

УДК 517.5

К. С. КАЗАРЯН

СУММИРУЕМОСТЬ И СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ ОБОБЩЕННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ И ФУРЬЕ—ХААРА

Введение

Если дана некоторая полная ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определенных на множестве E , $|E| > 0$, функций, то для представления функции f , имеющей особенности в некоторых точках, рядом по системе Φ сходящимся в том или ином смысле, целесообразно рассматривать обобщенные ряды Фурье по системе Φ , что означает ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \varphi_n(x)$, где

$$a_n(f) = \int_E f(t) [\varphi_n(t) - P(\varphi_n)(t)] dt, \quad (0.1)$$

P — линейный оператор, определенный на конечных линейных комбинациях системы Φ . Оператор P определяется в зависимости от системы Φ , множества точек, где функции f имеет особенности, и порядка особенностей в этих точках таким образом, чтобы функции $P(\varphi_n)(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) интерполировали функции $\varphi_n(t)$ в заданных точках с такой кратностью, чтобы интеграл в правой части (0.1) был конечен.

В настоящей работе рассматриваются обобщенные ряды Фурье для тригонометрической системы и системы Хаара. Для тригонометрической системы рассматривается случай, когда число точек интерполирования и кратность в них конечны. Для случая системы Хаара, ввиду кусочно-постоянности функций Хаара, понятие кратности интерполирования теряет смысл. В этом случае благодаря простой конструкции функций Хаара удастся рассматривать обобщенные ряды Фурье—Хаара с бесконечным числом точек интерполирования. В § 2 дается описание множеств, для которых мы можем провести такие построения для системы Хаара.

В настоящей работе доказывается суммируемость почти всюду методом Абеля—Пуассона обобщенного ряда Фурье функции f к ней. Результаты, касающиеся тригонометрической системы, со всеми необходимыми определениями излагаются в § 1 настоящей работы. Теорема 1 обобщает приводимую ниже теорему Фату для функций, имеющих особенности конечного порядка в конечном числе точек.

Теорема Фату. Пусть $f \in L_{[-\pi, \pi]}$, тогда ряд Фурье этой функции

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt,$$

почти всюду методом Абеля—Пуассона суммируется к ней, более того гармоническая функция в единичном круге

$$U_1(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$$

почти всюду сходится к ней по некасательным путям.

Теорема 1 и ее дальнейшие обобщения могут иметь отношение к следующей задаче:

дана произвольная измеримая функция своими значениями, определить коэффициенты тригонометрического ряда, изображающего ее.

В своей монографии «Интеграл и тригонометрический ряд» (см. [1]) Н. Н. Лузин уделил большое внимание этой задаче, называя ее задачей Фурье. Но учитывая, что в приведенной общей формулировке впервые эту задачу изучал Н. Н. Лузин, правомерно будет назвать ее задачей Фурье—Лузина. Имеет смысл рассмотреть аналогичную задачу и для других ортонормированных систем (см. [1], стр. 49—51). Обычно система Хаара больше чем какая-либо другая система доступна изучению. Настоящий случай не является исключением из этого общего правила. Согласно теореме Хаара [2] имеем, что для любой интегрируемой по Лебегу функции ее ряд Фурье—Хаара почти всюду сходится к ней. Не удивительно, что для системы Хаара удастся доказать аналоги результатов, справедливых для тригонометрической системы, полагая сходимости почти всюду вместо суммируемости. Более того, для системы Хаара доказываются результаты, аналоги которых в тригонометрическом случае для нас в настоящее время не доступны изучению. Результаты, касающиеся тригонометрической системы и системы Хаара, независимы и формулируются по-разному, хотя общая схема их доказательств одинаковая. Поэтому соответствующие определения и обозначения отдельно приводятся в каждом случае.

Ряды с коэффициентами, определяемыми формулами (0.1), в связи с другими вопросами были рассмотрены в ряде работ автора [3], [4], [5] и т. д., в работах В. Ф. Гапошкина [6], [7] и других. Особенно хочется отметить работы А. Ю. Петровича [8], [9] и М. И. Дьяченко [10], в которых рассмотрены обобщенные ряды Фурье для функций, имеющих особенность только в одной точке. В этих работах изучается сходимость рядов в индивидуальных точках, и они стали нам известны, когда рукопись настоящей работы была готова к печати. Поэтому в § 1 не упоминается о поведении обобщенных рядов Фурье в индивидуальных точках, несмотря на то, что подобные результаты сразу получаются применением в доказательстве вместо упомянутой выше теоремы Фату соответствующего классического результата.

Хочется также отметить интересный способ, которым в работе [9] определены обобщенные ряды Фурье для функций, имеющих в одной точке особенность бесконечного порядка. Обобщенные ряды Фурье для функ-

ций, имеющих особенности бесконечного порядка, в настоящей работе определены исходя из другого принципа. Для случая тригонометрической системы это приводит к задачам, которые для нас недоступны и по всей видимости очень сложны. Эти задачи представляют также интерес и с точки зрения мультипликативного дополнения неполных систем.

§ 1. Случай тригонометрической системы

Приведем некоторые необходимые определения.

Определение 1. Будем говорить, что измеримая функция $f(x)$ в точке x_0 имеет особенность порядка k ($k = 1, 2, \dots$) степени q , если существует положительное число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$(x - x_0)^{k-1} f(x) \notin L^q_{(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)}; (x - x_0)^k f(x) \in L^q_{(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)}.$$

Определение 2. Скажем, что измеримая функция $f(x)$ в точке x_0 имеет особенность бесконечного порядка степени q , если для любых натуральных чисел k ($k = 1, 2, \dots$) и любого $\delta > 0$

$$(x - x_0)^k f(x) \notin L^q_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}.$$

Если $q = 1$, то будем просто говорить, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет особенность порядка k . Замыкание системы функций $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ в метрике пространства L будем обозначать $R(\Psi)$.

