ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 3, 1985 Математика

УДК 517.956

А. А. ДАВТЯН

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЕМИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА—ЛИУВИЛЛЯ С КВАЗИОДНОРОДНОЙ НОРМОЙ

Пусть R^n — евклидово пространство точек $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $r=(r_1,\cdots,r_n)$ — произвольный вектор, компоненты которого либо все положительны, либо все отрицательны; $\frac{1}{r^*}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}$, $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, где $\lambda_j=\frac{r^*}{r_j}$, $j=1,\cdots,n$. Если γ — вектор с положительными компонентами, положим $(\gamma,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\lambda_i$, $|\gamma|=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$. Пусть $P_\lambda^k=\left\{p(x)=\sum_{(\alpha,\lambda)\leq k}c_\alpha x^\alpha\right\}$ $k\geqslant 0$. Через $\rho(x)$ будем обозначать положительную при $x\neq 0$ функцию, заданную неявно равенством (см. [1], [2])

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\rho^{-2\lambda_i}=1. \tag{1}$$

Пространством $\overset{\circ}{w}{}_2^r$, $r_j>0$, $j=1,\cdots,n$, Соболева—Лиувилля с квазиоднородной нормой мы называем пополнение пространства $S(R^n)$ основных функций Л. Шварца по норме (см. также [3]—[5])

$$\|f\|_{\overset{\circ}{w}{}_2^r}=\|\rho^{r^*}\tilde{f}\|_{L_2}. \tag{2}$$

При $0<r^*<\frac{n}{2}$ пространство $\overset{\circ}{w}{}_2^r$ совпадает с пространством анизотропных потенциалов (см. [6])

$$\Gamma(L_2)=\left\{f:f=\int_{R^n}\frac{\varphi(y)\,dy}{\rho^{n-r^*}(x-y)},\ \varphi\in L_2\right\}.$$

Однако при $r^*>\frac{n}{2}$ $\overset{\circ}{w}{}_2^r$ уже не является „функциональным“ пространством (см., например, [7]), его элементами будут классы, в которых функции, отличающиеся на многочлен $p(x)\in P_\lambda^{r^*-\frac{n}{2}}$, отождествляются; точнее $\overset{\circ}{w}{}_2^r$ является подпространством фактор—простран-

ства $S'/P_{\lambda}^{r^{\circ}-\frac{n}{2}}$ (см. [6]). При $r_1=r_2=\cdots=r_n=0$ положим $\overset{\circ}{w}{}_2^r=L_2$. Пространство $\overset{\circ}{w}{}_2^{-r}$, $r_j>0$, $j=1,\cdots,n$, определим как сопряженное к $\overset{\circ}{w}{}_2^r$, причем значение функционала из $\overset{\circ}{w}{}_2^{-r}$ на $\overset{\circ}{w}{}_2^r$ задается формой, являющейся расширением по непрерывности скалярного произведения в L_2. Отметим (см. [6]), что функции из класса

$$\Phi^r(R^n)=\left\{u\in S(R^n):\int\limits_{R^n}u(x)\,p(x)\,dx=0,\ p\in P_{\lambda}^{-r^{\circ}-\frac{n}{2}}\right\} \tag{3}$$

образуют плотное множество в $\overset{\circ}{w}{}_2^{-r}$, $r_j>0$, $j=1,2,\cdots,n$.

Пространства $\overset{\circ}{w}{}_2^r$ оказались удобными при рассмотрении уравнений (как интегральных, так и дифференциальных) с надлежащей однородностью (см. [6], [9], [8]). В данной работе рассматривается псевдодифференциальный оператор (п. д. о.) A с символом $A(\xi)$ вида

$$A(\xi)=\sum_{k=0}^{m}a_k(\xi')\,\xi_n^k, \tag{4}$$

где $\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$, m — натуральное число. Функции $a_k(\xi')$ считаем непрерывными при $\xi'\neq 0$ и предположим, что существует $(n-1)$-мерный вектор $\mu'=(\mu_1,\cdots,\mu_{n-1})$ с положительными компонентами такой, что $a_k(t^{\mu}\xi')=t^{m-k}a_k(\xi')$, $t>0$, $\xi'\neq 0$. Пусть $\mu=(\mu',1)$. Для произвольного действительного числа s положим $r_j=\frac{s}{\mu_j}$ и введем обозначение $\overset{\circ}{w}{}_2^{r'}\equiv Z_{\mu}^s(R^n)$. В этих обозначениях имеем: $Z_{\mu}^s(R^n)\subset S'(R^n)/P_{\mu}^{s-(|\mu|/2)}$, нормой в $Z_{\mu}^s(R^n)$ служит величина $\|f\|_{Z_{\mu}^s(R^n)}=\|p^{(n/|\mu|)s}\tilde{f}\|_{L_2}$.

Оператор A называется семиэллиптическим, если $A(\xi)\neq 0$, $\xi\neq 0$. Ясно, что символ произвольного семиэллиптического дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, содержащий только главную часть (см. [10]), может быть представлен в виде (4).

