ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XX, № 3, 1985 Математика

УДК 517.983

В. Г. ДЕПЧ

ВОЗМУЩЕНИЯ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ФОРМ В ЗАДАЧАХ СТАБИЛИЗАЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Введение

Одно из центральных мест в теории управления линейными конечномерными системами [1] занимает задача стабилизации и двойственная ей задача детектирования. Пусть H, U, Z — конечномерные линейные пространства, $A \in \mathbf{L}(H, H)$, $B \in \mathbf{L}(U, H)$, $C \in \mathbf{L}(H, Z)$ — линейные операторы. Пара (A, B) (пара (C, A)) называется стабилизируемой (детектируемой) если существует оператор $K \in \mathbf{L}(H, U)$ ($D \in \mathbf{L}(Z, H)$) такой, что оператор $A+BK$ ($A+DC$) устойчив, т. е. не имеет собственных значений в замкнутой правой полуплоскости $\mathbf{C}^+$.

При перенесении этих понятий на бесконечномерный случай [2] трудности часто возникают уже в постановке задачи. Так, если A — генератор $\mathbf{G}$-полугруппы, а B действует в пространство, более широкое, чем H (C неограничен и, вообще говоря, незамыкаем), то возникает вопрос о корректном определении оператора $A+BK$ ($A+DC$) как генератора $\mathbf{G}_0$-полугруппы. Описанная ситуация является абстрактной версией задачи граничного управления (наблюдения) для уравнений с частными производными [3].

В настоящей работе предлагается «правильное» обобщение понятий и дается критерий стабилизируемости (детектируемости) при граничных управлениях (наблюдениях) на случай, когда A — эллиптический оператор в ограниченной области. Различные попытки сформулировать постановку и дать решение этой задачи имеются в работах [2, 4—6]. Мы покажем, что аппаратом, адекватным поставленной задаче, является теория возмущений секториальных форм [7]. Помимо удобного определения оператора $A+BK$ ($A+DC$) как форм-суммы, эта техника позволяет дать простые признаки сходимости различных аппроксимаций в задачах стабилизации (детектирования). В частности, аппроксимация «граничных» управлений «распределенными», т. е. аппроксимация B операторами, область значений которых лежит в H, позволяет свести доказательство основного результата — критерия стабилизируемости — к известному. В приложениях [8, 9] возникает и противоположная задача аппроксимации распределенных управлений (наблюдений) сосредоточенными, которая также легко решается с помощью техники форм.

§ 2. Класс возмущений генераторов голоморфных полугрупп

Пусть $V \subset H \subset V'$ — тройка комплексных гильбертовых пространств, где V' — антидвойственно к V относительно формы $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, порожденной скалярным произведением $(\cdot\,, \cdot)$ в H. Нормы в V и H обозначим через $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_0$ соответственно. Вложения будем предполагать плотными и компактными. Пусть $a[\cdot\,, \cdot]$ — полуторалинейная непрерывная форма на $V \times V$, такая, что при некоторых $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, $c > 0$

$$\operatorname{Re} a[y, y] + \lambda_0 |y|_0^2 \geqslant c\,|y|_1^2 \tag{1}$$

для всех $y \in V$. Форма $a[\cdot, \cdot]$ определяет ограниченный линейный оператор $\tilde{A}: V \to V'$ ($\tilde{A} \in \mathbf{L}(V, V')$) такой, что*

$$a[\varphi, \psi] = -\langle \tilde{A}\varphi, \psi \rangle \tag{2}$$

для всех $\{\varphi, \psi\} \in V \times V$. Нам понадобится следующий результат [3] относительно эволюционной задачи

$$\dot{y}(t) = \tilde{A}\,y(t) + f(t), \quad y(0) = y_0 \in H, \tag{3}$$

связанной с оператором $\tilde{A}$. Пусть $W(0, T)$, $T < \infty$ — пространство вектор-функций $y(\cdot) \in L^2(0, T; V)$, имеющих обобщенную производную $\dot{y}(\cdot) \in L^2(0, T; V')$, снабженное нормой

$$\|y\|_W^2 = \|y\|_{L^2(0,\,T;\,V')}^2 + \|\dot{y}\|_{L^2(0,\,T;\,V')}^2.$$

Пусть $f(\cdot) \in L^2(0, T; V)$. Тогда существует единственная функция $y(\cdot) \in W(0, T)$, удовлетворяющая (3). Отметим, что начальное условие в (3) имеет смысл благодаря тому [3], что функции из $W(0, T)$ непрерывны на интервале $[0, T]$ по норме H.