Определение 3. Если $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — некоторая подсистема тригонометрической системы, $E \subset [-\pi, \pi]$ и $\chi_E(x)$ — функция, определенная на множестве E и принимающая ненулевые целочисленные значения и ∞ , то пару $\{E, \chi_E(x)\}$ будем называть характеристикой единственности подсистемы $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, если из того, что

$$F \in R(\Phi), F \in L^{\infty}_{[-\pi, \pi]}$$

и функция F^{-1} в каждой точке x_0 множества E имеет особенность порядка $\chi_E(x)$ степени ∞ , следует

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \varphi_n(t) dt = 0, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Определение 4. Будем говорить, что $\{E, \chi_E(x)\}$ является минимальной характеристикой единственности подсистемы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ относительно полной ортонормированной системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$, если для любой функции $\varphi_0(x)$ из системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$, ортогональной всем $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) $\{E, \chi_E(x)\}$, являясь характеристикой единственности для подсистемы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, не является характеристикой единственности для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=2}^\infty$.

В настоящем параграфе далее будем предполагать, что на полуинтервале $[-\pi, \pi]$ дан произвольный набор различных точек $x = \{x_j\}_{j=1}^s$ и каждой точке x_j из этого набора соответствует некоторое натуральное число a_j , $N = \{a_j\}_{j=1}^s$. Обозначая $\Lambda = \sum_{j=1}^s a_j$, для данных x

и N определим набор фундаментальных интерполирующих полиномов $T(x_j, \lambda, x)$ ($1 \leq j \leq s$; $0 \leq \lambda \leq a_j - 1$) следующим образом. Если $\Lambda = 2N + 1$ ($N = 0, 1, \dots$), то $T(x_j, \lambda, x)$ — тригонометрический полином самое большее N -го порядка, определяемый из следующих условий:

$$T^{(h)}(x_j, \lambda, x_l) = \delta_{lj} \cdot \delta_{h\lambda}, \quad (1.1)$$

где $T^{(h)}$ означает производную h -го порядка, $T^{(0)} \equiv T$ и δ_{lj} — символ Кронекера. Если $\Lambda = 2N$ ($N = 1, 2, \dots$), то кроме условий (1.1) на полиномы N -го порядка $T(x_j, \lambda, x)$ ($1 \leq j \leq s$, $0 \leq \lambda \leq a_j - 1$) налагается также условие, чтобы или порядок был строго меньше N или в этих полиномах отношение коэффициента при $\sin Nx$ к коэффициенту при $\cos Nx$ было равно отношению коэффициента при $\cos Nx$ к коэффициенту при $\sin Nx$ со знаком минус тригонометрического полинома

$$\omega(x) = \prod_{1 \leq j \leq s} \sin^{a_j} \frac{x - x_j}{2}. \quad (1.2)$$

Когда в $\omega(x)$ коэффициент при $\cos Nx$ или при $\sin Nx$ равен нулю, то в полиномах $T(x_j, \lambda, x)$ коэффициенты соответственно при $\sin Nx$ или $\cos Nx$ должны быть равными нулю. Для случая, когда $\Lambda = 2N$, это условие налагается, чтобы полиномы $T(x_j, \lambda, x)$ были единственными.

Доказывается следующая

Теорема 1. Пусть $x = \{x_j\}_{j=1}^s$ — совокупность различных точек на полуинтервале $[-\pi, \pi)$, $N = \{a_j\}_{j=1}^s$ — набор натуральных чисел и f — измеримая функция, которая в каждой точке x_j ($1 \leq j \leq s$) имеет особенность порядка a_j и в других точках не имеет особенностей. Пусть, далее, $\Lambda = \sum_{j=1}^s a_j$ и K_Λ — целая часть числа $\Lambda/2$.

Тогда ряд $\sum_{n=K_\Lambda+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\cos nt - \sum_{j=1}^s \sum_{\lambda_j=0}^{a_j-1} \frac{d^{\lambda_j}}{dt^{\lambda_j}} \cos nt \right]_{t=x_j} \cdot T(x_j, \lambda_j, t) dt, \quad (1.3)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\sin nt - \sum_{j=1}^s \sum_{\lambda_j=0}^{a_j-1} \frac{d^{\lambda_j}}{dt^{\lambda_j}} \sin nt \right]_{t=x_j} \cdot T(x_j, \lambda_j, t) dt, \quad (1.4)$$

методом Абеля—Пуассона почти всюду суммируется к данной функции f , более того, гармоническая в единичном круге функция

$$U_r(f, x) = \sum_{n=K_\Lambda+1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n \quad (1.5)$$

почти всюду сходится к f по некасательным путям.

Для доказательства теоремы 1 докажем две леммы, соответственно для случаев четного и нечетного Λ . Сначала приведем некоторые обозначения. Обозначим

$$\xi_r(x) = 1 - 2r \cos x + r^2; P_r(x) = (1 - r^2) \xi_r^{-1}(x) = 1/2 + \sum_{v=1}^{\infty} r^v \cos vx,$$

где $P_r(x)$ — ядро Пуассона,

$$P_{z, n, r}(x, t) = P_r(x - t) - \sum_{j=1}^s \sum_{\lambda_j=0}^{*j-1} P_r^{(\lambda_j)}(x_j - t) T(x_j, \lambda_j, x), \quad (1.6)$$

$$B_{rj}(x, t) = P_r(x - t) T(x_j, 0, x) - \sum_{\lambda_j=0}^{*j-1} P_r^{(\lambda_j)}(x_j - t) T(x_j, \lambda_j, x), \quad (1.7)$$

где $P_r^{(\lambda)}(\xi) = \frac{d^\lambda}{d\xi^\lambda} P_r(\xi)$, $P_r^{(0)}(\xi) = P_r(\xi)$. Используем равенство

$$\sum_{j=1}^s T(x_j, 0, x) \equiv 1, \quad (1.8)$$

которое при $\Lambda = 2N + 1$ сразу следует из теоремы о единственности интерполяции тригонометрическими полиномами, а при $\Lambda = 2N$ нужно также заметить, что согласно дополнительному условию, наложенному на многочлены $T(x_j, \lambda, x)$,

$$\sum_{j=1}^s T(x_j, 0, x) = 1$$

не может совпадать с полиномами вида $C \omega(x)$. Из (1.6) — (1.8) получаем

$$P_{z, n, r} = \sum_{j=1}^s B_{rj}(x, t). \quad (1.9)$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $\Lambda = 2N + 1$ ($N = 0, 1, \dots$), тогда для любого j ($1 \leq j \leq s$) имеет место равенство

$$B_{rj}(x, t) = P_r(x - t) \omega(x) \left[G_r'(t) \sin \frac{x - x_j}{2} + G_r^*(t) \cos \frac{x - x_j}{2} \right], \quad (1.10)$$