Для семиэллиптического оператора A мы рассмотрим граничную задачу в полупространстве $R_+^n=\{x\in R^n;\ x_n>0\}$ с граничными операторами $B=(B_j)$, $j=0,\cdots,M-1$, символы которых имеют вид

$$B_j(\xi)=\sum_{k=0}^{m_j}b_{jk}(\xi')\,\xi_n^k, \tag{5}$$

причем m_j — произвольные целые неотрицательные числа, а функции $b_{jk}(\xi')$ непрерывны при $\xi'\neq 0$ и удовлетворяют следующему условию однородности: $b_{jk}(t^{\mu'}\xi')=t^{m_j-k}b_{jk}(\xi')$. При $\mu_1=\cdots=\mu_{n-1}=1$ общая граничная задача в R_+^n в рамках пространств С. Л. Соболева рассматривалась в [11]—[13] (см. также имеющуюся там библиографию) и в работе [9]—в пространствах с однородной нормой. В рассмотрения указанных работ не входят, например, п.д.о. с символом $(\xi_n+i|\xi'|^{\beta})^m$, $\beta>0$, $\beta\neq 1$.

Начнем со следующего утверждения, обобщающего известную лемму Шварца (см., например, [14], теорема 1.А.8), которое мы формулируем в виде леммы 1.

Лемма 1. *Пусть f аналитична в окрестности $\bar{\Delta}(0,1)=\{z\in \mathbf{C}^n: |z_j|\leqslant 1, j=1,\cdots,n\}$ и разложение ее степенной ряд имеет вид*

$$f(z)=\sum_{(\alpha,\lambda)\geqslant k} a_\alpha z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}\equiv \sum_{(\alpha,\lambda)\geqslant k} a_\alpha z^\alpha,\quad k\in(0,\infty), \tag{6}$$

и предположим, что $|f(z)|<M$, $z\in\bar{\Delta}(0,1)$. Тогда

$$|f(z)|\leqslant M\delta^k(z),\ \text{где}\quad \delta(z)=\max_i |z_i|^{\frac{1}{\lambda_i}}. \tag{7}$$

Доказательство достаточно провести для рациональных λ_i, $i=1,\cdots,n$. Пусть $\lambda_i=\dfrac{p_i}{q_i}$, p_i, $q_i>0$ — целые. Выберем целое число $m_0>0$, кратное q_i, $i=1,\cdots,n$ и положим $m=(m_1,\cdots,m_n)$, где $m_i=\dfrac{m_0}{q_i}$. Рассмотрим при фиксированном $z\in\Delta(0,1)$, $z\neq 0$, функцию

$$g(\omega)=\omega^{-km_0}f\left(\omega^{m_0\lambda}\frac{z}{\delta^\lambda(z)}\right)\equiv\omega^{-km_0}f\left(\omega^{m_0\lambda_1}\frac{z^{\lambda_1}}{\delta^{\lambda_1}(z)},\ \cdots,\ \omega^{m_0\lambda_n}\frac{z_n}{\delta^{\lambda_n}(z)}\right),$$

$$\omega\in\mathbf{C}^1,\ |\omega|\leqslant 1,\ -\pi<\arg\omega\leqslant\pi.$$

Имеем из (6)

$$g(\omega)=\sum_{(p,m,\alpha)\geqslant km_0} a_\alpha\left[\frac{z}{\delta^\lambda(z)}\right]^\alpha\omega^{(p,m,\alpha)-km_0}, \tag{8}$$

где $(p,m,\alpha)=\sum\limits_{i=1}^n p_i m_i\alpha_i$; $p=(p_1,\cdots,p_n)$. Таким образом, $g(\omega)$ аналитична и (8)—ее разложение в степенной ряд. Из ограниченности $f(z)$ следует, что

$$|g(\omega)|\leqslant\left|\omega^{-km_0}f\left(\omega^{m_0\lambda}\frac{z}{\delta^\lambda(z)}\right)\right|\leqslant M|\omega^{-km_0}|=M,\ |\omega|=1.$$

На основе принципа максимума модуля заключаем, что

$$|g(\omega)|\leqslant M\quad\text{при}\quad|\omega|\leqslant 1.$$

В частности, если $\omega=\delta^{1/m_0}(z)$ имеем:

$$|g(\delta^{1/m_0}(z)|=|\delta^{-k}(z)f\left(\delta^\lambda(z)\frac{z}{\delta^\lambda(z)}\right)=\delta^{-k}(z)|f(z)|\leqslant M,$$

т. е. $|f(z)|\leqslant M\delta^k(z)$.

Лемма 2. *П.д.о. P с символом $P(\xi)$, непрерывным при $\xi\neq 0$, $P(t^\mu\xi)=t^\alpha P(\xi)$, $-\infty<\alpha<\infty$, удовлетворяет при любом $-\infty<s<\infty$ оценке*

$$\|Pu\|_{Z^{s-\alpha}_{\bar{\mu}}(R^n)}\leqslant c\,\|u\|_{Z^s_\mu(R^n)},\ u\in\Phi^{s/\mu}(R^n)\equiv\Phi^s_\mu(R^n),$$

и следовательно продолжается по непрерывности до ограниченного оператора $P: z_{\mu}^{s}(R^n) \to Z_{\mu}^{s-\alpha}(R^n)$.