Определим теперь (неограниченный) оператор A в H как сужение $\tilde{A}$ на $D(A) = \{y \in V, \tilde{A}y \in H\}$. Оператор A является [7] m-секториальным оператором, ассоциированным с замкнутой секториальной формой $a[\cdot, \cdot]$. Оператор A порождает голоморфную полугруппу $\exp(At)$ ограниченных операторов в H. Нетрудно показать, что при $f \equiv 0$ в (3) функция $y(t) = \exp(At)\,y_0$ является решением (3) в указанном выше смысле.

Используемые в дальнейшем свойства оператора A перечислены в следующей лемме.

Лемма 1. а) *Резольвента оператора A — компактный оператор;*

б) *спектр $\sigma(A)$ содержится в некотором секторе*

$$\left\{z : \arg(z - \lambda_0) \geqslant \theta > \frac{\pi}{2}\right\};$$

---

* «Знак «—» введен с тем, чтобы избежать в дальнейшем расхождений с терминологией теории устойчивости.

в) *спектральный проектор* P, *отвечающий части* $\sigma_+(A) = \sigma(A) \cap \mathbf{C}^+$ *спектра* A *в замкнутой правой полуплоскости, конечномерен. Оператор* P *можно продолжить по непрерывности до отображения* $P \in \mathbf{L}(V', V)$;

г) *утверждения* а)—в) *остаются в силе при замене* A *на* A^*.

Доказательство. Свойство а) является следствием компактности вложения $V \subset H$, утверждение б)—хорошо известное [7] свойство m-секториальных операторов. Из а), б) следует, что $\sigma_+(A)$ — конечное множество. Пусть γ — замкнутый контур, такой, что $\sigma_+(A)$ лежит во внутренней, а $\sigma(A) \setminus \sigma_+(A)$ — во внешней по отношению к γ областях. Из представления Рисса

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (A - z)^{-1}\, dz$$

вытекает, что P — компактный и, следовательно, конечномерный проектор. Покажем, что при $z \overline{\in} \sigma(A)$ оператор $(A - z)^{-1}$ допускает продолжение по непрерывности до отображения $(\tilde{A} - z)^{-1} \in \mathbf{L}(V', V)$, что влечет аналогичное свойство оператора P. По определению оператор $\tilde{A}$ есть расширение A по непрерывности. Из (1) вытекает, что при $\lambda > \lambda_0$ оператор $\tilde{A} - \lambda$ ограниченно обратим. Следовательно, при $\lambda > \lambda_0$ оператор $(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \in \mathbf{L}(V', V)$ является расширением по непрерывности оператора $(A - \lambda)^{-1} \in \mathbf{L}(H, V)$. Тождество Гильберта показывает, что это утверждение сохраняет силу для произвольных $z \overline{\in} \sigma(A)$.

Наконец, утверждение г) является следствием того, что оператор $(-A^*)$ ассоциирован с формой $\overline{a[\cdot, \cdot]}$, комплексно сопряженной с $a[\cdot, \cdot]$.

Пусть X — некоторое гильбертово пространство, $M \in \mathbf{L}(V, X)$, $N \in \mathbf{L}(X, V')$. Покажем, что несмотря на то, что оператор $A + NM$ не имеет смысла как обычная сумма операторов, при некотором дополнительном предположении он может быть определен как форм-сумма.

Непрерывную полуторалинейную форму q на $V \times V$ будем называть V-малой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $c(\varepsilon) \geqslant 0$ такое, что для всех $\varphi \in V$

$$|q[\varphi, \varphi]| \leqslant \varepsilon |\varphi|_1^2 + c(\varepsilon) |\varphi|_0^2. \tag{4}$$

Следующее утверждение является простым следствием теории возмущений секториальных форм [7].

Теорема 1. *Пусть тройка* A, N, M *такова, что форма* $q[\varphi, \psi] \equiv (M\varphi, N^*\psi)_X$ *является* V-*малой. Тогда форма* $a_1[\varphi, \psi] = a[\varphi, \psi] - q[\varphi, \psi]$ — *замкнутая секториальная в* H *с областью определения* $V \times V$. *Если* $(-A_1)$ — *ассоциированный с ней оператор, то все утверждения леммы* 1 *сохраняют силу при замене* A *на* A_1.

Мы будем пользоваться обозначением $A_1 = A + NM$, чтобы подчеркнуть отличие A_1 от обычной суммы операторов.