где

$$G_r'(t) = P_1(\xi_r^{-1}(t - x_j), r, \sin(t - x_j), \cos(t - x_j)),$$

$$G_r^*(t) = P_2(\xi_r^{-1}(t - x_j), r, \sin(t - x_j), \cos(t - x_j))$$

и $P_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, $P_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ — многочлены от переменных $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

Лемма 2. Пусть $\Lambda = 2N$ ($N = 1, 2, \dots$), тогда для любого j ($1 \leq j \leq s$) имеет место равенство

$$B_{rj}(x, t) = P_r(x - t) \omega(x) [G_r'(t) \sin(x - x_j) + G_r^*(t) \cos(x - x_j) + G_r''(t)], \quad (1.11)$$

где

$$G_r'(t) = P_1(\xi_r^{-1}(t - x_j), r, \sin(t - x_j), \cos(t - x_j)),$$

$$G_r^*(t) = P_2(\xi_r^{-1}(t - x_j), r, \sin(t - x_j), \cos(t - x_j)),$$

$$G_r''(t) = P_3(\xi_r^{-1}(t - x_j), r, \sin(t - x_j), \cos(t - x_j))$$

и $P_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ ($i = 1, 2, 3$) — полиномы от переменных ξ_k ($k = 1, 2, 3, 4$).

Доказательство леммы 1. Обозначим

$$T_{rj}(x, t) = (x_j, 0, x) - P_r^{-1}(x-t) \sum_{\lambda=0}^{a_j-1} P_r^{(\lambda)}(x_j-t) T(x_j, \lambda, x). \quad (1.12)$$

Очевидно, что для фиксированных t и r $T_{rj}(x, t)$ по x является тригонометрическим полиномом $N+1$ -го порядка и в точках x_i ($1 \leq i \leq s$, $i \neq j$) имеет нули порядка a_i . Покажем, что $T_{rj}(x, t)$ в точке $x = x_j$ имеет нуль порядка a_j . Из определения $T_{rj}(x, t)$ сразу следует, что $T_{rj}(x_j, t) = 0$. Предполагая, что для неотрицательного целого числа k ($0 \leq k < a_j - 1$) $\frac{d^k}{dx^k} T_{rj}(x, t)|_{x=x_j} = 0$ ($0 \leq k < a_j - 1$), покажем, что

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} T_{rj}(x, t)|_{x=x_j} = 0.$$

Из нашего предположения получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} B_{rj}(x, t)|_{x=x_j} &= \sum_{v=0}^{k+1} \binom{v}{k+1} P_r^{(v)}(x_j-t) \frac{d^{k+1-v}}{dx^{k+1-v}} T_{rj}(x, t)|_{x=x_j} = \\ &= P_r(x_j-t) \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} T_{rj}(x, t)|_{x=x_j}. \end{aligned}$$

Откуда, ввиду того, что $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} B_{rj}(x, t)|_{x=x_j} = 0$ ($0 \leq k < a_j - 1$) и $P_r(x_j-t) \neq 0$ ($0 < r < 1$) получаем $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} T_{rj}(x, t)|_{x=x_j} = 0$. Следовательно, показано, что

$$\frac{d^v}{dx^v} T_{rj}(x, t)|_{x=x_j} = 0 \quad (0 \leq v \leq a_j - 1). \quad (1.13)$$

Отсюда очевидно следует, что сумма

$$T_{rj}(x, t) + P_r^{-1}(x-t) P_r^{(a_j-1)}(x_j-t) T(x_j, a_j-1, x)$$

при фиксированных t и r в точках x_i ($1 \leq i \leq s$, $i \neq j$) имеет нули порядка a_i , а в точке x_j нуль порядка a_j-1 и является тригонометрическим полиномом $N+1$ -го порядка.

Следовательно

$$\begin{aligned} T_{rj}(x, t) + P_r^{-1}(x-t) P_r^{(a_j-1)}(x_j-t) T(x_j, a_j-1, x) = \\ = \omega_j(x) \sin^{a_j-1} \frac{x-x_j}{2} L_{rj}(x, t), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где

$$\omega_j(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ k \neq j}} \sin^{a_k} \frac{x-x_k}{2}, \quad (1.15)$$

$$L_{rj}(x, t) = \beta_{r1}(t) + \beta_{r2}(t) \cos(x-x_j) + \beta_{r3}(t) \sin(x-x_j) \quad (1.16)$$

и функции $\beta_{r1}(t)$, $\beta_{r2}(t)$, $\beta_{r3}(t)$ являются многочленами от четырех переменных $\xi_r^{-1}(t-x)$, r , $\sin(t-x_j)$, $\cos(t-x_j)$. Последнее утверждение сразу получаем приравнивая, для фиксированных r , t , коэффи-

циенты при старших членах и свободные члены многочленов, стоящих в обеих частях равенства (1.14). В равенстве (1.14), подставляя

$$T(x_j, \alpha_j - 1, x) = b_j \omega'_j(x) \sin^{\alpha_j-1} \frac{x - x_j}{2},$$

где b_j — константа, определяемая из условия $T^{(\alpha_j-1)}(x_j, \alpha_j - 1, x_j) = 1$, получаем

$$T_{rj}(x, t) = \omega'_j(x) \sin^{\alpha_j-1} \frac{x - x_j}{2} [L_{rj}(x, t) - b_j P_r^{-1}(x - t) P^{(\alpha_j-1)}(x_j - t)]. \quad (1.17)$$

Очевидными тригонометрическими преобразованиями из условия (1.16) получаем

$$\begin{aligned} L_{rj}(x, t) - b_j P_r^{-1}(x - t) P^{(\alpha_j-1)}(x_j - t) &= \beta_{r1}(t) - \\ &- b_j \frac{1+r^2}{1-r^2} P_r^{(\alpha_j-1)}(x_j - t) + \cos(x - x_j) \left[\beta_{r2}(t) + \right. \\ &+ 2 b_j \frac{r}{1-r^2} P_r^{(\alpha_j-1)}(x_j - t) \cos(t - x_j) \left. \right] + \sin(x - x_j) \left[\beta_{r3}(t) + \right. \\ &+ 2 b_j \frac{r}{1-r^2} P_r^{(\alpha_j-1)}(x_j - t) \sin(t - x_j) \left. \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Отсюда сразу следует, что

$$\begin{aligned} \beta_{r1}(t) - b_j \frac{1+r^2}{1-r^2} P_r^{(\alpha_j-1)}(x_j - t) &= \\ = \left[\beta_{r2}(t) + 2 b_j \frac{r}{1-r^2} P_r^{(\alpha_j-1)}(x_j - t) \cos(t - x_j) \right], \end{aligned} \quad (1.19)$$

так как из условия (1.13) $\frac{d^{\alpha_j-1}}{dx^{\alpha_j-1}} T_{rj}(x, t)|_{x=x_j} = 0$ и из (1.17) получаем $L_{rj}(x, t) - b_j P_r^{-1}(x - t) P^{(\alpha_j-1)}(x_j - t) = 0$.