Доказательство. Из непрерывности $P(\xi)$ при $|\xi|=1$ и условия квазиоднородности следует, что $|P(\xi)| \leqslant c\,\rho^{\frac{n}{|\mu|}\alpha}(\xi)$. Тогда

$$\|Pu\|^2_{Z_{\mu}^{s-\alpha}(R^n)} = \int\limits_{R^n} \rho^{2(s-\alpha)\frac{n}{|\mu|}} |P(\xi)\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \leqslant c\,\|u\|^2_{z_{\mu}^{s}(R^n)}.$$

Интегрируемость в 0 подынтегральных выражений следует из леммы 1 (проверяется сначала для C_0^{∞}-функций) с учетом эквивалентности величин $\delta(\xi)$ и $\rho(\xi)$ (см. [2]).

Существование и единственность решения уравнения $Pu=f$ в пространствах $Z_{\mu}^{s}(R^n)$ следует из нижеследующей теоремы 1 при $N=M=1$. Общая ситуация будет использована при доказательстве (основной) теоремы 2.

Теорема 1. *Пусть* $P=(P_{jk})$*—матрица п.д.о.* P_{jk}, $j=0, 1, \cdots, M-1$, $k=0, 1, \cdots, N-1$, *с символами* $P_{jk}(\xi)$, *непрерывными при* $\xi \neq 0$ *и удовлетворяющими условию квазиоднородности:* $P_{jk}(t^{\mu}\xi) = t^{\alpha_j-\beta_k} P_{jk}(\xi)$, $-\infty < \alpha_j, \beta_k < \infty$. *Тогда для любого действительного числа* s

$$P: \prod_{k=0}^{N-1} Z_{\mu}^{s-\beta_k}(R^n) \to \prod_{j=0}^{M-1} Z_{\mu}^{s-\alpha_j}(R^n),$$

причем P *имеет левый (правый) обратный оператор тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} P(\xi) \equiv \operatorname{rank}(P_{jk}(\xi)) = N$ *(соответственно* M*) для всех* $\xi \neq 0$.

Доказательство. Пусть $Q(\xi)=(Q_{jk}(\xi))$, где $Q_{jk}(\xi) = \rho^{\frac{n}{|\mu|}(\beta_k-\alpha_j)}(\xi) P_{jk}(\xi)$; через $J_1(\xi)(J_2(\xi))$ обозначим диагональную матрицу размерности $M\times M(N\times N)$ с элементами $\rho^{\frac{n}{|\mu|}(s-\alpha_j)}(\xi)$, $j=0, \cdots, M-1$ ($\rho^{\frac{n}{|\mu|}(s-\beta_k)}(\xi)$, $k=0, \cdots, N-1$). Как следует из леммы 2

$$Q = J_1 P J_2: \prod_{j=0}^{N-1} L_2(R^n) \to \prod_{j=0}^{M-1} L_2(R^n).$$

Операторы J_1 и J_2 являются изоморфизмами между соответствующими пространствами с квазиоднородными нормами; символами обратных операторов являются диагональные матрицы с элементами $\rho^{-\frac{n}{|\mu|}(s-\alpha_j)}(\xi)$ и $\rho^{-\frac{n}{|\mu|}(s-\beta_k)}(\xi)$ соответственно. Следовательно P обратим слева (справа) тогда и только тогда, когда Q имеет левый (правый) обратный оператор, кроме того $\operatorname{rank} P(\xi) = \operatorname{rank} Q(\xi)$ для всех $\xi \neq 0$ (см., например, [3]). Предположим $\operatorname{rank} Q(\xi) = N$ для всех $\xi \neq 0$. Обозначим че-

рез $Q^*(\xi)$ матрицу размерности $N\times M$: $Q^*(\xi)=(\overline{Q_{kj}(\xi)})$, где $\overline{Q_{kj}}(\xi)$ комплексно-сопряженные к $Q_{kj}(\xi)$. Положим $K(\xi)=[Q^*(\xi)\,Q(\xi)]^{-1}\,Q^*(\xi)$, где $[Q^*(\xi)\,Q(\xi)]^{-1}$ — матрица, обратная к неособенной матрице $Q^*(\xi)\times\times Q(\xi)$ размерности $N\times N$. Элементы матрицы $K(\xi)$ непрерывны при $\xi\neq 0$ и μ-однородны степени 0 (см., например, [2]), следовательно, она является символом левого обратного оператора к Q.

Пусть теперь для некоторого $\eta\neq 0$ $\operatorname{rank} Q(\eta)<N$, т. е. существует единичный вектор $c=(c_0,\cdots,c_{N-1})$ такой, что $Q(\eta)\,c=0$. Выберем неотрицательную функцию $\psi\in C_0^\infty(R^n)$ такую, что $\psi(\xi)=0$, $|\xi|>1$, и $\|\psi\|_{L_2}=1$. Пусть $\varepsilon>0$, положим $g_{\varepsilon,k}=\varepsilon^{-n/2}\,\psi\left(\frac{\xi-\eta}{\varepsilon}\right)c_k$, $k=0,\cdots\cdots,N-1$, $g_\varepsilon=(g_{\varepsilon,0},\cdots,g_{\varepsilon,N-1})$. Тогда

$$\|g_\varepsilon\|^2_{\prod\limits_0^{N-1} L_2}=\sum_{k=0}^{N-1}\|g_{\varepsilon,k}\|^2_{L_2}=\sum_{k=0}^{N-1}c_k^2=1.$$