В приложениях удобен следующий признак V-малости формы $q[\varphi, \psi] = (M\varphi, N^*\psi)_X$.

Лемма 2. *Предположим, что по крайней мере один из операторов M, N^* допускает продолжение по непрерывности до оператора из $\mathbf{L}(H, X)$ или может быть представлен как предел таких операторов по норме $\mathbf{L}(V, X)$. Тогда форма $q[\varphi, \psi] = (M\varphi, N^*\psi)_X$ является V-малой.*

Доказательство. Пусть для определенности предположение леммы выполнено для оператора M, т. е. существует последовательность $M_n \in \mathbf{L}(H, X)$, такая, что $M_n \to M$ по норме $\mathbf{L}(V, X)$. Тогда для всех $\varphi \in V$

$$|M\varphi|_X \leqslant |(M - M_n)\varphi|_X + |M_n\varphi|_X \leqslant \varepsilon_n |\varphi|_1 + c_n |\varphi|_0,$$

где ε_n — норма $M - M_n$ в $\mathbf{L}(V, X)$, c_n — норма M_n в $\mathbf{L}(H, X)$. Поэтому, если $|N^*\psi|_X \leqslant c|\psi|_1$, то

$$|q[\psi, \varphi]| \leqslant c(\varepsilon_n |\varphi|_1 + c_n |\varphi|_0)|\varphi|_1. \tag{5}$$

Зафиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, выберем n из условия $c\varepsilon_n < \varepsilon/2$. Тогда, пользуясь неравенством $cc_n |\varphi|_0 |\varphi|_1 \leqslant \varepsilon/2 |\varphi|_1^2 + (cc_n)^2 |\varphi|_0^2/2\varepsilon$ найдем, что из (5) следует (4).

Замечание 1. В условиях, когда вложение $V \subset H$ компактно, нетрудно показать, что предположение леммы 2 относительно оператора $M(N)$ эквивалентно компактности $M(N)$.

§ 3. Стабилизируемость и детектируемость

Рассматриваемый в настоящей работе класс генераторов голоморфных полугрупп с компактной резольвентой обладает (см., например, [2]) свойством, хорошо известным в конечномерном случае: необходимым и достаточным для экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения $\dot{y} = A_1 y$ является условие $\sigma_+(A_1) = \varnothing$. Это обстоятельство приводит к целесообразности следующих определений. Пусть $U(Z)$ — гильбертово пространство управлений (наблюдений).

Пара (A, B), $B \in \mathbf{L}(U, V')$ называется стабилизируемой, если найдется оператор $K \in \mathbf{L}(V, U)$ такой, что для тройки (A, B, K) выполнены условия теоремы 1 и оператор $A + BK$ устойчив: $\sigma_+(A + BK) = \varnothing$.

Пара (C, A), $C \in \mathbf{L}(V, Z)$ называется детектируемой, если найдется оператор $D \in \mathbf{L}(Z, V')$ такой, что для тройки (A, D, C) выполнены условия теоремы 1 и оператор $A + DC$ устойчив.

Как и в конечномерном случае, справедлива теорема двойственности.

Теорема 2. *Пара (C, A) детектируема тогда и только тогда, когда пара (A^*, C^*) стабилизируема.*

Доказательство. Утверждение немедленно следует из того, что поскольку $q[\varphi, \psi] = (C\varphi, D^*\psi)_Z = (D^*\psi, C\varphi)_Z$, операторы $A + DC$ и $A^* + C^*D^*$ определены одновременно и являются взаимно сопряженными.

Следующая теорема об аппроксимации используется при доказательстве основного результата — критерия стабилизируемости. Кроме того, она представляет самостоятельный интерес для приложений.

Теорема 3. *Пусть $B_n \in \mathbf{L}(U, V')$ и $K_n \in \mathbf{L}(V, U)$, $n = 1, 2, \cdots$, сходятся по норме при $n \to \infty$ к B и K, соответственно. Предпо-*

ложим, что для тройки (A, B_n, K_n), $n=1, 2, \cdots$, *выполнены условия теоремы* 1. *Тогда эти условия выполнены и для тройки* (A, B, K). *Оператор* $A+BK$ *устойчив в том и только в том случае, когда существуют* n_0 *и* $\varkappa>0$ *такие, что* $A+B_n K_n+\varkappa$ *устойчив при* $n \geqslant n_0$.

Доказательство теоремы 3 вытекает из того, что ее условия обеспечивают равномерную сходимость резольвент операторов $A+B_n K_n$ к резольвенте $A+BK$ ([7], теорема VI. 3. 6), что в свою очередь влечет сходимость спектров ([7], по IV. 3. 5).

