ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 3, 1985 Математика

УДК 517.53.57

В. А. МАРТИРОСЯН

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ НА ПЛОСКОСТИ МНОГОЧЛЕНАМИ С ПРОПУСКАМИ

1°. Пусть E — компакт из конечной комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $A(E)$ — банахово пространство всех непрерывных на компакте E и голоморфных на его внутренности комплексных функций с нормой $\|f\| = \sup|f|(E)$. Проблема возможности равномерного приближения многочленами на компактах из $\mathbf{C}$, как известно, была исчерпывающе решена в 1951 г. С. Н. Мергеляном [1]: оказалось, что система степеней $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространстве $A(E)$ тогда и только тогда, когда компакт E имеет связное дополнение $\mathbf{C}\setminus E$. В этой связи сперва в совместной с Н. У. Аракеляном работе [2] и затем в работах [3], [4] изучалась задача о возможности равномерного приближения на общих компактах из $\mathbf{C}$ многочленами с пропусками. Чтобы сформулировать основной результат о приближении такими многочленами (см. [4]), для заданных из $\mathbf{C}$ компакта E и точки h введем обозначение

$$d_E(h) = \min_{z\in E} |z - h|.$$

Теорема А. *Пусть* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *подпоследовательность натуральных чисел плотности единица,* $E\subset \mathbf{C}$ — *компакт со связным дополнением* $\mathbf{C}\setminus E$, *внутренность* E^0 *которого не содержит нуля. Тогда система функций*

$$\{z^{p_n}\}_{n=0}^{\infty}, \quad p_0 = 0, \tag{1}$$

полна в пространстве $A(E)$, *если* E *удовлетворяет одному из следующих условий:*

а) 0 *не является граничной точкой для каждой компоненты* E^0;

в) *существует такая последовательность точек* $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ *из* $\mathbf{C}\setminus\overline{E^0}$, *что* $\lim\limits_{m\to+\infty} h_m = 0$ *и*

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{|h_m|}{d_{\overline{E^0}}(h_m)} < \infty. \tag{2}$$

С целью дальнейшего изучения указанной задачи приближения целесообразно ввести следующие классы компактов. Для заданного числа α, $0<\alpha\leqslant 1$, обозначим через B_α класс всех компактов E, $0\in\partial E$ каждый из которых ограничен спрямляемой жордановой кривой, участок которой из некоторой окрестности нуля (для каждого компакта — своей) разбивается нулем на две дуги, содержащиеся, за исключением нуля, внутри угла $\{z\in\mathbf{C}: |\arg z| < \pi\alpha\}$ и имеющие в качестве односторонних касательных в нуле разные стороны этого угла.

Ясно, что компакты класса B_1 являются одними из простейших компактов, которые не удовлетворяют предположениям теоремы A. Поэтому равномерные приближения многочленами с пропусками на компактах из B_1 (а также из B_α), помимо самостоятельного интереса, важны также с точки зрения выяснения точности условия (2) этой теоремы.

В настоящей работе изучаются необходимые условия равномерного приближения многочленами с пропусками на компактах из класса B_α $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Оказывается, что в качественном отношении возможность приближения на компактах из B_α зависит от порядка касания в нуле граничных дуг этих компактов со сторонами угла $\{z \in \mathbf{C}: |\arg z| < \pi\alpha\}$. С помощью полученных результатов устанавливается точность условия (2) теоремы A.

Достаточные условия равномерного приближения многочленами с пропусками на компактах класса B_1 будут приведены в другой работе.

Пользуясь случаем, благодарю Н. У. Аракеляна за обсуждение результатов работы.

2°. Для заданных подпоследовательности натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и числа α, $0<\alpha\leqslant 1$, введем функцию

$$\rho_\alpha(t)=\begin{cases}\alpha\ln(1+t) & \text{при } 0\leqslant t<1,\\ \alpha\ln(1+t)-\sum\limits_{1<p_n<t}\dfrac{1}{p_n} & \text{при } t\geqslant 1.\end{cases}$$

Эта функция играет важную роль при изучении необходимых условий равномерного приближения многочленами с пропусками на компактах класса B_α. Оценим сперва с ее помощью следующую вспомогательную функцию*:

$$h_\alpha(z)=\exp\left[-2\alpha z\ln(1+z)\right]\frac{H(z)}{(1+z)^2},\quad \operatorname{Re} z\geqslant 0, \tag{3}$$

где

$$H(z)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{p_n+1+z}{p_n+1-z}\exp\left(\frac{2z}{p_n+1}\right).$$

Ясно, что $h_\alpha(z)$ голоморфна при $\operatorname{Re} z>0$ и $h_\alpha(p_n+1)=0$ при $n=0,1,\cdots$. Из известной оценки (см. [5]; [6], стр. 161) функции $H(z)$ имеем

$$|h_\alpha(z)|\leqslant\frac{C_1}{1+|z|^2}\exp\left(\pi\alpha|z|-C_2\operatorname{Re} z\right)\left[\frac{\psi(|z|)}{(1+|z|)^{2\alpha}}\right]^{\operatorname{Re} z},\quad \operatorname{Re} z\geqslant 0,$$

где $C_1>0$, C_2 — постоянные и

$$\psi(t)=\begin{cases}\exp 2 & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \exp\left\{2\sum\limits_{0<p_n+1<t}\dfrac{1}{p_n+1}\right\} & \text{при } t>1.\end{cases}$$

Поэтому, так как при $t\to+\infty$ ограничена разность

$$\sum_{0<p_n+1<t}\frac{1}{p_n+1}-\sum_{1<p_n<t}\frac{1}{p_n},$$

---

* Здесь $\ln z$ — ветвь комплексного логарифма $\operatorname{Ln} z$, вещественнозначная при $z>0$.

