеграл понимается в смысле (4.5).

(в) Из приведенных выше соображений и критерия минимальности системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$, легко следует также

Теорема 4.3. *Для минимальности системы* $\{e^{-i\lambda_k t}t^{s_k-1}\}_1^\infty$ *необходима и достаточна сходимость ряда* (1.17).

При условии сходимости ряда (1.17) построим биортогональную с $\{e^{-i\lambda_k t}t^{s_k-1}\}_1^\infty$ систему функций.

Пусть $\Omega_k(z)$ определяется из (2.8). Поскольку $\Omega_k(z)\in H_2[S_h]$, то из теоремы Винера—Пэли легко следует, что

$$\Omega_k(z)=i^{s_k-1}\int_0^{+\infty} e^{-izt}\varphi_k(t)\,dt, \tag{4.7}$$

где $e^{h|t|}\varphi_k(t)\in L_2(-\infty, +\infty)$, причем

$$\varphi_k(t)=\begin{cases}\dfrac{(-i)^{s_k-1}e^{ht}}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,\Omega_k(x-ih)\,dx, & t\in(-\infty, 0),\\[2ex] \dfrac{(-i)^{s_k-1}e^{-ht}}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,\Omega_k(x+ih)\,dx, & t\in(0, +\infty),\end{cases}$$

а интегралы понимаются в смысле сходимости в среднем по метрике L_2. Из (4.7) вытекает, что

$$\Omega_k^{(s_j-1)}(\lambda_j)=(-i)^{s_j-s_k}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda_j t}t^{s_j-1}\varphi_k(t)\,dt,$$

но так как $\Omega_k^{(s_j-1)}(\lambda_j)=\delta_{k,j}$, то получим следующую теорему.

Теорема 4.4. *Пусть ряд* (1.17) *сходится. Тогда системы* $\{e^{-i\lambda_k t}t^{s_k-1}\}_1^\infty$ *и* $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$ *биортогональны в следующем смысле:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda_j t}t^{s_j-1}\varphi_k(t)\,dt=\delta_{k,j}\quad (k,\ j=1,\ 2,\cdots).$$

Из изометричности оператора W, леммы 13 и теоремы 3.2 вытекает следующая

Теорема 4.5. *Справедливы следующие утверждения.*

1°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty\in US(S_h)$, *то система* $\{\lambda_k^p e^{-i\lambda_k t}t^{s_k-1}\}_1^\infty$ *является базисом пространства* $L_2\{e^{-2h|t|}dt;\ \lambda_k\}$, *изоморфным стандартному базису пространства* l_p.

2°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty\overline{\in} US(S_h)$, *то система* $\{e^{-i\lambda_k t}t^{s_k-1}\}_1^\infty$ *ни при какой перестановке членов не является базисом замыкания в метрике* $L_2(e^{-2h|t|}dt)$ *своей линейной оболочки.*

Отметим, что в случае, когда все члены последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ попарно различны (т. е. $s_k=1$, $k\geqslant 1$), критерий базисности системы $\{e^{-i\lambda_k t}\}_1^\infty$ был установлен в работе [27].

Ереванский государственный университет
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 1. II. 1984

Կ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Շերտում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումը և վերլուծությունները ֆունկցիաների որոշ բիօրթոգոնալ համակարգերով *(ամփոփում)*

Աշխատանքը նվիրված է որոշ ռացիոնալ և էքսպոնենցիալ ֆունկցիաների համակարգերի փակույթի, մինիմալության ու բազիսության հարցերին։ Ստացված են այդպիսի համակարգերի լրիվության, մինիմալության ու բազիսության հայտանիշները համապատասխան մետրիկաներում։ Տրված է շերտում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի էֆեկտիվ լուծումը.