Чтобы сформулировать критерий стабилизируемости пары A, B положим $H_+=PH$, $A_+=PA=AP$, $B_+=\tilde{P}B$. Согласно лемме 1 (пункт в)) $B_+ \in \mathrm{L}(U, V)$. Пусть $U_+=R(B^*P)$. Тогда $\dim U_+<\infty$. Будем рассматривать A_+ в H_+ и B_+ в U_+ как пару конечномерных операторов.

Теорема 4. *Для стабилизируемости пары* (A, B) *необходима и достаточна стабилизируемость пары* (A_+, B_+). *При этом, если* $K_+ \in \mathrm{L}(H_+, U_+)$ *таков, что* $A_+ + B_+ K_+$ *устойчив, то* $A+BK$, *где* $K=K_+$ *на* H_+, $K(I-P)=0$, *также устойчив.*

Отметим, что при таком определении $K \in \mathrm{L}(H, U)$. Это в соответствии с лемой 2 обеспечивает корректность определения $A+BK$.

Доказательство. Чтобы доказать необходимость мы установим, что при нарушении условий теоремы система управления

$$\dot{y}(t)=\tilde{A}y(t)+Bu(t),\ y(0)=y_0 \in H, \tag{6}$$

(ср. (3)) имеет решение $y(t)$, не сходящееся к нулю при $t \to \infty$, каким бы ни было управление $u(\cdot) \in L^2(0, \infty; U)$, и покажем, что это противоречит стабилизируемости пары (A, B).

Итак, допустим, что пара (A_+, B_+) не стабилизируема. Согласно [1] это означает, что наименьшее подпространство, содержащее $R(B_+)$ и инвариантное относительно A_+, которое мы, следуя [1], обозначим $\langle A_+|B_+\rangle$, не совпадает с H_+. Для вектора $y_0 \in H_+$, ортогонального $\langle A_+|B_+\rangle$, $(\exp(A_+ t) B_+ u, y_0)=0$ для всех $u \in U$ и всех $t \geqslant 0$. Пусть $y(t)$ — решение (6) с указанным начальным значением и произвольным $u(\cdot) \in L^2(0, \infty, U)$. Его проекция $v(t)=Py(t)$ дифференцируема в обычном смысле, причем $\dot{v}(t)=\tilde{P}\dot{y}(t)$. Поэтому применив к обеим частям (6) проектор $\tilde{P}$, получим линейную конечномерную систему

$$\dot{v}(t)=A_+ v(t)+B_+ u(t),\ v(0)=y_0.$$

Записав ее решение в виде

$$v(t)=e^{A_+ t} y_0+\int_0^t e^{A_+(t-\tau)} B_+ u(\tau)\, d\tau$$

и составив скалярное произведение $(v(t), y_0)$, убедимся, что оно совпадает с $(\exp(A_+ t) y_0, y_0)$. Поскольку спектр A_+ лежит в правой полуплоскости, последняя величина не сходится к нулю при $t \to \infty$.

Следовательно, $y(t)$ не сходится к нулю при $t \to \infty$ какой бы ни была функция $u(\cdot) \in L^2(0, \infty, U)$. Предположим теперь, что пара (A, B) стабилизируема. Пусть $K \in \mathrm{L}(V, U)$ таков, что $A \dot{+} BK$ устойчив. Тогда $y(t) = \exp((A \dot{+} BK)t)\, y_0$ при $t \to \infty$ экспоненциально стремится к нулю. Но в соответствии с § 2, нетрудно показать, что $y(t)$ есть решение (6) при $u(t) = Ky(t)$ и по доказанному не сходится к нулю, Полученное противоречие доказывает необходимость условия стабилизируемости пары (A_+, B_+).