то получим оценку

$$|h_\alpha(z)| \leqslant \frac{C_1}{1+|z|^2} \exp[\pi\alpha|z| - (C_2 + 2\rho_\alpha(|z|)) \operatorname{Re} z], \ \operatorname{Re} z > 0. \tag{4}$$

Следующее простое утверждение доставляет *необходимое во всем классе* B_α условие приближения многочленами с пропусками.

Теорема 1. *Пусть компакт* $E \in B_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ *и подпоследовательность натуральных чисел* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ *удовлетворяет условию*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{\rho_\alpha(t)}{\ln t} > 0. \tag{5}$$

Тогда система функций (1) не полна в пространстве $A(E)$.

Доказательство. Рассматривая $A(E)$ как подпространство банахова пространства $C(\partial E)$ всех непрерывных на ∂E комплексных функций с нормой $\|f\| = \sup |f|(\partial E)$ и учитывая теоремы Хана-Банаха и Рисса, достаточно построить комплексную меру Бореля μ на ∂E, удовлетворяющую соотношениям

$$\int_{\partial E} z^{p_n} d\mu(z) = 0, \ n = 0, 1, \cdots, \tag{6}$$

$$\int_{\partial E} z^q d\mu(z) \neq 0, \ q \in \mathbf{N} \setminus \{p_n\}_{n=1}^\infty. \tag{7}$$

Для этого, замечая, что по (5) найдется такое β, $0 < \beta < \alpha$, что

$$\varliminf_{t\to+\infty} \rho_\beta(t) > -\infty, \tag{8}$$

рассмотрим функцию

$$f(z) = e^{Cz} h_\beta(z), \ \operatorname{Re} z > 0,$$

где $h_\beta(z)$ определяется по формуле (3) при $\alpha = \beta$, C — подходящая постоянная. Функция f голоморфна при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, $f(p_n+1) = 0$ при $n = 0, 1, \cdots$. Кроме того, из оценки (4) для $h_\beta(z)$ и (8) следует, что экспоненциального типа при $\operatorname{Re} z > 0$ и ее индикатриса $h(\varphi)$ удовлетворяет соотношениям

$$h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \pi\beta, \tag{9}$$

$$h(0) \leqslant C_3, \tag{10}$$

где C_3 — достаточно малое число за счет подходящего выбора постоянной C.

Рассмотрим теперь преобразование Лапласа F функции f. Как известно, $F(w)$ продолжается аналитически в область из $\mathbf{C}$, являющуюся объединением полуплоскостей

$$\operatorname{Re}(we^{-i\varphi}) > h(-\varphi), \ |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Обозначим через Γ образ кривой ∂E при отображении $z=Lnw$, содержащийся в полосе $\{w\in\mathbf{C}:|\mathrm{Im}\,w|<\pi\}$. Так как $E\in B_{\alpha}$, то при движении вдоль полосы $\{w\in\mathbf{C}:|\mathrm{Im}\,w|<\pi\alpha\}$ налево ветви кривой Γ, начиная с некоторого места, будут изнутри этой полосы приближаться к ее разным сторонам, как к своим касательным. Поэтому в силу условий (9), (10), $\beta<\alpha$ и выбором постоянной C можно обеспечить ограниченность $|F(w)|$ при $w\in\Gamma$ и справедливость (см. [6], стр. 78; [7]) формулы обращения

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}e^{zw}F(w)\,dw,\ \mathrm{Re}\,z>1,$$

где интеграл берется по направлению, положительному относительно множества особенностей F. Совершив замену переменной $e^{w}=t$, получим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial E}t^{z-1}F(\mathrm{Ln}\,t)\,dt,\ \mathrm{Re}\,z\geqslant 1$$

и остается отметить, что формула

$$\mu(e)=\int\limits_{e}F(\mathrm{Ln}\,t)\,dt$$

определяет на борелевских подмножествах $e\subseteq\partial E$ комплексную меру, удовлетворяющую (6), (7): ограниченность вариации μ следует из ограниченности $|F(\mathrm{Ln}\,t)|$ при $t\in\partial E$ и спрямляемости ∂E. Теорема доказана.

Установленная теорема приводит к интересному выводу относительно указанной в начале статьи общей задачи приближения многочленами с пропусками.

Отметим, что в работах [2], [4] при обсуждении условий теоремы A было установлено, что в случае, когда $0\in\partial E$, в этой теореме, вообще говоря, невозможно понижение плотности. Именно, были найдены такие компактные счетные множества E, $0\in\partial E$, удовлетворяющие условиям теоремы A, что для любого числа δ, $0\leqslant\delta<1$, *существует подпоследовательность* натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотности δ, для которой система функций (1) не полна в пространстве $A(E)$.

Из теоремы 1 непосредственно имеем

С л е д с т в и е. *Если компакт $E\in B_1$, то для любой последовательности натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{n}{p_n}<1,$$

система функций (1) *не полна в пространстве* $A(E)$.