Если $f_\varepsilon=\widehat{g}$, где $\wedge$ — обратное преобразование Фурье, то согласно теореме Планшереля $\|f_\varepsilon\|_{\prod\limits_0^{N-1} L_2}=1$. Однако

$$\|Qf_\varepsilon\|^2_{\prod\limits_0^{M-1} L_2}\leqslant\sum_{j=0}^{M-1}\sup_{|\xi-\eta|<\varepsilon}\left|\sum_{k=0}^{N-1}Q_{jk}(\xi)\,c_k\right|^2\to 0,$$

поскольку $Q_{jk}(\xi)$ непрерывны в малой окрестности точки η и $Q(\eta)\,c=0$. Нарушен критерий существования левого обратного оператора. А так как оператор Q^*, сопряженный к Q, является п.д.о. с символом $Q^*(\xi)$, имеющем левый обратный тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} Q(\xi)=M$, то и утверждение теоремы относительно правого обратного к Q следует считать доказанным.

В связи с теоремой 1 отметим работу [15], в которой изучалось поведение решений семиэллиптических п.д.о. на бесконечности.

Перейдем теперь к изучению граничной задачи для п.д.о. A с символом вида (4). Через $Z^s_\mu(R^n_\pm)$ будем обозначать сужение на $R^n_\pm$ элементов из $Z^s_\mu(R^n)$. Норма в $Z^s_\mu(R^n_\pm)$ определяется формулой

$$\|f\|_{Z^s_\mu(R^n_\pm)}=\inf\{\|v\|_{Z^s_\mu(R^n)}:v\in Z^s_\mu(R_n),\ R_\pm v=f\},$$

где $R_\pm$ — оператор сужения на $\overline{R^n_\pm}$. Пространство $\mathring{Z}^s_\mu(R^n_\pm)$ определим как подпространство в $Z^s_\mu(R^n)$, состоящее из классов, содержащих распределение с носителем в $R^n_\pm$. Пусть

$$Z^s_{\mu,\ker A}(R^n_+)=\{f\in Z^s_\mu(R^n_+),\ Af=0,\ -\infty<s<\infty\}.$$

Если A — семиэллиптический оператор с символом вида (4), то существует единственный ограниченный оператор γ_0: $Z^s_{\mu,\ker A}(R^n_+)\to\to Z^{(s-1/2)}_\mu(R^{n-1})$, являющийся непрерывным продолжением оператора $u\to u(x',0)$, $u\in Z^s_{\mu,\ker A}(R^n_+)\cap C_0(\overline{R^n_+})$ (см. [6]).

Рассмотрим граничную задачу

$$Au = 0,$$
$$\gamma_0 (B_j u) = g_j, \tag{9}$$

где B_j — п.д.о. с символами (5). Всюду далее считаем $n > 2$. Поскольку $A(\xi)$, $|\xi| = 1$, непрерывна, то многочлен (по z) $A(\xi', z)$ имеет при каждом фиксированном $\xi' \neq 0$ одинаковое число корней (не обязательно различных) с положительной мнимой частью. Обозначим их $z_0(\xi')$, $z_1(\xi'), \cdots, z_{N-1}(\xi')$. Положим $A_+(\xi' z) = \prod_{k=0}^{N-1} (z - z_k(\xi'))$ и пусть

$$B_j(\xi', z) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{B}_{jk}(\xi') z^k \pmod{A_+(\xi', z)}, \; j = 0, \cdots, M-1.$$

Элементы матрицы $\mathbf{B}(\xi') = (\mathbf{B}_{jk}(\xi'))$ размерности $M \times N$ удовлетворяют условию квазиоднородности: $\mathbf{B}_{jk}(t^{\mu'} \xi') = t^{m_j - k} \mathbf{B}_{jk}(\xi')$, $\xi' \neq 0$.

Лемма 3. *Если A — семиэллиптический п.д.о. с символом вида* (4), *B — граничная система вида* (5), $-\infty < s < \infty$, *то $Bu = \mathbf{B}\gamma u$ для всех $u \in Z^s_{\mu, \ker A}(R^n_+)$, где $\gamma = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{N-1})$, $\gamma_l = \gamma_0 \left(\frac{1}{i} \frac{\partial^l}{\partial x_n^l}\right)$.*

Доказательство достаточно провести для $u \in H^l_{\mu, \ker A}(R^n_+)$, поскольку $\overline{Z^s_{\mu, \ker A}(R^n_+) \cap H^l_{\mu, \ker A}(R^n_+)} = Z^s_{\mu, \ker A}$ (рассуждения аналогичны приведенным в теореме 3.1 работы [9]). Здесь $H^l_{\mu, \ker A}(R^n_+)$ — ядро оператора A в пространстве $H^l_\mu(R^n_+) = R_+[H^l_\mu(R^n)]$, где $H^l_\mu(R^n)$ — анизотропное пространство С. Л. Соболева, состоящее из распределений u таких, что

$$\|u\|^2_{H^l_\mu(R^n)} = \int_{R^n} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + \rho^{n/|\mu|})^{2l} \, d\xi < \infty.$$

Поскольку

$$B_j(\xi', z) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{B}_{jk}(\xi') z^k + Q_j(\xi', z) A_+(\xi', z),$$