Для доказательства достаточности рассмотрим оператор $A \dot{+} BK$ при специальном выборе K, участвующем в формулировке теоремы. Заметим, что поскольку $R(K) \subseteq U_+$, мы можем считать пространство U и оператор $B \in \mathrm{L}(U, V')$ конечномерными, так как в противном случае можно заменить U на U_+, не изменив при этом оператор $A \dot{+} BK$. Таким образом, B может быть представлен в виде $Bu = \sum_1^m (u, \omega_l)_U\, b_l$, где $\{\omega_l\}_1^m \subset U$ — некоторый ортонормированный базис, $b_l \in V'$. В силу плотности вложения $H \subset V'$ можно построить последовательность $b_l^{(n)} \in H$, сходящуюся к b_l в V' при $n \to \infty$. Тогда последовательность операторов $\widehat{B}_n$, $\widehat{B}_n u = \sum_1^n (u, \omega_\cdot)\, b_l^{(n)}$, $\widehat{B}_n \in \mathrm{L}(U, H)$ сходится к B в $\mathrm{L}(U, V')$. Положим $B_n = B_+ + (I - P)\widehat{B}_n$. Тогда $B_n \to B$ в $\mathrm{L}(U, V')$, $PB_n = B_+$. Поскольку $B_n \in \mathrm{L}(U, H)$, известные (см., например, [2]) результаты позволяют утверждать, что операторы $A + B_n K$ (сумма обычная!) — устойчивы, причем спектр $A + B_n K$ является объединением $\sigma(A) \setminus \sigma_+(A)$ и $\sigma(A_+ + B_+ K_+)$. Поэтому существует $\varkappa > 0$ такое, что операторы A_+, $B_n K + \varkappa$ устойчивы. Для завершения доказательства остается применить теорему 3.

Теорема 4 сводит вопрос о стабилизируемости к изучению конечномерной пары (A_+, B_+), которое можно провести выбрав базисы в H_+, U_+ и записав A_+, B_+ в виде матриц. Особенно просто условия стабилизируемости выглядят, если оператор A_+ диагонализуем (например, если $A = A^*$ или подобен самосопряженному).

Пусть $H_\lambda \subset H_+$ — собственное подпространство A, отвечающее собственному значению $\lambda \in \sigma_+(A)$, $r_\lambda = \dim H_\lambda$. Тогда $\bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$, причем $\dim H_{\bar{\lambda}}^* = r_\lambda$, где $H_{\bar{\lambda}}^*$ — собственное подпространство A^*, отвечающее $\bar{\lambda}$. Выберем в $H_{\bar{\lambda}}^*$ какой-либо базис $\psi_1^*, \cdots, \psi_{r_\lambda}^*$.

Теорема 5. *Пусть A_+ диагонализуем,* $\dim U = m < \infty$, $Bu = \sum_1^m (u, \omega_l)\, b_l$, *где $b_l \in V'$, $\{\omega_l\}_1^m$ — некоторый базис. Пара (A, B) стабилизируема тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \sigma_+(A)$ ранг матрицы*

$$W_\lambda = \begin{Bmatrix} \langle b_1, \psi_1^* \rangle & \langle b_1, \psi_2^* \rangle & \cdots & \langle b_1, \psi_{r_\lambda}^* \rangle \\ \langle b_2, \psi_1^* \rangle & & \cdots & \langle b_2, \psi_{r_\lambda}^* \rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle b_m, \psi_1^* \rangle & & \cdots & \langle b_m, \psi_{r_\lambda}^* \rangle \end{Bmatrix} \tag{7}$$

равен r_λ.

Доказательство. Пусть P_λ — проектор на H_λ. Тогда, очевидно, $P_\lambda B_+ = P_\lambda \bar{P}B \equiv \tilde{P}_\lambda B$. Для того, чтобы $\langle A_+|B_+\rangle = H_+$ необходимо и достаточно, чтобы $R(\tilde{P}_\lambda B) = H_\lambda$. Последнее условие эквивалентно тому, что линейная оболочка векторов $\tilde{P}_\lambda b_l$ совпадает с H_λ, что в свою очередь выполнено в том и только том случае, когда ранг матрицы $(\tilde{P}_\lambda b_l, \psi_k)$ $i=1,\cdots,m$; $k=1,\cdots,r_\lambda$ равен r_λ для некоторого (и, как следствие, для любого) базиса $\{\psi_k\}$ в H_λ. Но легко видеть, что $\{\psi_k\}$ — базис в H_λ тогда и только тогда, когда $\{P_\lambda^* \psi_k\}$ — базис в H_λ^*. Следовательно, ранг матрицы $\{(\tilde{P}_\lambda b_l, \psi_k)\}$ совпадает с рангом $\{\langle b_l, \psi_k^*\rangle\}$, где $\{\psi_k^*\}$ — любой базис в H_λ^*.

Объединяя теорему 5 с теоремой 2, придем к следующему результату.