3°. *Необходимое индивидуальное для компакта из* B_{α} *условие* равномерного приближения многочленами с пропусками удается получить при дополнительном ограничении на компакт в окрестности нуля. Формулировке и доказательству этого условия предпошлем одно понятие. Медленно изменяющейся функцией назовем положительную непрерывную на полуоси $t \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемую на $t > 0$ функцию l, для которой

$$\lim_{t \to +\infty} t \frac{l'(t)}{l(t)} = 0.$$

Для такой функции, как известно, функция $1 + \dfrac{\ln l(t)}{\ln t}$ является уточненным порядком в смысле Валирона при порядке один ([8], стр. 47). По заданной медленно изменяющейся функции l определим функцию l^* следующим образом:

$$l^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t \leqslant 1, \\ \int\limits_0^t u^{-1} l(u)\, du & \text{при } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *подпоследовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{t \to +\infty} \rho_\alpha(t) = +\infty \quad (0 < \alpha \leqslant 1), \tag{11}$$

и E — компакт из B_α, граница которого в некоторой окрестности нуля есть объединение дуг γ_1, γ_2, имеющих в полярных координатах r, θ $(-\pi < \theta \leqslant \pi)$, соответственно, уравнения

$$\theta = -\pi\alpha + \omega(r), \ \theta = \pi\alpha - \omega(r), \ 0 \leqslant r \leqslant a,$$

где $\omega(0) = 0$. Пусть существуют числа $p > 1$ и q, $0 < q < \dfrac{\pi}{2}$, непрерывная при $0 \leqslant r \leqslant a$ и положительная при $0 < r \leqslant a$ функция $\varkappa$, $\varkappa(0) = 0$, и медленно изменяющаяся ограниченная функция l такие, что

$$\lim_{t \to +\infty} \left[\rho_\alpha(t) - \frac{p}{2} l^*(t)\right] = +\infty \tag{12}$$

и при каком-нибудь b, $0 < b \leqslant a$,

$$\sup_{0 < r < b} \int\limits_0^{+\infty} \exp\left\{t\left[\omega(r) + \varkappa(r)\left(\ln\frac{1}{r} - 2\rho_\alpha(t) + pl^*(t)\right) - ql(t)\right]\right\} \times$$

$$\times \frac{dt}{1+t^2} < +\infty. \tag{13}$$

Тогда система функций (1) не полна в пространстве $A(E)$.

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1, достаточно построить комплексную меру Бореля μ на ∂E, удовлетворяющую (6), (7).

Для этого рассмотрим функцию

$$f(z)=e^{Cz}\frac{h_\alpha(z)}{g(z)},\ \operatorname{Re} z\geqslant 0,$$

где $h_\alpha(z)$ определяется формулой (3), C — подходящая постоянная и $g(z)$ — каноническое произведение Вейерштрасса с отрицательными нулями, имеющими функцию количества $n(t)=[tl(t)]$ при $t>t_1>0$ (здесь $[x]$ — целая часть x). Ясно, что f голоморфна при $\operatorname{Re} z\geqslant 0$ и $f(p_n+1)=0$ при $n=0,1,\cdots$. Чтобы оценить рост f отметим сперва, что из оценки (4) для $h_\alpha(z)$ имеем

$$|f(z)\,g(z)|\leqslant\frac{C_1}{1+|z|^2}\exp\left[\pi\alpha|z|-(C_2-C+2\rho_\alpha(|z|))\operatorname{Re} z\right],\ \operatorname{Re} z\geqslant 0, \tag{14}$$

где $C_1>0$, C_2 — постоянные. Далее, из известной асимптотики канонических произведений Вейерштрасса с нулями, лежащими на одном луче (см. [8], глава 1, лемма 9), следует, что соответственно случаям расходимости или сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty}t^{-1}\,l(t)\,dt$$

равномерно по φ, $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$, справедливы соотношения

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln|g(re^{i\varphi})|+\int_0^r t^{-1}\,dn(t)\,r\cos\varphi}{rl(r)(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)}=1 \tag{15}$$

или

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln|g(re^{i\varphi})|-\int_r^{+\infty}t^{-1}\,dn(t)\,r\cos\varphi}{rl(r)(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)}=1. \tag{16}$$

Поэтому замечая, что соответственно этим случаям имеем

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{l^*(r)}\int_0^r t^{-1}\,dn(t)=1,\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{l(r)}{l^*(r)}=0$$

или

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{l_1(r)}\int_r^{+\infty}t^{-1}\,dn(t)=1,\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{l(r)}{l_1(r)}=0,$$

где

$$l_1(r)=\int_r^{+\infty}t^{-1}\,l(t)\,dt,$$

и учитывая условия (11), (12), из (14)—(16) получим, что f экспоненциального типа при $\operatorname{Re} z\geqslant 0$ и ее индикатриса $h(\varphi)$ удовлетворяет соотношениям

$$h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\leqslant\pi\alpha, \tag{17}$$

$$h(\varphi)=-\infty,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}\cdot \tag{18}$$

Кроме того, при подходящем выборе постоянной C для фигурирующих в формулировке теоремы чисел $p>1$ и q, $0<q<\frac{\pi}{2}$, найдется такое число δ, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$, что при $\delta\leqslant|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$ будем иметь

$$|f(re^{i\varphi})|\leqslant\frac{C_1}{1+|z|^2}\exp\{\pi\alpha r-[1+2\rho_\alpha(r)-pl^*(r)]\,r\cos\varphi-qrl(r)\},\ r>0, \tag{19}$$

где постоянная $C_1>0$ не зависит от φ.