где $Q_j(\xi', z)$ (многочлен по z) непрерывен при $\xi' \neq 0$ и удовлетворяет условию квазиоднородности: $Q_j(t^{\mu'} \xi', tz) = t^{m_j - N} Q_j(\xi', z)$, то

$$\gamma_0 (B_j u) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{B}_{jk} \gamma_k u + \gamma_0 Q_j A_+ u.$$

Будем считать $l > \max\left\{m, m_j + \frac{1}{2}\right\}$. Достаточно показать, что

$$Q_j A_+ u \in \dot{H}^{l - m_j}_\mu(R^n_-) (\subset \ker \gamma_0),$$

так как $Au \in L_2(R^n_-)$, по теореме Пэли—Винера для всех $\xi' \neq 0$ $A(\xi', z) \tilde{u}(\xi', z)$ аналитично в $\operatorname{Im} z > 0$ и

$$\int\limits_{R^1} |A(\xi', \xi_n + i\tau)\, \widetilde{u}(\xi', \xi_n + i\tau)|^2\, d\xi_n < \infty, \ \tau > 0$$

(здесь мы считаем функцию u уже продолженной на все R^n, $u \in H^l_\mu(R^n)$. Но

$$A(\xi) = A_+(\xi)\, A_-(\xi), \ A_-(\xi) = \prod_{k=N}^{m-1} (z - z_k(\xi')),$$

где $z_k(\xi')$ — корни многочлена $A(\xi', z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, причем $A_-(\xi', z)$ допускает аналитическое продолжение в $\operatorname{Im} z > 0$, следовательно и $A_+(\xi)$ обладает этим свойством. Вновь по теореме Пэли—Винера заключаем, что $(\widetilde{A_+ u})(\xi', \cdot) \in L_2(R^1_-] \cap H^{l-N}(R^1) = \dot{H}^{l-N}(R^1)$, т. е. $Q_j A_+ u \in H^{l-m_j}_\mu(R^n_-)$.

Теорема 2. *Пусть A — семиэллиптический п.д.о. с символом вида* (4), $B = (B_j)$ $j = 0, \cdots, M-1$, *граничная система операторов с символами вида* (5), $-\infty < s < \infty$, $n > 2$. *Тогда*

1. *Задача* (9) *разрешима в $Z^s_\mu(R^n_+)$ при любых граничных функциях $g_j \in Z^{s-m_j-\frac{1}{2}}_{\mu'}(R^{n-1})$ тогда и только тогда, когда для всех $\xi' \neq 0$*

$$\operatorname{rank} \mathbf{B}(\xi') = M.$$

2. *Решение задачи* (9) *единственно в $Z^s_\mu(R^n_+)$ при любых $g_j \in Z^{s-m_j-\frac{1}{2}}_{\mu'}(R^{n-1})$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} \mathbf{B}(\xi') = N$ *для всех $\xi' \neq 0$.*

Доказательство проведем в несколько этапов. Утверждение 1(2) теоремы эквивалентно существованию правого (соответственно левого) обратного оператора к оператору $\gamma_0 B$ в пространствах $Z^s_{\mu, \ker A}(R^n_+)$.

а. Односторонние обратные операторы будут построены с помощью вводимого ниже оператора Q, действующего следующим образом:

$$R_+ Q: \prod_{k=0}^{N-1} Z^{s-k-\frac{1}{2}}_{\mu'}(R^{n-1}) \to Z^s_{\mu, \ker A}(R^n_+).$$

Пусть h — достаточно большое целое число (уточнение будет дано ниже), $\eta' \in R^{n-1}$, $|\eta'| = 1$. Положим $u(\eta' z) = (z + i)^{-h} A(\eta', z)^{-1}$. Пусть Γ — положительно-ориентированный замкнутый контур в комплексной полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, содержащий все корни многочлена $A(\eta', z)$ в $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда (см. [9], лемма 6.1), если $N > 0$, то для любого $j = 0, 1, \cdots, N-1$ существует единственный полином $p_j(\eta', z)$ порядка не превосходящего $N-1$, не зависящий от контура Γ (при указанных условиях на Γ) и удовлетворяющий равенству

$$\int\limits_\Gamma u(\eta', z)\, z^j p_{j'}(\eta', z)\, dz = \delta_{jj'}, \ 0 \leqslant j, j' \leqslant N-1. \tag{10}$$

Пусть

$$g=(g_0, g_1, \cdots, g_{N-1}) \in \prod_{j=0}^{N-1} \Phi_{\mu'}^{s-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$$

и положим

$$\widetilde{Qg}(\xi)=(2\pi)^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-1)}(\xi')\,(\xi_n+i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^{-h} A(\xi)^{-1}\times$$

$$\times \sum_{j=0}^{N-1} \rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\, p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}, \frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right) \widetilde{g_j}(\xi').$$