Теорема 6. *Пусть A_+ диагонализуем,* $\dim Z = m < \infty$, $(Cy)_j = \langle c_j, y\rangle$, $y \in V$, $c_j \in V'$, $j=1, 2,\cdots, m$. *Пара (C, A) детектируема в том и только том случае, когда для всех $\lambda \in \sigma_+(A)$ ранг матрицы*

$$W_\lambda = \begin{pmatrix} \langle c_1, \psi_1\rangle & \cdots & \langle c_1, \psi_{r_\lambda}\rangle \\ \langle c_2, \psi_1\rangle & \cdots & \langle c_2, \psi_{r_\lambda}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle c_m, \psi_1\rangle & \cdots & \langle c_m, \psi_{r_\lambda}\rangle \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{r_\lambda}$ — какой-либо базис в H_λ, равен r_λ.

§ 4. Примеры приложения абстрактной схемы

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ, $H = L^2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$,

$$a[\varphi, \psi] = \int_\Omega (\nabla\varphi' a(x) \overline{\nabla\varphi} + q(x)\varphi\bar{\psi})dx + \int_\Gamma \alpha(x)\varphi\bar{\psi}\, dS, \tag{9}$$

где $\mu_1 \xi'\bar{\xi} \leqslant \xi' a(x)\bar{\xi} \leqslant \mu_2 \xi'\bar{\xi}$, $\mu_2 \geqslant \mu_1 > 0$ для всех $\xi \in \mathbf{C}^n$, $q(x)$ и $\alpha(x)$ — вещественные ограниченные функции. Если Γ удовлетворяет предположениям теорем вложения [10], то для формы (9) выполнено условие (1), а оператор B, $B: U = \mathbf{C}^m \to V'$, определенный как

$$\langle Bu, \varphi\rangle = \sum_{l=1}^m u_l \int_\Gamma b_l(x)\varphi(x)\, dS \equiv \sum_{l=1}^m u_l \langle b_l, \varphi\rangle, \tag{10}$$

где $\varphi \in V$, $b_l(\cdot) \in L^2(\Gamma)$, ограничен. С парой A, B связана следующая задача граничного управления:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \nabla'(a(x)\nabla y) - q(x)y, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} + \alpha(x)y\Big|_\Gamma = \sum_{l=1}^m u_l b_l(x). \tag{11}$$

Таким образом, применение теоремы 5 дает критерий стабилизируемости с помощью управлений, входящих в третье краевое условие (при $\alpha(x) =$

$= 0$ — в условие Неймана). Именно, для стабилизируемости необходимо и достаточно, чтобы число управлений m было не меньше $\max r_i$, $\lambda \in \sigma_+(A)$ и чтобы ранг матриц (7) (где ввиду самосопряженности ψ_k^* совпадают с ψ_k) был максимальным. Отметим, что задача стабилизации параболического уравнения (11) рассматривалась в [6], а соответствующая задача детектирования (при $C = B^*$) в [4, 5]. В нашей схеме все результаты этих работ прямо вытекают из абстрактных построений.

Наш второй пример — точная постановка и строгое решение задачи о стабилизации распределенного химического реактора с помощью сосредоточенных систем управления, рассмотренной в [8, 9] на эвристическом уровне.

Пусть $H = L^2(0, 1; \mathbf{C}^n)$ — пространство n-компонентных вектор-функций на промежутке $[0,1]$. Аналогичным образом, $V = W_2^1(0,1; \mathbf{C}^n)$. Пусть $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — непрерывные $n \times n$ — матрицы-функции, $x \in [0,1]$, причем $p(x)$ — непрерывно дифференцируема и положительно определена: $\xi' p(x) \bar{\xi} \geqslant \mu \xi' \bar{\xi}$. Положим

$$a[\varphi, \psi] = \int_0^1 \left(\frac{d\varphi'}{dx} p(x) \frac{d\bar{\psi}}{dx} - \frac{d\varphi'}{dx} r(x) \bar{\psi} - \varphi' q(x) \bar{\psi} \right) dx +$$

$$+ \alpha_0 \varphi'(0) \bar{\psi}(0) + \alpha_1 \varphi'(1) \overline{\psi(1)} + \beta \varphi'(1) \overline{\psi(0)}, \tag{12}$$

где α_0, α_1, β — постоянные $n \times n$-матрицы. Нетрудно проверить справедливость (1). Оператор A, ассоциированный с формой (12), определен на функциях $y \in W_2^2(0, 1; \mathbf{C}^n)$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$-p(0) \frac{dy}{dx}(0) + \alpha_0 y(0) + \beta y(1) = 0, \tag{13}$$

$$p(1) \frac{dy}{dx}(1) + \alpha_1 y(1) = 0 \tag{14}$$

и действует по формуле

$$Ay = \frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + r(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y. \tag{15}$$

Отметим, что слагаемое $\beta y(1)$ в (13) отвечает случаю рециркуляции в реакторе [9]. При этом, однако, в отличие от [9], в настоящей работе не учитываем запаздывание в контуре рециркуляции.