Из соотношений (1.18) и (1.19) следует

$$\begin{aligned} L_{rj}(x, t) - b_j P_r^{-1}(x - t) P^{(\alpha_j-1)}(x_j - t) &= \\ = -2 \sin^2 \frac{x - x_j}{2} \left[\beta_{r2}(t) + 2 b_j \frac{r}{1-r^2} P_r^{(\alpha_j-1)}(x_j - t) \cos(t - x_j) \right] &= \\ = \sin(x - x_j) \left[\beta_{r3}(t) + 2 b_j \frac{r}{1-r^2} P_r^{(\alpha_j-1)}(x_j - t) \sin(t - x_j) \right], \end{aligned}$$

откуда немедленно получаем требования леммы 1, учитывая утверждение, касающееся функций $\beta_{r1}(t)$, $\beta_{r2}(t)$, $\beta_{r3}(t)$.

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Оно проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 1. Как и там получаем тождество (1.14), где уже

$$L_{rl}(x, t) = \beta_{r1}(t) \cos \frac{x-x_l}{2} + \beta_{r2}(t) \sin \frac{x-x_l}{2} + \\ + \beta_{r3}(t) \cos 3/2 (x-x_l) + \beta_{r4}(t) \sin 3/2 (x-x_l),$$

и для функций $\beta_{rl}(t)$ ($l = 1, 2, 3, 4$) справедливо подобное утверждение. Следующее различие, на которое следует обратить внимание, это то, что при $\Lambda = 2N$

$$T(0, a_l - 1, x) = b_l \omega_l(x) \sin^{a_l-1} \frac{x-x_l}{2} \cos \frac{x-x_l}{2}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что тригонометрический многочлен, определенный условием (1.20), удовлетворяет условиям (1.1), а также дополнительному условию, налагаемому при $\Lambda = 2N$. Учитывая эти различия и следуя схеме доказательства леммы 1 получаем утверждение леммы 2, где уже

$$G_r'(t) = -2\beta_{r3}(t) - b_l \frac{2r}{1-r^2} P_r^{(a_l-1)}(x_l-t) \cos(t-x_l),$$

$$G_r''(t) = 2\beta_{r4}(t) + b_l \frac{2r}{1-r^2} P_r^{(a_l-1)}(x_l-t) \sin(t-x_l),$$

$$G_r'''(t) = \beta_{r2}(t) + \beta_{r4}(t) + b_l \frac{2r}{1-r^2} P_r^{(a_l-1)}(x_l-t) \sin(t-x_l).$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим следующее ядро:

$$P_{rN}(x) = P_r(x) - 1/2 - \sum_{v=1}^N r^v \cos vx. \quad (1.21)$$

Из условий (1.3)–(1.5) и (1.21) легко получаем, что

$$U_r(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[P_{r, k_\Lambda}(t-x) - \sum_{j=1}^s \sum_{\lambda=0}^{a_j-1} P_r^{(\lambda, j)}(x_j-x) T(x_j, \lambda_j, t) \right] dt. \quad (1.22)$$

Убедимся в справедливости тождества

$$P_r(t-x) - \sum_{j=1}^s \sum_{\lambda=0}^{a_j-1} P_r^{(\lambda, j)}(x_j-x) T(x_j, \lambda_j, t) \equiv \\ \equiv P_{r, k_\Lambda}(t-x) - \sum_{j=1}^s \sum_{\lambda=0}^{a_j-1} P_{r, k_\Lambda}^{(\lambda, j)}(x_j-x) T(x_j, \lambda_j, t). \quad (1.23)$$

Действительно, учитывая тождество (1.8), получаем

$$1/2 + \sum_{v=1}^{k_\Lambda} r^v \cos v(t-x) - \sum_{j=1}^s \sum_{\lambda=0}^{a_j-1} \frac{d^{\lambda, j}}{dt^{\lambda, j}} \left[1/2 + \sum_{v=1}^{k_\Lambda} r^v \cos v(t-x) \right] \Big|_{t=x_j} \times$$

$$\begin{aligned} \times T(x_j, \lambda_j, t) &= 1/2 - 1/2 \sum_{j=1}^s T(x_j, 0, t) + \sum_{j=1}^{s_\Lambda} r^j \left[\cos v(t-x) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^s \sum_{\lambda=0}^{a_j-1} \frac{d^{\lambda_j}}{dt^{\lambda_j}} \cos v(t-x) \right]_{t=x_j} \cdot T(x_j, \lambda_j, t) \Big] = \\ &= \sum_{j=1}^{s_\Lambda} r^j \left[\cos v(t-x) - \sum_{j=1}^s \sum_{\lambda=0}^{a_j-1} \frac{d^{\lambda_j}}{dt^{\lambda_j}} \cos(t-x) \right]_{t=x_j} T(x_j, \lambda_j, t) \Big] \equiv 0. \end{aligned}$$

Последнее тождество следует из теоремы о единственности интерполирующего полинома. Когда $\Lambda = 2N + 1$ ($N = 0, 1, 2, \dots$) ввиду того, что левая часть этого тождества является полиномом N -ой степени, имеющим нули в точках x_j ($1 \leq j \leq s$) соответственно порядка a_j ($\sum_{j=1}^s a_j = \Lambda$). Если $\Lambda = 2N$ ($N = 1, 2, \dots$), то нужно также учесть, что согласно условию, налагаемому в этом случае на полиномы $T(x_j, \lambda_j, t)$ ($0 \leq \lambda_j \leq a_j - 1$, $1 \leq j \leq s$), левая часть последнего тождества не может совпадать с полиномами вида $C\omega(x)$, где

$$\omega(x) = \prod_{1 \leq j \leq s} \sin^{a_j} \frac{x - x_j}{2}$$

и C — некоторая постоянная. Таким образом, тождество (1.23) доказано. Из условий (1.21) — (1.23) сразу получаем

$$U_r(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t) \left[P_r(t-x) - \sum_{j=1}^s \sum_{\lambda=0}^{a_j-1} P^{(\lambda_j)}(x_j-x) T(x_j, \lambda_j, t) \right] dt.$$