Тогда $Qg \in Z_\mu^s(R^n)$. Действительно, поскольку величины $\rho^{n/|\mu|}(\xi)$ и $(\xi_n^2+\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^{1/2}$ эквивалентны, то

$$\|Qg\|^2_{Z^s_\mu(R^n)}=(2\pi)^{\frac{1}{2}} \Big\| \rho^{\frac{n}{|\mu|}s}(\xi)\, \rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-1)}(\xi')\,(\xi_n+i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi))^{-h} A(\xi)^{-1}\times$$

$$\times \sum_{j=0}^{N-1} \rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\, p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}, \frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi)}\right) \widetilde{g_j}(\xi') \Big\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{j=0}^{N-1} \int_{R^n} \rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-j-1)}(\xi)\,(\xi_n^2+\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi))^{s-h-m}\times$$

$$\times \left| p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}, \frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right)\right|^2 |g_j(\xi')|^2\, d\xi=$$

$$=c\sum_{j=0}^{N-1} \int_{R^{n-1}} \rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(2s-2j-1)}(\xi')\,|g_j(\xi')|^2 \int_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)^{s-h-m}\left|p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}, t\right)\right|^2\times$$

$$\times dt\, d\xi' \leqslant c\sum_{j=0}^{N-1} \int_{R^{n-1}} \rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(2s-2j-1)}(\xi')\,|g_j(\xi')|^2\, d\xi'=c\,\|g\|_{\prod_{j=0}^{N-1} Z^{s-j-\frac{1}{2}}_{\mu'}(R^{n-1})}, \tag{11}$$

если $h>s-m+N-\frac{1}{2}$. Одномерный интеграл в третьей строке (полученной заменой $\frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')} \to t$) сходится абсолютно при $h>s-m+$ $+N-\frac{1}{2}$ и мажорируется постоянной, поскольку $\left|\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right|=1$. Продолжив Q по непрерывности, получим ограниченный оператор Q из

$\prod_{j=0}^{N-1} Z_{\mu'}^{s-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ в $Z_\mu^s(R^n)$. Осталось показать, что $R_+AQg=0$. Обозначим через Λ_μ^s п.д.о. с символом $(\xi_n+i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^s$, где $z^s=|z|^s e^{i\arg z}$ $-\pi<\arg z\leqslant\pi$. Положим $w=\Lambda_\mu^{s-m}AQg$, тогда $w\in L_2$ и

$$\tilde{w}(\xi)=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-1)}(\xi')(\xi_n+i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^{s-m-h}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{N-1}\rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\,p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')},\ \frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right)\tilde{g}_j(\xi').$$

Ясно, что при $\xi'\neq0$ $\tilde{w}(\xi',z)$ аналитична по z в полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$. Далее, так как $|p_j(\xi',z)|<c(1+|z|^2)^{N-1}$, $|\xi'|=1$, то при $\eta>0$ имеем, считая $h>s-m+N-1$,

$$|\tilde{w}(\xi',\xi_n+i\eta)|^2\leqslant c\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-1)}(\xi')\,[\xi_n^2+\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^2]^{s-m-h}\times$$

$$\times\left(1+\frac{\xi_n^2+\eta^2}{\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right)^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\rho^{-2\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\,|g_j(\xi')|^2\leqslant$$

$$\leqslant c\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-N)}(\xi')\,[\xi_n^2+(\eta+\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^2]^{s-m-h+N-1}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{N-1}\rho^{-2\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\,|g_j(\xi')|^2\leqslant$$

$$\leqslant c\rho^{2\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-N)}(\xi')\,\rho^{2\frac{n}{|\mu|}(s-m-h+N-1)}(\xi')\sum_{j=0}^{N-1}\rho^{-2\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\,|g_j(\xi')|^2.$$

Как и в (11) убеждаемся, что $\|\tilde{w}(\xi',\xi_n+i\tau)\|_{L_2}<\infty$, $\tau>0$, а тогда по теореме Пэли—Винера $w\in L_2(R_-^n)$, т. е. $\operatorname{supp}w\subset R_-^n$. С помощью стандартных рассуждений (см., например, [5], [13]) легко убедиться, что $\Lambda_\mu^{s-m}:Z_\mu^s(R_-^n)\to L_2(R_-^n)$—изоморфизм, а тогда $AQg\in Z_\mu^{s-m}(R_-^n)$, т. е. $R_+AQg=0$.

6. Предположим, что $\operatorname{rank}B(\xi')=M$ для всех $\xi'\neq0$. Как и при доказательстве теоремы 2, положим $\mathbf{B}(\xi')=J_1(\xi')\,\mathbf{B}\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right)J_2(\xi')$, где $J_1(\xi')$, $J_2(\xi')$ — диагональные матрицы, соответственно, с элементами $\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}m_j}(\xi')$ и $\rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}k}(\xi')$, $j=0,1,\cdots,M-1$; $k=0,1,\cdots,N-1$. Пусть

$$\mathbf{B}'(\xi')=(\mathbf{B}'_{kj}(\xi'))=[J_2(\xi')]^{-1}\mathbf{B}^*\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right)\times$$

$$\times\left[\mathbf{B}\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu}(\xi')}\right)\mathbf{B}^*\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right)\right]^{-1}[J_1(\xi)]^{-1},$$

тогда $\mathbf{B}(\xi')\,\mathbf{B}'(\xi')=I$. Элементы матрицы $\mathbf{B}'(\xi')$ удовлетворяют условию квазиоднородности: $\mathbf{B}'_{kj}(t^{\mu'}\xi')=t^{k-m_j}\,\mathbf{B}_{kj}(\xi')$, $t>0$, $\xi'\neq 0$, и, следовательно, мы имеем ограниченный оператор

$$Б'=R_+\,Q\mathbf{B}':\prod_{j=0}^{M-1}Z^{s-m_j-\frac{1}{2}}_{\mu'}(R^{n-1})\to Z^s_{\mu,\ker A}(R^n_+).$$