Пусть $U = \mathbf{C}^m$, $Bu = \sum_1^m u_l b_l$, где $b_l(\cdot) \in V' = W_2^{-1}(0, 1; \mathbf{C}^n)$. Последнее пространство содержит как „обычные", так и обобщенные функции и, в частности, дельта-функции $\delta(x - \xi)$, сосредоточенные в точках $\xi \in [0,1]$. Если $b_l(\cdot) \in L^2(0,1; \mathbf{C}^n)$, управление u_l будем называть распределенным, а если $b_l(x) = b_l \delta(x - x_l)$, где $b_l \in \mathbf{C}^n$, $x_l \in [0,1]$ — сосредоточенным. Пусть u_i, $i = 1, 2, \cdots, l$ — распределенные, u_j, $j = l+1, \cdots, m$ — сосредоточенные управления. Можно показать, что решение уравнения (3) в рассматриваемом случае сводится к решению следующей начально-краевой задачи

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)+r(x)\frac{\partial y}{\partial x}+q(x)y+\sum_{i=1}^{l}u_i b_i(x), \tag{16}$$

$$y(x,0)=y_0(x), \tag{17}$$

$$p(x_j)\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x_j^+,t)-\frac{\partial y}{\partial x}(x_j^+,t)\right)=u_j(t)\,b_j,\ j=l+1,\cdots,m, \tag{18}$$

причем, если ни одна из точек x_j, $j=l+1,\cdots,m$ не совпадает с 0 или 1, то дополнительно выполняются условия (13), (14), а если, например, $x_s=0$, $s\in\{l+1,\cdots,m\}$, то вместо условия (18) с $j=s$ и (13) выполняется неоднородное краевое условие

$$-p(0)\frac{\partial y}{\partial x}(0,t)+\alpha_0 y(0,t)+\beta y(1,t)=b_s u_s(t). \tag{19}$$

Таким образом, рассматриваемая схема включает также и случай граничного упрзвления.

Аналогичным образом, если оператор наблюдения $C\colon V\to Z=\mathbf{C}^N$ определен как $(Cy)_j=\langle c_j, y\rangle$, $j=1,\cdots,N$, то будем называть s-е наблюдение распределенным, если $c_s(\cdot)\in L^2$ и сосредоточенным, если $c_s(x)=c_s\delta(x-x_s)$, $c_s\in\mathbf{C}$. Задачу стабилизации с помощью сосредоточенной системы управления можно теперь понимать следующим образом: для заданного оператора B построить оператор сосредоточенного наблюдения $C_N\colon V\to\mathbf{C}^N$ и конечномерный линейный оператор $L_N\colon\mathbf{C}^N\to U=\mathbf{C}^m$ так, чтобы оператор $A+BK_N$, $K_N=L_N C_N$ был устойчив.

Отметим, что корректность определения оператора $A+BK_N$ вытекает из леммы 2 и замечания 1, поскольку $\dim U=m<\infty$.

Рассмотрим вначале частный случай $n=m=1$, $\beta=0$, изучавшийся в [8]. Управление будем считать граничным: $Bu=u\delta(x)$. Оператор A в скалярном случае подобен $A^*\colon A=\Phi A^*\Phi^{-1}$, где Φ — оператор умножения на функцию $\exp\left(-\int r(x)/p(x)\,dx\right)$. Поэтому собственные значения А вещественные. Легко видеть также, что в скалярном случае они простые: $r_\lambda=1$. Таким образом, (7) сводится к условию $\psi_\lambda^*(0)\neq 0$, где ψ_λ^* — собственные функции A^*, отвечающие собственным числам $\lambda>0$. Но поскольку $\psi_\lambda^*=\Phi\psi_\lambda$, где ψ_λ — собственные функции A, условие $\psi_\lambda^*(0)\neq 0$ эквивалентно условию $\psi_\lambda(0)\neq 0$, которое легко вытекает из (13). Таким образом, рассматриваемая система стабилизируема, причем согласно теореме 4 существует стабилизирующая обратная связь вида

$$u=Ky=\int_0^1 k(x)\,y(x)\,dx, \tag{20}$$

где функция $k(x)$ — некоторая линейная комбинация собственных функций $\psi_\lambda^*(x)$, отвечающих неотрицательным собственным значениям λ. По условию, однако, наблюдается не все состояние $y(x)$, а лишь значения $y(x_j)$, $j=1,\cdots,N$. Из теории квадратурных формул [11], изве-

стно, что при соответствующем выборе „узлов“ x_j интеграл (20) может быть аппроксимирован суммами вида

$$K_N y = L_N C_N y = \sum_{j=1}^{N} c_j k(x_j) y(x_j) \tag{21}$$

таким образом, что $|Ky - K_N y| \leqslant \varepsilon |y|_1$, где $\varepsilon \to 0$ при $N \to \infty$. Существование стабилизирующей обратной связи требуемого вида вытекает теперь из теоремы 3.