Рассмотрим теперь преобразование Лапласа функции f

$$F(w)=\int_0^{+\infty}e^{-wt}f(t)\,dt.$$

Как известно, $F(w)$ продолжается аналитически в область из $\mathbf{C}$, являющуюся объединением полуплоскостей

$$\operatorname{Re}(we^{-i\varphi})>h(-\varphi),\ |\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2},$$

причем продолжение в каждую полуплоскость задается формулой

$$F(w)=e^{-i\varphi}\int_0^{+\infty}f(te^{-i\varphi})\,e^{-twe^{-i\varphi}}\,dt,\ \operatorname{Re}(we^{-i\varphi})>h(-\varphi). \tag{20}$$

Обозначим через Γ образ кривой ∂E при отображении $z=\operatorname{Ln}w$, содержащийся в полосе $\{w\in\mathbf{C}:|\operatorname{Im}w|<\pi\}$ и через Γ_1, Γ_2 — части Γ, соответствующие при этом отображении дугам γ_1, γ_2. Так как $E\in B_\alpha$, то при движении вдоль полосы $\{w\in\mathbf{C}:|\operatorname{Im}w|<\pi\alpha\}$ налево ветви кривой Γ начиная с некоторого места будут изнутри этой полосы приближаться к ее разным сторонам, как к своим касательным. Поэтому, в силу (17), (18), будет справедлива (см. [6], стр. 78; [7]) формула обращения

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}e^{zw}F(w)\,dw,\ \operatorname{Re}z>0,$$

где интеграл берется по положительно ориентированной границе Γ_ε полуполосы $\{w\in\mathbf{C}:\operatorname{Re}w<x_0,\ |\operatorname{Im}w|<\pi\alpha+\varepsilon\}$, $0<\varepsilon<4-\pi\alpha$.

Докажем, что при $\operatorname{Re}z>1$ эта формула справедлива при замене контура Γ_ε на кривую Γ, положительно ориентированную относительно особенностей $F(w)$. Из (18) следует, что $F(w)$ голоморфна при $w\in\mathbf{C}$. Поэтому, учитывая интегральную теорему Коши, теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и спрямляемость, ∂E, достаточно установить равномерную ограниченность $|F(w)|$ по значениям w, лежащим на Γ и правее Γ при $|\mathrm{Im}\, w| \leqslant \pi\alpha + \varepsilon$ как только $\mathrm{Re}\, w$ достаточно мало. Положим $w = x + iy$, тогда $x = \ln r$, $y = \theta$, а дуги Γ_1, Γ_2 будут иметь в плоскости w, соответственно, уравнения $y = -\pi\alpha + \omega(e^x)$, $y = \pi\alpha - \omega(e^x)$, $x \leqslant \ln a$. Оценим $|F(w)|$ при $\pi\alpha - \omega(e^x) \leqslant y \leqslant \pi\alpha + \varepsilon$ или $-\pi\alpha - \varepsilon \leqslant y \leqslant -\pi\alpha + \omega(e^x)$ и при $x \leqslant \ln b_1$, где b_1, $0 < b_1 \leqslant b$ — достаточно малое число (b фигурирует в (13)). Для этого замечая, что в силу (18) для $w \in C$ формула (20) справедлива при любом φ, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, выберем φ в (20) следующим образом: при $-\pi\alpha - \varepsilon \leqslant y \leqslant -\pi\alpha + \omega(e^x)$ положим $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$, $\cos\varphi = \varkappa(e^x)$, а при $\pi\alpha - \omega(e^x) \leqslant y \leqslant \pi\alpha + \varepsilon$ положим $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = \varkappa(e^x)$, где $\varkappa$ — заданная по условию теоремы функция. Тогда, так как для достаточно близких к $\frac{\pi}{2}$ значений φ, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, справедливо неравенство $1 - \sin\varphi \leqslant \frac{1}{4}\cos\varphi$, то учитывая свойства функции $\varkappa$ и выбирая достаточно малым число b_1, $0 < b_1 < b$, при $x \leqslant \ln b_1$ из (19), (20) получим

$$|F(x+iy)| \leqslant C_3 \int_0^{+\infty} \exp\{t[\pi\alpha - y\sin\varphi - (1 + 2\rho_\alpha(t) - pl^*(t) + x)\cos\varphi - $$

$$- ql(t)]\}\frac{dt}{1+t^2} \leqslant C_3 \int_0^{+\infty} \exp\Big\{t\Big[\omega(e^x) + \varkappa(e^x)\Big(-1 - 2\rho_\alpha(t) + pl^*(t) - x + $$

$$+ \frac{\pi\alpha + \varepsilon}{4}\Big) - ql(t)\Big]\Big\}\frac{dt}{1+t^2}.$$

Отсюда с помощью условий $\varepsilon < 4 - \pi\alpha$ и (13) следует, что при $x \leqslant \ln b_1$ $|F(x+iy)|$ равномерно ограничен по y, где $\pi\alpha - \omega(e^x) \leqslant y \leqslant \pi\alpha + \varepsilon$ или $-\pi\alpha - \varepsilon \leqslant y \leqslant \pi\alpha + \omega(e^x)$, и, таким образом, установлена справедливость требуемой формулы

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{zw} F(w)\, dw, \quad \mathrm{Re}\, z > 1.$$

Совершая замену переменной $e^w = t$, будем иметь

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E} t^{z-1} F(\mathrm{Ln}\, t)\, dt, \quad \mathrm{Re}\, z \geqslant 1,$$