Отсюда, из условий (1.6), (1.7), (1.9), лемм 1, 2 и теоремы Фату, ввиду того, что $f \in L_{[-\pi, \pi]}(|\omega| dx)$, легко следует сходимости почти всюду по некасательным путям функции $U_r(f, x)$. Для завершения доказательства теоремы 1 нам остается убедиться, что $U_r(f, x)$ сходится к функции $f(x)$.

Сначала рассмотрим случай $\Lambda = 2N + 1$ ($N = 0, 1, 2, \dots$). Применяя теорему 1 работы [4] легко убеждаемся, что система $\{\omega(x) \cos nx, \omega(x) \sin nx\}_{n=k_\Lambda}^{\infty}$, где $\omega(x)$ определяется условием (1.2), замкнута и минимальна в пространстве $L_{[-\pi, \pi]}(|\omega| dx)$, откуда сразу следует, что система $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k_\Lambda+1}^{\infty}$ замкнута и минимальна в весовом пространстве $L_{[-\pi, \pi]}(|\omega(x)| dx)$. Следовательно, во-первых, конечные линейные комбинации системы $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k_\Lambda+1}^{\infty}$ всюду плотны в пространстве $L_{[-\pi, \pi]}(|\omega(x)| dx)$ и, во-вторых, для произвольной такой линейной конечной комбинации $l(x)$ гармоническая функция $U_r(l, x)$ сходится к $f(x)$ по всем некасательным путям. Поэтому, учитывая, что в теореме 1 функция f принадлежит пространству $L_{[-\pi, \pi]}(|\omega(x)| dx)$ из Принципа Банаха ([11], см. также [12], стр. 1—3), выводим, что $U_r(f, x)$ почти всюду по некасательным путям сходится к $f(x)$.

Для случая $\Lambda = 2N$ ($N = 1, 2, \dots$) рассуждения аналогичны. В этом случае уже нужно показать, что система

$$[\lambda_N \cos Nx + \gamma_N \sin Nx, \cos (N+1)x, \sin (N+1)x, \dots],$$

где $\lambda_N^2 + \gamma_N^2 = 1$ и γ_N/λ_N равно отношению коэффициента при $\sin Nx$ к коэффициенту при $\cos Nx$ тригонометрического полинома $\omega(x)$, является замкнутой и минимальной в пространстве $L_{[-\pi, \pi]}(|\omega(x)| dx)$. Для этого теорему 1 работы [4] применяем к системе

$$\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos (N-1)x, \sin (N-1)x, \gamma_N \cos Nx - \lambda_N \sin Nx, \lambda_N \cos Nx + \gamma_N \sin Nx, \dots\}.$$

Теорема 1 доказана.

Дальнейшее продвижение в этом вопросе, на наш взгляд, связано со следующей задачей, которая на сегодняшний день кажется недоступной.

Задача 1. Описать все те бесконечные подсистемы тригонометрической системы, которые имеют минимальные характеристики единственности (см. опред. 4), и для каждой такой подсистемы описать все минимальные характеристики единственности.

К сожалению ни для одной бесконечной подсистемы тригонометрической системы мы не можем доказать существование минимальной характеристики единственности. Можно рассмотреть также вопросы в некотором смысле обратные к поставленной задаче. Взяв некоторую пару $\{E, \chi_E(x)\}$ (см. определение 3), найти подсистему, для которой эта пара является минимальной характеристикой единственности. Для случая, когда функция $\chi_E(x)$ в некоторой точке принимает значение ∞ или сумма значений $\chi_E(x)$ не ограничена, ответ на этот вопрос открыт.

§ 2. Случай системы Хаара

Напомним определение системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (см. [13], с. 54—55)

$$\chi_0^{(j)}(x) \equiv 1 \quad (0 \leq x < 1)$$

$$\chi_k^{(j)}(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{если } \frac{2j-2}{2^{k+1}} < x < \frac{2j-1}{2^{k+1}} \\ -2^{k/2}, & \text{если } \frac{2j-1}{2^{k+1}} < x < \frac{2j}{2^{k+1}} \\ 0, & \text{если } x \notin \left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k} \right], \end{cases}$$

где для каждого $k=0, 1, 2, \dots$ индекс j пробегает значения $1, 2, \dots, 2^k$. Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара, упорядоченная обычным образом: $\chi_0^{(0)}(x) = \chi_1(x)$, а при

$$n = 2^k + j (k=0, 1, 2, \dots; j=1, 2, \dots, 2^k), \quad \chi_k^{(j)}(x) = \chi_n(x).$$

Изучая обсуждаемый вопрос для системы Хаара будем считать, что каждая двоично-рациональная точка v на интервале $[0, 1]$ «расщеплена» на две различные точки v_* и v_* , характеризующиеся тем, что для любых $a < v < b$

$$v_1 \in (a, v], v_1 \notin [v, b) \text{ и } v_n \in [v, b), v_n \notin (a, v].$$

Поэтому говоря об окрестностях точек v_1 и v_n соответственно подразумеваются интервалы вида (a, v) и (v, b) . Необходимость такой договоренности диктуется тем, что в двоично-рациональных точках некоторые функции Хаара разрывны. Значения функций Хаара $\chi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) в точках v_1 и v_n определяются следующим образом:

$$\chi_n(v_1) = \lim_{a \rightarrow v-} \chi_n(a); \quad \chi_n(v_n) = \lim_{b \rightarrow v+} \chi_n(b).$$

Интервалами Хаара будем называть замкнутые сегменты, являющиеся замыканиями носителей функций Хаара. Изучая вопрос для системы Хаара и говоря, что некоторая функция $f(x)$ в точке v_1 или v_n имеет особенность, соответственно, понимаем, что

$$\int_a^v |f(x)| dx = +\infty; \quad \int_v^b |f(x)| dx = +\infty.$$

Так как функции Хаара кусочно-постоянны, то говорить о порядке особенности в настоящем параграфе нет нужды. Учитывая вышесказанное, для подсистем системы Хаара, как и в случае тригонометрической системы, определяются характеристика единственности и минимальная характеристика единственности. Очевидно, что в этих случаях функцию $\chi_E(x)$ можем считать характеристической функцией множества E . Через Δ_n будем обозначать множество $\{x : \chi_n(x) \neq 0\}$. Замкнутое множество точек $E \subset [0, 1]$ будем называть разряженным по Хаару, если существуют такие непересекающиеся интервалы Хаара, что в каждую из них попадает самое большее одна точка из множества E и объединение этих интервалов имеет меру, равную единице.