Покажем, что $BB'=I$. Пусть

$$g=(g_0,\cdots,g_{N-1})\in\prod_{j=0}^{M-1}\Phi^{s-m_j-\frac{1}{2}}_{\mu'}(R^{n-1}).$$

Положим $g'=BБ'g$, так как $\mathbf{B}=\mathbf{B}\gamma$, то $g'=\mathbf{B}\gamma R_+QB'g$. Поскольку

$$(\widetilde{\gamma_0 u})(\xi')=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}(\xi',\xi_n)\,d\xi_n,\quad u\in\Phi^s_\mu(R^n),\quad\text{то}$$

$$g'_{j'}(\xi')=\sum_{k'=0}^{N-1}\mathbf{B}_{j'k'}(\xi')\int_{-\infty}^{\infty}\xi_n^{k'}\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-1)}(\xi')(\xi_n+i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}})^{-h}A(\xi)^{-1}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{N}\rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}k}(\xi')\,p_k\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')},\frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right)\sum_{j=0}^{M-1}\mathbf{B}'_{kj}(\xi')\,\tilde{g}_j(\xi')\,d\xi_n.$$

Произведем замену $\dfrac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\to t$, имеем с учетом (10)

$$g'_{j'}(\xi')=\sum_{k,k'=0}^{N-1}\mathbf{B}_{j'k'}(\xi')\,\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}k}(\xi')\sum_{j=0}^{M-1}\mathbf{B}'_{kj}(\xi')\,\rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}k}(\xi')\,\tilde{g}_j(\xi')\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}(t+i)^{-h}A\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')},t\right)^{-1}t^{k'}\,p_k\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')},t\right)dt=$$

$$=\sum_{k'=0}^{N-1}\mathbf{B}_{j'k'}(\xi')\sum_{j=0}^{M-1}\mathbf{B}'_{k'j}(\xi')\,\tilde{g}_j(\xi')=\sum_{j=0}^{M-1}\delta_{j'j}\,\tilde{g}_j(\xi')=\tilde{g}_{j'}(\xi').$$

Если же $B=\mathbf{B}\gamma$ обратим справа, то и $\mathbf{B}$ имеет правый обратный оператор. Тогда по теореме 1 $\operatorname{rank}\mathbf{B}(\xi')=N$ для всех $\xi'\neq 0$.

в. Пусть теперь $\operatorname{rank}\mathbf{B}(\xi')=N$ для всех $\xi'\neq 0$, положим

$$\mathbf{B}'(\xi')=[J_2(\xi')]^{-1}\left[\mathbf{B}^*\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right)\mathbf{B}\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right)\right]^{-1}\times$$

$$\times \mathbf{B}^*\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')}\right)[J_1(\xi')]^{-1}$$

и $B'=R_+Q\mathbf{B}'$. Покажем, что $B'B=I$. Пусть $u\in Z^s_{\mu,\ker A}(R^n_+)$, $w=\Lambda^s_\mu(u-Q\mathbf{B}'\mathbf{B}\gamma u)\in L_2(R^n)$. Так как $\operatorname{supp} Au\subset R^n_-$, то $v=Au\in Z^{s-m}_\mu(R^n_-)$. Пусть $v_l\in\mathring{\Phi}^s_\mu(R^n)$, $v_l\to v$ в $Z^{s-m}_\mu(R^n_-)$, тогда

$$w_l=\Lambda^s_\mu(A^{-1}v_l-Q\mathbf{B}'\mathbf{B}\gamma A^{-1}v_l)\xrightarrow{L_2}w.$$

Имеем

$$\tilde{w}_l(\xi)=(\xi_n+i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^s[A(\xi)^{-1}\tilde{v}_l(\xi)-\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-1)}(\xi')(\xi_n+i\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi'))^{-h}\times$$

$$\times A(\xi)^{-1}\sum_{j=0}^{N-1}\rho^{-\frac{n-1}{|\mu|-1}j}(\xi')\,p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')},\frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\eta^jA(\xi',\eta)^{-1}\tilde{v}_l(\xi',\eta)\times$$

$$\times d\eta]=\lim_{R\to\infty}(\xi_n+i\rho^{n-1/|\mu|-1}(\xi'))^sA(\xi)^{-1}[\tilde{v}_l(\xi)-\sum_{j=0}^{N-1}(\xi_n+i\rho^{n-1/|\mu|-1}(\xi'))^{-h}\times$$

$$\times\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}(h+m-j-1)}(\xi')\,p_j\left(\frac{\xi'}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}\mu'}(\xi')},\frac{\xi_n}{\rho^{\frac{n-1}{|\mu|-1}}(\xi')}\right)\int_{\Gamma_R}A(\xi',\eta)^{-1}\eta^j\tilde{v}_l(\xi',\eta)\,d\eta,$$

поскольку $\int_{S_R}zA(\xi',z)\tilde{v}_l(\xi',z)\,dz\underset{R\to\infty}{\to}0$. Здесь S_R — полусфера $|z|=R$ в $\operatorname{Im}z\geqslant0$, $\Gamma_R=[-R,R]\cup S_R$. Интеграл в правой части не зависит от R для достаточно больших R, следовательно (см. [9], лемма 6.1), $\tilde{w}(\xi',z)$ аналитична в $\operatorname{Im}z>0$, а из леммы 6.4 работы [9] — $w\in L_2(R^n_-)$, т. е. $\operatorname{supp}(u-Q\mathbf{B}'\mathbf{B}\gamma u)\subset R^n_-$ и $B'Bu=R_+Q\mathbf{B}'\mathbf{B}\gamma u=u$.