и теперь остается отметить, что формула

$$\mu(e) = \frac{1}{2\pi i}\int_e F(\mathrm{Ln}\, t)\, dt$$

определяет на борелевских подмножествах $e \subseteq \partial E$ комплексную меру удовлетворяющую (6), (7), причем ограниченность вариации μ следует из ограниченности $|F(\mathrm{Ln}\, t)|$ при $t \in \partial E$ и спрямляемости ∂E. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что если граничные дуги компактов $E_i \in B_\alpha$ $(i=1, 2)$ в некоторой окрестности нуля задаются, соответственно, уравнениями

$$\theta_i = -\pi\alpha + \omega_i(r),\ \theta_i = \pi\alpha - \omega_i(r),\ 0 \leqslant r \leqslant a,$$

причем $\omega_2(r) \leqslant \omega_1(r)$ при $0 \leqslant r \leqslant a$, то E_2 удовлетворяет предположениям теоремы 2, как только удовлетворяет им E_1.

Теорему 2 следует воспринимать как общую схему для получения необходимых индивидуальных условий приближения на компактах класса B_α. Вывод с ее помощью конкретных необходимых условий приближения требует оптимального выбора по функции ω вспомогательных функций $\varkappa$, l и параметров p, q. Легко видеть, что параметры $p>1$ и q, $0<q<\frac{\pi}{2}$, естественно брать достаточно близкими к 1 и $\frac{\pi}{2}$ соответственно. Более тонкий вопрос—выбор функции $\varkappa$. Мы произведем выбор $\varkappa$ в случае возрастающей, по существу выпуклой функции ω.

Теорема 3. *Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — подпоследовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию* (11), *и E—компакт из B_α, граница которого в некоторой окрестности нуля есть объединение дуг γ_1, γ_2, имеющих в полярных координатах r, θ $(-\pi<\theta\leqslant\pi)$, соответственно, уравнения*

$$\theta = -\pi\alpha + \omega(r),\ \theta = \pi\alpha - \omega(r),\ 0 \leqslant r < a,$$

где функция ω, $\omega(0)=0$, возрастает и дважды дифференцируема при $0<r\leqslant a$, причем

$$\omega'(r) + r\omega''(r) > 0 \quad \text{при} \quad 0<r\leqslant a,$$

$$\lim_{r\to 0} r\omega'(r)\ln\frac{1}{r} = 0.$$

Пусть существуют числа $p>1$, q $\left(0<q<\frac{\pi}{2}\right)$ и медленно изменяющаяся ограниченная функция l такие, что имеет место (12) *и для достаточно большого $c>0$*

$$\int_c^{+\infty} \exp\{t[\omega(r_t) - ql(t)]\}\frac{dt}{1+t^2} < +\infty, \tag{21}$$

где

$$\ln\frac{1}{r_t} = 2\rho_\varkappa(t) - pl^*(t),\ t \geqslant c.$$

Тогда система функций (1) *не полна в пространстве* $A(E)$.

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условия (13) теоремы 2 при $b=a$ и допустимой функции $\varkappa$.

Для этого определим $\varkappa$ следующим образом: $\varkappa(r) = r\omega'(r)$ при $0 < r \leqslant a$ и $\varkappa(0) = 0$. Легко видеть, что при предположениях теоремы относительно функции ω, введенная функция $\varkappa$ непрерывна при $0 \leqslant r \leqslant a$, положительна, возрастает и дифференцируема при $0 < r \leqslant a$, причем

$$\lim_{r\to 0} \varkappa(r) \ln \frac{1}{r} = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим при $0 \leqslant r \leqslant a$ функцию

$$y(r) = \exp\left\{t\left[\omega(r) + \varkappa(r)\left(\ln\frac{1}{r} - 2\rho_\alpha(t) + pl^*(t)\right)\right]\right\},$$

где t — постоянная, взятая в силу (11), (12) настолько большой, что $y(a) \leqslant 1$. Функция $y(r)$ непрерывна при $0 \leqslant r \leqslant a$, дифференцируема при $0 < r \leqslant a$, причем $y(0) = 1$, в силу (22) и $\omega(0) = 0$. Точки экстремума этой функции удовлетворяют уравнению

$$\ln\frac{1}{r} = 2\rho_\alpha(t) - pl^*(t).$$

Так как левая часть выписанного уравнения непрерывна при $0 < r \leqslant a$ и убывает, начиная от $+\infty$, то при достаточно больших t, в силу (11), (12), это уравнение имеет единственный корень r_t, причем $\lim\limits_{t\to+\infty} r_t = 0$. Поэтому увеличив при необходимости постоянную t, можно считать, что $0 < r_t < a$ при $t \geqslant c > 0$. Ясно, что при $t > c$

$$y(r_t) = \exp[\omega(r_t)] > 1$$

и значит при $t > c$ r_t будет точкой максимума функциии $y(r)$, $0 \leqslant r \leqslant a$. Для завершения доказательства теперь остается отметить, что условие (13) теоремы 2 при $b = a$ непосредственно следует из (21), (22). Теорема доказана.

Отметим, что теорема 3 (с учетом замечания к теореме 2) прозрачно выявляет зависимость необходимых условий приближения многочленами с пропусками на компактах из B_α от порядка касания в нуле граничных дуг этих компактов со сторонами угла $\{z \in \mathbf{C}: |\arg z| < \pi\alpha\}$. Приведем несколько следствий этой теоремы, в которых осуществлен выбор вспомогательной функции l.