Сделаем теперь замечание по поводу изучавшейся в [9] задачи стабилизации системы уравнений ($n > 1$). В отличие от скалярного ($n = 1$) случая здесь нетрудно построить примеры, когда оператор A (13)—(15) имеет в правой полуплоскости $\mathbf{C}^+$ кратные собственные значения. Теорема 5 показывает, что в этом случае объект не может быть стабилизирован, если имеется лишь одно ($m = 1$) управляющее воздействие. Не меняет дела и использование динамической обратной связи. Поэтому результат [9] не может быть справедлив без дополнительных ограничений. Применение теорем 3—6 позволяет проверить разрешимость задачи и получить ее решение аналогично случаю $n = 1$.

Ленинградский горный институт
им. Г. В. Плеханова

Поступила 12. IV. 1983

Վ. Գ. ԴԻՅՉ. Սեկտորիալ ձևերի գրգռումները էլիպտական օպերատորների կայունացման խնդիրներում *(ամփոփում)*

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ սեկտորիալ ձևերի տեսությունը հանդիսանում է եզրային կառավարման ու դիտման ժամանակ էլիպտական օպերատորների կայունացման խնդիրների լուծման ու լուծելու համար ադեկվատ ապարատ։ Այդպիսի ձևերի գրգռման վերաբերյալ թեորեմները թույլ են տալիս ստանալ կայունացման խնդիրներում տարբեր մոտավորությունների զուգամիտության հայտանիշներ։ Դա հնարավորություն է տալիս եզրային կառավարումների դեպքում կայունացման հայտանիշի ապացույցը բերել բաշխված կառավարումների վերաբերյալ հայտնի դեպքին։ Մյուս կողմից, միաչափ խնդիրներում ապացուցված է կայունացման հնարավորությունը օգտագործելով միայն կենտրոնացված կառավարումները ու դիտումները։

V. G. DEICH. *Perturbation of the sectorial forms in stabilization problems for elliptic operators* (summary)

We show that the theory of sectorial forms yields a natural technique for the stabilization problems of elliptic operators with the boundary control and observation gives. A theorem about the perturbations of such a form allows to get criteria of the convergence of certain approximation in stabilization problems. This enables to reduce the problem of the boundary stabilizability to the case of distributed control. On the other hand, for one-dimensional operators we demonstrate the possibility of stabilization by means of localized control and observation only.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Уонэм.* Линейные многомерные системы управления, М., «Наука», 1980.
2. *R. Curtain, A. Pritchard.* Infinite dimensional linear control systems, Springer, 1978.
3. *Ж. Л. Лионс.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, М., «Мир», 1972.
4. *T. Nambu.* Feedback stabilization for distributed parameter systems of parabolic type, Journ. diff, eq-s, 33, 1979, 167—188.

5. *R. Triggiani.* On Nambu's boundary stabilazability for diffusion processes, Journ diff eq-s, 33, 1979, 189—200.
6. *R. Triggiani.* Boundaryfeedback stabilization of parabolic equations, Appl. Math. Optimiz., 6:3, 1980, 201—220.
7. *Т. Като.* Теория возмущений линейных операторов, М., «Мир», 1972.
8. *В. А. Бучин.* Стабилизация неустойчивого режима работы химического реактора как объекта с распределенными параметрами с помощью сосредоточенных систем управления, Изв. АН СССР, сер. МЖГ, № 6, 1974, 4—16.
9. *В. А. Бучин.* Стабилизация неустойчивого режима работы химического реактора с рециклом как объекта с распределенными параметрами посредством сосредоточенных систем управления, Изв. АН СССР, сер. МЖГ, № 3, 1981, 11—24.
10. *С. Л. Соболев.* Некоторые приложения функционального анализа в математической физике, Л., Изд. ЛГУ, 1950.
11. *С. М. Никольский.* Квадратурные формулы, М., «Наука», 1978.