Пусть γ равно мощности множества E , т. е. $\gamma = \infty$, если E — счетное множество и $\gamma = N$, если E состоит из N точек. Определим некоторую подсистему системы Хаара $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, для которой пара $\{E, \chi_E(x)\}$ является минимальной характеристикой единственности. Пусть $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ состоит из следующих функций Хаара:

функции Хаара, тождественно равной единице и всех тех и только тех функций Хаара, замыкание левых и правых половин которых содержат хотя бы одну точку из множества E . Подсистему $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, выбранную указанным образом, будем называть аннулирующей подсистемой Хаара множества E .

Лемма 3. $\{E, \chi_E(x)\}$ является характеристикой единственности для $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — аннулирующей подсистемы Хаара множества E (E — множество, разряженное по Хаару).

Доказательство. Возьмем произвольную функцию

$$f \in R[\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}] \text{ и } f \in L_{[0,1]}^{\infty}.$$

Из предположения, касающегося множества E и выбора подсистемы $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ очевидно, что f — ступенчатая функция. Ряд Фурье—Хаара функции f очевидно почти всюду сходится к f , и согласно лемме Шаудера [14] его частичные суммы на интервалах постоянства Δ_n

равны $1/|\Delta_n| \int_{\Delta_n} f(t) dt$, откуда следует, что если $|f(x)| \leq M$ почти всюду, то

$$\left| \sum_{i=1}^N a_{n_i} \chi_{n_i}(x) \right| < M, \quad (2.1)$$

где

$$a_{n_i} = \int_0^1 f(t) \chi_{n_i}(t) dt. \quad (2.2)$$

Предположим, что функция f^{-1} в каждой точке множества E имеет особенность. Покажем, что в этом случае все коэффициенты a_{n_i} определяемые условием (2.2), равны нулю. Для этого докажем следующее

Утверждение. Если для некоторой функции Хаара $\chi_{n_{i_0}}(x)$ из подсистемы $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ множество $E \cap \Delta_{n_{i_0}}$ имеет самое большее одну точку сгущения, то коэффициент Фурье—Хаара $a_{n_{i_0}}$ функции f равен нулю, $a_{n_{i_0}} = 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда множество $E \cap \Delta_{n_{i_0}}$ состоит из конечного числа точек. В этом случае, согласно выбору аннулирующей подсистемы Хаара множества $E - \{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, получаем, что из этой подсистемы только конечное число функций Хаара на $\Delta_{n_{i_0}}$ принимают ненулевые значения. Выберем среди таких функций функцию Хаара $\chi_{n_{i_1}}(x)$ с наибольшим индексом. Ввиду того, что как в левой, так и в правой половинах $\Delta_{n_{i_1}}$ есть хотя бы одна точка из E и функция f равна нулю в этих точках, получаем $a_{n_{i_1}} = 0$.

Предположим теперь, что $E \cap \Delta_{n_{i_0}}$ состоит из счетного числа точек, которые имеют только одну точку сгущения. Пусть

$$\sum_{|\Delta_{n_i}| > |\Delta_{n_{i_0}}|} a_{n_i} \chi_{n_i}(x) = c_0 \quad \text{при } x \in \Delta_{n_{i_0}}. \quad (2.3)$$

Если $c_0 = 0$, то сразу получаем $a_{n_{i_0}} = 0$. Пусть $c_0 \neq 0$. Очевидно, что в левой или в правой половине $\Delta_{n_{i_0}}$ находится только конечное число точек из E . Обозначим этот интервал Хаара через $\Delta'_{n_{i_0}}$. Точно таким же образом, как и выше выводим, что коэффициенты всех тех функций Хаара из $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, носители которых лежат в этой половине, равны нулю. Следовательно

$$\sum_{|\Delta_{n_i}| > |\Delta_{n_{i_0}}|} a_{n_i} \chi_{n_i}(x) = 0 \quad \text{при } x \in \Delta'_{n_{i_0}}.$$

Отсюда и из (2.3) получаем, что

$$\sum_{|\Delta_{n_i}| > |\Delta_{n_{i_0}}|} a_{n_i} \chi_{n_i}(x) = 2c_0, \quad x \in \Delta_{n_{i_0}} \setminus \Delta'_{n_{i_0}}. \quad (2.4)$$

Из подсистемы $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ выберем ту функцию Хаара с наименьшим индексом, носитель которой лежит в $\Delta_{n_{i_0}} \setminus \Delta'_{n_{i_0}}$. Точно таким же образом, как и выше получаем, что сумма

$$\sum_{|\Delta_{n_i}| > |\Delta_{n_{i_0}}|} a_{n_i} \chi_{n_i}(x)$$

на одной половине $\Delta_{n_{i_0}}$ равна нулю, а на другой — $2^2 c_0$. Повторяя эти рассуждения k раз, получаем, что на одной из половин интервала $\Delta_{n_{i_k}}$ сумма $\sum_{|\Delta_{n_i}| > |\Delta_{n_{i_k}}|} a_{n_i} \chi_{n_i}(x)$ равна $2^{k+1} c_0$. Выбирая k довольно большим,

приходим к противоречию с условием (2.1). Следовательно, $c_0 = 0$ и тем самым $a_{n_{i_0}} = 0$. Утверждение доказано.