Следствие 1. *Если в теореме 2*

$$\omega(r) \sim C_1 \exp(-C_2 r^{-\beta}) \quad \textit{при} \quad r \to 0,$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $\beta > 0$, *то неполнота* (1) *имеет место при условии*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{\rho_\alpha(t) - \frac{1}{2\beta}\ln\ln\ln t}{\ln\ln\ln\ln t} > \frac{1}{2\beta}.$$

Следствие 2. *Если в теореме 2*

$$\omega(r) \sim C_1 r^\beta \quad \textit{при} \quad r \to 0,$$

где $C_1 > 0$, $\beta > 0$, *то неполнота (1) имеет место при условии*

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\rho_\alpha(t)-\frac{1}{2\beta}\ln\ln t}{\ln\ln\ln t}>\frac{1}{2\beta}.$$

Следствие 3. *Если в теореме 2*

$$\omega(r)\sim C_1\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{1-\beta}\ \textit{при}\ r\to 0,$$

где $C_1>0$, $\beta>1$, *то неполнота (1) имеет место при условии*

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\rho_\alpha(t)}{(\ln t)^{1/\beta}}>\left(\frac{2C_1\beta}{\pi}\right)^{1/\beta}.$$

Следствие 4. *Если в теореме 2*

$$\omega(r)\sim C_1\left(\ln\ln\frac{1}{r}\right)^{-1}\ \textit{при}\ r\to 0,$$

где $C_1>0$, *то неполнота (1) имеет место при условии*

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\rho_\alpha(t)}{\ln t}\ln\ln t>\frac{C_1}{\pi}.$$

Следствия 1—4 получаются из теоремы 3, если при $t\geqslant t_0>0$ выбрать в качестве функции $l(t)$, соответственно,

$$\varepsilon(\ln t\ln\ln t\ln\ln\ln t)^{-1},\ \varepsilon(\ln t\ln\ln t)^{-1},\ \frac{1}{\beta}\left(\frac{2C_1\beta}{\pi}\right)^{1/\beta}(\ln t)^{-(1-1/\beta)},$$

$$\frac{2C_1(1+\varepsilon)}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\ln t}{\ln\ln t}\right)\right]^{-1},$$

где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число; при этом выбор параметров p, q не представляет трудности.

4°. Результаты предыдущего пункта позволяют установить *точность условия* (2) *теоремы A*. Приведем сперва обобщение одного результата из [4].

Следствие 5. *Если для подпоследовательности натуральных чисел* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{t\to+\infty}\rho_\alpha(t)=+\infty\quad(0<\alpha\leqslant 1),$$

то существуют компакты $E\in B_\alpha$, *для которых система (1) не полна в пространстве* $A(E)$.

Доказательство. Достаточно указать функцию ω, удовлетворяющую условиям теоремы 2. Для этого положим в теореме 2 $\varkappa(r)=\omega(r)$, $0\leqslant r\leqslant a$, и будем считать, что для функции l

$$\int_1^{+\infty}t^{-1}l(t)\,dt<+\infty,\ \text{т. е. } l^*<C_1.$$

Пусть $s(r)$ — определенная при $0<r\leqslant 1$ положительная невозрастающая функция, $\lim\limits_{r\to 0}s(r)=+\infty$, для которой $\rho_\alpha(t)>\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{r}+C_1+1\right)$

при $t \geqslant s(r)$. Подберем непрерывную при $0 \leqslant r \leqslant a$ и положительную при $0 < r \leqslant a$ функцию $\omega(r)$ так, что $\omega(0)=0$ и

$$0 < \omega(r)\, s(r) \ln \frac{1}{r} \leqslant 1 \quad \text{при} \quad 0 < r \leqslant b \leqslant \min\{a, e^{-1}\}.$$

Тогда при $0 < r \leqslant b$ интеграл из (13) не превосходит

$$\int_0^{+\infty} \exp\left\{t\omega(r)\left[\ln\frac{1}{r} + 1 + C_1 - 2\rho_\alpha(t)\right]\right\}\frac{dt}{1+t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{s(1)} \exp\left\{t\omega(r)\left[\ln\frac{1}{r} + 1 + C_1 - 2\rho_\alpha(t)\right]\right\}\frac{dt}{1+t^2} +$$

$$+ e\int_{s(1)}^{s(r)} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{s(r)}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi}{2}(e+1) +$$

$$+ \int_0^{s(1)} \exp\left\{t\omega(r)\left[\ln\frac{1}{r} + 1 + C_1 - 2\rho_\alpha(t)\right]\right\}\frac{dt}{1+t^2},$$

а последний интеграл равномерно ограничен при $0 < r \leqslant b$, в силу условия $\lim\limits_{r\to 0} \omega(r) \ln \frac{1}{r} = 0$. Следствие доказано.

Докажем теперь следующую геометрическую лемму.