Если теперь для некоторого $\eta'\neq0$ $\operatorname{rank}\mathbf{B}(\eta')<N$, то по теореме 1 $\mathbf{B}$ не имеет левого обратного. Поскольку $\gamma=(\gamma_0,\cdots,\gamma_{N-1})$ — изоморфизм из $Z^s_{\mu,\ker A}(R^n_+)$ в $\prod_{j=1}^{N-1}Z^{s-j-\frac12}_{\mu'}(R^{n-1})$ (следует взять в предыдущих рассуждениях $\gamma_0B_j=\gamma_j$), то оператор $B=\mathbf{B}\gamma$ также не имеет левого обратного оператора. Теорема доказана.

Отметим в заключение работу [16], в которой разрешимость дифференциальной граничной задачи (9) исследовалась в рамках C^∞-функций.

Автор благодарит П. И. Лизоркина и Г. Г. Казаряна за внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Поступила 3. XII. 1984

Ա. Ա. ԴԱՎԹՅԱՆ. Քվազիհամասեռ նորմայով Սոբոլև-Լիուվիլի տարածություններում սեմիէլիպտիկ սյսեդոդիֆերենցիալ (պ. դ.) հավասարումների մեկ դասի համար եզրային խնդիրներ (ամփոփում)

Քվազիհամասեռ նորմայով Սոբոլև-Լիուվիլի տարածություն $\overset{\circ}{w}{}^r_2$ կոչվում է $\Phi^r(R^n)$-ի (տես (3)) լրացումը (2) նորմայով։ $A\left(\frac{\xi}{\tau}\right)$ սիմվոլով (4) տեսքի A պ. դ. օպերատորի համար դիտարկվում է եզրային խնդիր R^n_+-ում, (5) տեսքի սիմվոլներով $B=(B_j)$, $j=0, 1, \cdots, M-1$ եզրային օպերատորներով։ Որոշվում է, թե երբ (9) խնդիրն ունի լուծում և երբ այն միակն է։

A. A. DAVTIAN. *Boundary value problems for one class of semi-elliptic pseudo-differential (p. d.) equations in Sobolev-Liouville spac es with quasi-homogeneous norms* (summary)

Sobolev—Liouville space $\overset{\circ}{w}{}^r_2(R^n)$ with quasi-homogeneous norm is the completion of $\Phi^r(R^n)$ (see (3)) with the norm (2). For the p. d. operator A, with symbols $A\left(\frac{\xi}{\tau}\right)$, of the form (4) a boundary value problem on R^n_+ is considered, with boundary systems $B=(B_j)$, $j=0,\cdots, M-1$, where the symbols $(B_j\left(\frac{\xi}{\tau}\right))$ are as in (5). We obtain theorems concerning the existence and uniqueness questions for the problem (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. И. Лизоркин.* Описание пространства $L^r_p(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов, Матем. сб., 1970, 81, 123:1, 79—91.
2. *О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский.* Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., «Наука», 1975, 480 с.
3. *С. Л. Соболев.* Введение в теорию кубатурных формул, М., «Наука», 1974, 808 с.
4. *П. И. Лизоркин.* Поведение функций из лиувиллевских классов на бесконечности. О риссовых потенциалах произвольного порядка, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1979, 150, 174—197.
5. *A. J. Pryde.* Spaces with homogeneous norms, Bull. Austral. Math. Soc., 1980, 21, 189—205.
6. *А. А. Давтян.* Анизотропные потенциалы, их обращение и некоторые приложения, ДАН СССР, 1985 (в печати).
7. *N. Aronszajn, K. T, Smith.* Functional spaces and functional completion, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1955—1956, v. 6, 125—185.
8. *С. Г. Самко.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения, Ростов-на-Дону, Изд-во Рост. ун-та, 1984, 208 с.
9. *A. J. Pryde.* Higher order elliptic boundary value problems in spaces with homogeneous norms, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 1981, 31, 92—113.
10. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы, М., «Мир», 1967.
11. *Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес.* Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., «Мир», 1971, 371 с.
12. *М. С. Агранович.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, УМН, 1965, 20, вып. 5 (125), 3—120.
13. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, XX, вып. 3 (123), 1965, 90—153.
14. *Р. Ганнинг, Х. Росси.* Аналитические функции многих комплексных переменных, М., «Мир», 1969, 395 с.
15. *С. В. Успенский, Б. Н. Чистяков.* О выходе на полином при стремлении $|x| \to \infty$ решений одного класса псевдодифференциальных уравнений, Сибирский мат. журнал, 16, № 5, 1975, 1053—1070.
16. *Г. А. Карапетян.* Решение полуэллиптических уравнений в полупространстве, ДАН Арм.ССР, 75, № 5, 1982, 200—204.