Перейдем к доказательству леммы 3. Если $\gamma < \infty$, то очевидно, что лемма 3 сразу вытекает из доказанного выше утверждения. Поэтому предположим, что $\gamma = \infty$. Так как множество E разряжено по Хаару, то можно найти такое разбиение $\{\Delta^v\}_{v \in I(E)}$ отрезка $[0, 1]$, которое обладает следующими свойствами: Δ^v — интервалы Хаара, которые не пересекаются и $\bigcup_{v \in I(E)} \Delta^v = [0, 1]$, для любого $v \in I(E)$ множество $\Delta^v \cap E$ имеет самое большее одну точку сгущения и любой интервал Хаара Δ , содержащий Δ^v ($\Delta \supset \Delta^v$), содержит по крайней мере две точки сгущения множества E .

Такое разбиение будем называть S_E -разбиением отрезка $[0, 1]$. Очевидно оно определяется единственным образом. Определим замкнутое множество $E_1 \subset E$ следующим образом:

для каждого $v \in I(E)$ в интервале Δ^v берем самое большее одну точку x_v , следуя правилу: x_v является точкой сгущения множества $E \cap \Delta^v$, если такая точка существует; является одной из точек $E \cap \Delta^v$, если оно состоит из конечного числа точек, и наконец, если $E \cap \Delta^v$ — пустое множество, то мы не выбираем какую либо точку. Замыкание выбранного множества обозначим E_1 . Если S_E -разбиение отрезка $[0, 1]$ состоит только из $[0, 1]$, то $E_1 = \emptyset$.

Очевидно, что множество $E_1 \subset E$ разряжено по Хаару. Если множество E_1 не пусто, то возьмем S_{E_1} -разбиение отрезка $[0, 1]$ и аналогичным образом построим множество E_2 . Для каждого натурального числа n по индукции точно таким же образом определим множество E_n , связанное с множеством E_{n-1} , если $E_{n-1} \neq \emptyset$. Таким образом получим последовательность разряженных по Хаару замкнутых и вложенных друг в друга множеств $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$, $E_0 = E$:

$$E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots \quad (2.5)$$

Далее нам понадобится понятие порядкового числа. Мы будем следовать обозначениям и определениям книги И. П. Натансона (см. 15, глава 14). Порядковое число множества всех натуральных чисел, расположенных в естественном порядке $\{1, 2, \dots\}$, будем обозначить ω . Вторым числовым классом k_0 называется множество всех порядковых чисел, являющихся типами счетных вполне упорядоченных множеств. Первый числовой класс есть множество $\{0, 1, 2, \dots\}$. Для всякого порядкового числа из второго

числового класса определим множество E_α следующим образом: если α — число первого рода (т. е. оно имеет непосредственно предшествующее число) и β — непосредственно предшествующее его порядковое число, то E_α определяется с помощью E_β таким же образом как E_n из E_{n-1} . Если α число второго рода, то

$$E_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} E_\beta. \quad (2.6)$$

Очевидно, что для любого порядкового числа α множество E_α разрежено по Хаару, замкнуто и

$$E_\alpha \subset E_\beta, \text{ если } \beta < \alpha. \quad (2.7)$$

Возьмем S_E -разбиение отрезка $[0,1] - (\Delta')_{\Delta' \in I(E)}$. Через $|n_i(0)|_{i=1}^\infty$ обозначим индексы всех тех функций Хаара, которые входят в подсистему $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^\infty$ и носители которых совпадают или лежат в одном из интервалов Хаара Δ' ($\Delta' \in I(E)$). Легко видеть, что подсистема

$$\{\chi_{n'_i(0)}(x)\}_{i=1}^\infty = \{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^\infty \setminus \{\chi_{n_i(0)}(x)\}_{i=1}^\infty$$

состоит из всех тех функций $\chi_{n'_i(0)}(x)$ ($i=1, 2, \dots$) Хаара, в каждой половине носителя которых находится хотя бы одна точка из E_1 . Следовательно, для множества E_1 и подсистемы $\{\chi_{n'_i(0)}(x)\}_{i=1}^\infty$ можем применить доказанное выше утверждение. Если для некоторого натурального числа n $E_n = \emptyset$, то очевидно, что лемма доказана. В противном случае замечаем, что подсистема Хаара

$$\{\chi_{n'_i(\omega)}(x)\}_{i=1}^\infty, \text{ где } |n'_i(\omega)|_{i=1}^\infty = |n_i|_{i=1}^\infty \setminus \bigcup_{j=0}^{\omega-1} |n_i(j)|_{i=1}^\infty$$

является аннулирующей подсистемой Хаара множества E_ω , следовательно для них опять можем применить доказанное выше утверждение. Пусть α — число второго класса и ни одно из множеств E_β , $\beta < \alpha$ не является пустым множеством. Легко показать, что подсистема $\{\chi_{n'_i(\alpha)}(x)\}_{i=1}^\infty$, где $\{n'_i(\alpha)\} = |n_i|_{i=1}^\infty \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} |n_i(\beta)|_{i=1}^\infty$ является аннулирующей подсистемой Хаара множества E_α . Применим следующий (см. [15], стр. 381)

Принцип стационарности Кантора-Бэра. Пусть всякому порядковому числу α из первого или второго числового класса отвечает замкнутое множество E_α , причем из $\alpha < \beta$ следует $E_\beta \subset E_\alpha$

$$E_0 \supset E_1 \supset \dots \supset E_\alpha \supset \dots$$

Тогда все множества цепочки $\{E_\alpha\}$, начиная с некоторого, совпадают друг с другом, т. е. найдется такое порядковое число $\mu < \Omega$, что $E_\mu = E_{\mu+1} = \dots$

Отсюда, ввиду того, что в нашем построении условие $E_\mu = E_{\mu+1}$ может выполняться только в том случае, когда $E_\mu = \emptyset$, получаем утверждение леммы 3.