Лемма. *Пусть выпуклая жорданова дуга γ в полярных координатах r, θ $(-\pi < \theta \leqslant \pi)$ задается уравнением*

$$\theta = \pi\alpha - \omega(r) \; (\theta = -\pi\alpha + \omega(r)), \; 0 \leqslant r \leqslant a, \; 0 < \alpha < 1,$$

где функция ω, $\omega(0)=0$ и $0 < \omega(r) < \pi\alpha$ при $0 < r \leqslant a$, имеет непрерывную производную $\omega'(r) > 0$ при $0 < r < a$, причем

$$\lim_{r\to 0} r\omega'(r) = 0. \tag{23}$$

Тогда для произвольных чисел C и ε, $0 \leqslant C < 1$, $0 < \varepsilon < 1 - \sqrt{C}$, расстояние $d_\gamma(t)$ от точки t до дуги γ при достаточно малых $|t|$ удовлетворяет оценкам:

$$d_\gamma(t) \geqslant (1-\varepsilon)[(1-\varepsilon)^2 - C]\,|t|\,\omega((1-\varepsilon)|t|) \quad \text{при}$$

$$\pi\alpha - C\omega(C|t|) < \arg t \leqslant \pi\alpha, \tag{24}$$

$$d_\gamma(t) < (1+\varepsilon)^2 |t|\, \omega((1+\varepsilon)|t|) \; \text{при} \; \pi\alpha - \omega(|t|) < \arg t \leqslant \pi\alpha. \tag{25}$$

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем, когда $\alpha = 1$ и дуга γ задается уравнением $\theta = \pi - \omega(r)$, $0 \leqslant r \leqslant a$. В этом случае декартовы координаты γ имеют вид $x = r\cos\theta = -r\cos\omega(r)$, $y = r\sin\theta = r\sin\omega(r)$. Так как с учетом (23) $x'(r) < 0$ при достаточно малых r, то для таких r функция $x = x(r)$ имеет непрерывную обратную функцию. Поэтому для достаточно малых по модулю и отрицательных x определена непрерывная функция $y = y(x)$. Для нее имеем

$$y'(x)=\frac{\sin\omega(r)+r\omega'(r)\cos\omega(r)}{-\cos\omega(r)+r\omega'(r)\sin\omega(r)},$$

откуда, с учетом предположений леммы относительно ω получим, что для достаточно малых по модулю и отрицательных x $y'(x)$ непрерывна и $y'(x)<0$, причем $\lim\limits_{x\to -0} y'(x)=0$. Следовательно, при достаточно малых $|t|$ через каждую точку t, $\pi-\omega(|t|)<\arg t\leqslant\pi$, будет проходить нормаль к дуге γ, пересекающая γ в единственной точке $M(x_t;\ y_t)\neq 0$. Ограничимся рассмотрением только таких точек t.

Обозначая $r_t=(x_t^2+y_t^2)^{1/2}$, уравнение указанной нормали

$$y-y_t=-\frac{1}{y'(x_t)}(x-x_t)$$

приведем к следующему виду:

$$y-r_t\sin\omega(r_t)=\frac{\cos\omega(r_t)-r_t\omega'(r_t)\sin\omega(r_t)}{\sin\omega(r_t)-r_t\omega'(r_t)\cos\omega(r_t)}(x+r_t\cos\omega(r_t)).$$

Прохождение нормали через точку t дает соотношение ($\beta=\arg t$)

$$|t|\sin\beta-r_t\sin\omega(r_t)=\frac{\cos\omega(r_t)-r_t\omega'(r_t)\sin\omega(r_t)}{\sin\omega(r_t)+r_t\omega'(r_t)\cos\omega(r_t)}\times$$
$$\times(|t|\cos\beta+r_t\cos\omega(r_t)),\tag{26}$$

откуда имеем

$$|t|\left[-\cos\beta+\sin\beta\frac{\sin\omega(r_t)+r_t\omega'(r_t)\cos\omega(r_t)}{\cos\omega(r_t)-r_t\omega'(r_t)\sin\omega(r_t)}\right]=$$
$$=r_t\left[\cos\omega(r_t)+\sin\omega(r_t)\frac{\sin\omega(r_t)+r_t\omega'(r_t)\cos\omega(r_t)}{\cos\omega(r_t)-r_t\omega'(r_t)\sin\omega(r_t)}\right].$$

Отсюда учитывая, что $\pi-\omega(|t|)<\beta\leqslant\pi$ и $\lim\limits_{t\to 0} r_t=0$, а также предположения леммы относительно $\omega(r)$, получим

$$\lim_{t\to 0}\frac{r_t}{|t|}=1.\tag{27}$$

Далее, в силу (26) имеем

$$d_\gamma(t)=[(|t|\cos\beta+r_t\cos\omega(r_t))^2+(|t|\sin\beta-r_t\sin\omega(r_t))^2]^{1/2}=$$
$$=\left||t|\sin\beta-r_t\sin\omega(r_t)\right|\left\{1+\left[\frac{\sin\omega(r_t)+r_t\omega'(r_t)\cos\omega(r_t)}{\cos\omega(r_t)-r_t\omega'(r_t)\sin\omega(r_t)}\right]^2\right\}^{1/2},$$

откуда получим

$$\lim_{t\to 0}\frac{\left||t|\sin\beta-r_t\sin\omega(r_t)\right|}{d_\gamma(t)}=1.\tag{28}$$

Теперь уже оценки (24), (25) в случае $\alpha=1$ легко следуют из (27), (28) и монотонности ω. В самом деле, пусть числа C и ε удовлетворяют предположениям леммы. Тогда, если $|t|$ достаточно мало и $\pi - C\omega\ (C|t|) \leqslant \arg t \leqslant \pi$, то

$$d_\gamma(t) \geqslant (1-\varepsilon)|r_t \sin\omega(r_t) - |t|\sin\beta| >$$
$$\geqslant (1-\varepsilon)[(1-\varepsilon)|t|\sin\omega(r_t) - |t|\sin\{C\omega(C|t|)\}] \geqslant$$
$$\geqslant (1-\varepsilon)[(1-\varepsilon)^2|t|\omega(r_t) - C|t|\omega(C|t|)] \geqslant (1-\varepsilon)[(1-\varepsilon)^2 - C]|t|\omega((1-\varepsilon)|t|).$$

С другой стороны, если $|t|$ достаточно мало и $\pi - \omega(|t|) < \arg t \leqslant \pi$, то имеем

$$d_\gamma(t) \leqslant (1+\varepsilon)\max[|t|\sin\omega(|t|),\ r_t\sin\omega(r_t)] \leqslant (1+\varepsilon)^2|t|\omega((1+\varepsilon)|t|).$$

Лемма доказана.