K. H. KAZARIAN, V. M. MARTIROSIAN. *Solution of the multiple interpolation problem in the strip and decompositions by biorthogonal systems of functions* (summary)

The problems of closure, minimality and basisness of some systems of rational or exponential functions are investigated. The criteria of completeness, minimality and basisness of such systems in the corresponding metrics are found. An effective solution of the multiple interpolation problem in the class H_p in strip is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$. ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
2. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм.ССР, Математика, IX, № 5, 1974, 339—373.
3. *W. K. Hayman*. Interpolation by bounded functions, Ann. Inst. Fourier (Grenob le) 8, 1959, 277—290.
4. *D. J. Newman*. Interpolation in H^∞, Trans. Amer. Math. Soc., 92, 1959, 501—507.
5. *L. Carleson*. An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
6. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
7. *P. L. Duren*. Theory of H^p-spaces, Ac. Press, New York and London, 1970.
8. *В. П. Кабайла*. Интерполяционные последовательности для классов H^p в случае $p < 1$, Лит. матем. м., III, № 1, 1963, 141—147.
9. *J. Rosenbaum*. Simultaneous interpolation in H_2, II, Pacific J. Math., 27, 1968, 607—610.
10. *J. Rosenbaum*. Simultaneous interpolation in H_2, Michigan Math. J., 14, 1967, 65—70.
11. *B. L. Chalmers*. Some interpolation probbem in Hilbert spaces, Michigan Math. J., 18, 1971, 41—49.
12. *В. М. Мартиросян*. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
13. *Г. М. Айрапетян*. О базисности некоторых биорготогональных систем в комплексной области, Изв. АН Арм.ССР, Математика, X, № 2, 1975, 133—152.
14. *Ф. А. Шамоян*. Теоремы вложения, связанные с задачей кратного интерполирования в пространствах H_p, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XI, № 2, 1976, 124—131.
15. *В. М. Мартиросян*. Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм.ССР, 63, № 5, 1976, 278—283.
16. *М. М. Джрбашян*. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H_p в полуплоскости, ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 517—520; Изв. АН СССР, сер. матем., 43, № 6, 1973, 1322—1384.
17. *Г. М. Айрапетян*. Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах H_p Харди, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XII, № 4, 1977, 262—277.

18. *А. М. Джрбашян*. Кратная интерполяция в классах H^p $0 < p \leqslant +\infty$. ДАН СССР, 234, № 6, 1977, 1253—1256.
19. *Ш. А. Григорян*. Об одном свойство функций из H^p $(0 < p < +\infty)$. Изв. АН Арм.ССР, Математика, XII, № 5, 1977, 335—340.
20. *В. М. Мартиросян*. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в H_p $[\alpha; \omega]$. ДАН СССР, 245, № 1, 1979, 24—27.
21. *В. М. Мартиросян*. Эффективное решение задачи кратной интерполяции в H^∞ применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XVI, № 5, 1981, 339—357; ДАН СССР, 263, № 4, 1982, 805—808.
22. *М.М. Джрбашян*. Об интегральном представлении некоторых ортогональных систем, ДАН Арм.ССР, 35, № 1, 1962, 1—5.
23. *М. М. Джрбашян*. Представление и замкнутость некоторых ортогональных систем, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XIV, № 6, 1979, 446—493.
24. *Н. Винер, Р. Пэли*. Преобразование Фурье в комплексной области, «Наука», М., 1964.
25. *М. М. Джрбашян*. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460, Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
26. *С. А. Акопян*. Теорема о двух постоянных для функций класса H_p, Изв. АН Арм.ССР, Математика, II, № 2, 1967, 123—127.
27. *А. М. Седлецкий*. Эквивалентное определение пространств H_p в полуплоскости и некоторые приложения, Матем. сб., 96 (138), № 1, 1975, 75—82.
28. *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
29. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, Математика, VIII, № 1, 1973, 384—409.
30. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси, Матем. сб., 95 (137), № 3 (11), 1974, 418—444.
31. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев*. Элементы функционального анализа, Наука, М., 1965.
32. *С. А. Виноградов*. Базисы из показательных функций и свободная интерполяция в банаховых пространствах с L_p-нормой. Записки научных семинаров ЛОМИ, том 65, вып. VII, 1976, 17—68.