Комбинирование теоремы 3 и приведенной леммы позволяет доказать точность условия (2) теоремы A. В частности, из следствия 4 и леммы (при $\omega(r) = C_1\left(\ln\ln\frac{1}{r}\right)^{-1}$, $C_1 > 0$) получаем следующее

Следствие 6. *Для любой подпоследовательности натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотности единица, удовлетворяющей условию*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{p_1(t)}{\ln t}\ln\ln t > \frac{C_1}{\pi},$$

существует компакт $E \in B_1$, для которого система (1) не полна в пространстве $A(E)$ и выполняются условия:

1) *для любой последовательности $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ из $\mathbf{C}\setminus E$, $\lim\limits_{m\to+\infty} h_m = 0$, имеем*

$$\varlimsup_{m\to+\infty} d_E(h_m)\frac{\ln\ln|h_m|^{-1}}{|h_m|} < +\infty;$$

2) *существуют такие последовательности $\{h'_m\}_{m=1}^{\infty}$ из $\mathbf{C}\setminus E$, $\lim\limits_{m\to+\infty} h'_m = 0$, что*

$$\varliminf_{m\to+\infty} d_E(h'_m)\frac{\ln\ln|h'_m|^{-1}}{|h'_m|} > 0.$$

Замечания 1. В работе [4] были найдены дополнительные условия на компакт приближения, обеспечивающие возможность понижения плотности в теореме A в случае, когда $0 \in \partial E$ (см. стр. 170). Отметим, в этой связи, что для указанного уточнения теоремы A справедливы утверждения типа следствия 6, получающиеся переходом от класса B_1 к B_α, $0 < \alpha < 1$.

2. Результаты работы, как показывает простой анализ, остаются в силе при замене подпоследовательности натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательностью возрастающих положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h > 0$ при $n = 1, 2, \cdots$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5. VII. 1984

Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Հարթության վրա բացթողումներով բազմանդամներով հավասարաչափ մոտավորության մասին (*ամփոփում*)

Դիցուք B_α*-ն*, $0<\alpha<1$, *բոլոր այն* $E\subset C$, $0\in\partial E$ *կոմպակտների դասն է, որոնցից յուրաքանչյուրը սահմանափակված է ուղղելի Ժորդանյան կորով, օժտված հետևյալ հատկությամբ. զրոյի որևէ շրջակայքում (յուրաքանչյուր կոմպակտի համար՝ իրենը) ընկած նրա կորը տրոհվում է զրոյով երկու աղեղների, որոնք, զրոյից բացի, գտնվում են* $\{z\in C: |\arg z|<\pi\alpha\}$ *անկյան մեջ և որոնք ունեն միակողմանի շոշափողներ զրոյում համընկնող այդ անկյան տարբեր կողմերի հետ։*

Ներկա աշխատանքում հետազոտվում են B_α, $0<\alpha<1$, *դասի կոմպակտների վրա բացթողումներով բազմանդամներով հավասարաչափ մոտավորության անհրաժեշտ պայմանները (թեորեմներ 1—3). Ստացված արդյունքների միջոցով ապացուցվում է կամայական զրո խտությամբ բացթողումներով բազմանդամներով հավասարաչափ մոտավորության վերաբերյալ [4]-ի թեորեմ* Λ*-ի ճշգրտությունը (հետևանք 6)։*

V. A. MARTIROSIAN. *On intform approximation on the plane by polynomials with gaps* (summary)

Let B_α, $0<\alpha<1$ be the class of compacts $E\subset C$, $0\in\partial E$, bounded by rectifiable Jordan curves. We assume that in each case the boundary of E in some neighbourhood of zero is separated by zero in two arcs, which lie within the angle $\{z\in C: |\arg z|<\pi\alpha\}$ and have the sides of this angle for the one sided tangents at zero.

In the persent work necessary conditions of uniform approximation by polynomials with gaps on compacts of the class B_α, $0<\alpha<1$ are investigated (theorems 1—3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного. УМН, VII, вып. 2 (48), 1952, 31—122.
2. *Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян.* Равномерные приближения на комплексной плоскости многочленами с пропусками, ДАН СССР, 235, № 2, 1977, 249—252.
3. *В. А. Мартиросян.* О равномерном приближении на комплексной плоскости многочленами с пропусками, ДАН Арм.ССР, 68, № 3, 1979, 129—136.
4. *В. А. Мартиросян.* О равномерном комплексном приближении многочленами с пропусками Мат. сборник, 120 (162), № 4, 1983, 451—472.
5. *W. J. Fuchs.* A generalization of Carlson's theorem, J. London Math. Soc., 21 1946, 106—110.
6. *R. P. Boas.* Entire functions, New York, Academic Press, 1954.
7. *A. J. MacIntyre.* Laplace's transformation and integral functions, Proc. London Math. Soc. (2), 45, 1938, 1—20.
8. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.