Покажем, что пара $\{E, \chi_E(x)\}$ является минимальной характеристикой единственности подсистемы $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ относительно системы Хаара. Возьмем произвольное натуральное число n ($n \neq n_i$; $i=1, 2, \dots$) и убедимся в том, что существуют такие единственные вещественные числа $\{a_i^{(n)}\}$, для которых линейная комбинация функций Хаара

$$\chi_n(x) + \sum_{\Delta_{n_i} \supset \Delta_n} a_i^{(n)} \chi_{n_i}(x) = 0 \text{ при } x \in E. \quad (2.8)$$

Пусть $0 = n_1 < n_{i_1} < \dots < n_{i_{k(n)}}$ — все те индексы из $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, пронумерованные в естественном порядке, для которых $\Delta_{n_{i_j}} \supset \Delta_n$ ($j=1, 2, \dots, k(n)$). Если $\Delta_{n_{i_1}}$ не совпадает с отрезком $[0, 1]$, то согласно выбору подсистемы $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ имеем, что в $[0, 1] \setminus \Delta_{n_{i_1}}$ нет точек множества E . Обозначим через $\Delta'_{n_{i_1}}$ ту половину интервала $\Delta_{n_{i_1}}$, которая не содержит Δ_n . Выберем число $b_2^{(n)}$ таким образом, чтобы

$$\chi_0(x) + b_2^{(n)} \chi_{n_{i_1}}(x) = 0 \text{ при } x \in \Delta'_{n_{i_1}}. \quad (2.9)$$

Легко видеть, что вне множества $\Delta'_{n_{i_1}} \cup \Delta_{n_{i_2}}$ также нет точек из E . Выберем число $b_3^{(n)}$ таким образом, чтобы

$$\chi_0(x) + b_2^{(n)} \chi_{n_{i_1}}(x) + b_3^{(n)} \chi_{n_{i_2}}(x) = 0 \text{ при } x \in \Delta'_{n_{i_1}} \cup \Delta'_{n_{i_2}}. \quad (2.10)$$

Продолжая этот процесс, через конечное число шагов получаем, что вне множества $\bigcup_{j=1}^{k(n)-1} \Delta'_{n_{i_j}} \cup \Delta_{n_{i_{k(n)}}$ нет точек из

$$E \cap (\Delta_{n_{i_{k(n)}}} \setminus \Delta_n) = \emptyset \quad (2.11)$$

и существуют числа $\{b_j^{(n)}\}_{j=2}^{k(n)}$ такие, что

$$\chi_0(x) + \sum_{j=2}^{k(n)} b_j^{(n)} \chi_{n_{i_j}}(x) = 0 \text{ при } x \in \bigcup_{j=2}^{k(n)} \Delta'_{n_{i_j}}. \quad (2.12)$$

Согласно выбору подсистемы $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, точки из множества E могут находиться только в одной из половин интервала Δ_n . Эту половину обозначим Δ'_n . Соответствующим образом выбирая число $b_n \neq 0$ получаем, что

$$\chi_0(x) + \sum_{j=2}^{k(n)} b_j^{(n)} \chi_{n_{i_j}}(x) + b_n \chi_n(x) = 0 \text{ при } x \in \bigcup_{j=2}^{k(n)} \Delta'_{n_{i_j}} \cup \Delta'_n,$$

откуда сразу следует (2.8).

Сейчас покажем, что если возьмем неотрицательную функцию $M(x)$, имеющую в каждой точке множества E особенность некоторого порядка степени ∞ , то система

$$\{M(x) \chi_n(x); n \neq n_i, i=1, 2, \dots\}$$

будет замкнутой и минимальной в пространстве $L_{[0, 1]}$. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4. Пусть ортонормированная система функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на измеримом множестве G , полна относительно L_0 и $f_n \in L_0^q$ ($n=1, 2, \dots$). Пусть далее, $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторая подсистема системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $M \in L_p^q$ ($1 \leq p < \infty$). Тогда для того, чтобы система $\{M(x) f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ была замкнута, минимальна в пространстве L_0^p необходимо и достаточно, чтобы соответственно имели место следующие условия 1), 2).

1) Функция $[M(x)]^{-1} g(x)$, где $g \in L_0^p$ ($p^{-1} + q^{-1} = 1$) и

$$a_m = \int_0^1 g(t) f_m(t) dt = 0$$

для любого натурального $m \neq n_i$ ($i=1, 2, \dots$), принадлежит пространству L_0^q тогда и только тогда, когда

$$a_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots);$$

2) Для каждого натурального числа n ($n \neq n_i$, $i=1, 2, \dots$) существует некоторая функция $g_n(x)$, $g_n \in L_0^q$ такая, что для любого $m \neq n_i$ ($i=1, 2, \dots$)

$$\int_0^1 [g_n(t) - f_n(t)] f_m(t) dt = 0 \text{ и } [M(x)]^{-1} [g_n(x) - f_n(x)] \in L_0^q.$$

Доказательство леммы 4 получается почти дословным повторением доказательства теоремы 1 работы [4], поэтому его не будем приводить. Считаем необходимым отметить, что идея этого доказательства восходит к Р. Боасу и Г. Полларду [16]. Из лемм 3, 4 и условия (2.8) сразу получаем, что система $\{M(x) \chi_n(x); n \neq n_i, i=1, 2, \dots\}$ замкнута и минимальна в пространстве $L_{[0,1]}$. Таким образом, мы уже проделали всю необходимую работу для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $E \subset [0, 1]$ — произвольное замкнутое разрывное по Хаару множество, f — произвольная измеримая функция, имеющая в каждой точке множества E особенность конечного или бесконечного порядка. Пусть, далее, $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — аннулирующая подсистема Хаара множества E . Тогда ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) = f(x) \quad \text{почти всюду,} \quad (2.13)$$

где

$$a_n = 0, \quad \text{если } n = n_i \quad (2.14)$$

и когда $n \neq n_i$

$$a_n = \int_0^1 f(t) \left[\chi_n(t) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} \chi_{n_i}(t) \right] dt, \quad (2.15)$$

где коэффициенты $\{a_i^{(n)}\}$ определяются единственным образом согласно условию (2.8).

Для доказательства теоремы 2 сначала покажем, что ряд по системе Хаара $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$, коэффициенты которого определяются условиями (2.14), (2.15), почти всюду сходится. Ввиду того, что множество E является разряженным по Хаару, можем найти счетное число непересекающихся интервалов Хаара $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что мера объединения $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ равна единице и

$$\Gamma_n \cap E = \emptyset \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2.16)$$

Для любого натурального числа n ($n=1, 2, \dots$) рассмотрим все те функции Хаара, носители которых лежат в Γ_n . Из (2.8), (2.15), (2.16) имеем, что коэффициенты этих функций в ряде (2.13) являются коэффициентами Фурье—Хаара. Следовательно, часть ряда (2.13), взятая только по этим функциям, почти всюду сходится на Γ_n , а вне Γ_n все функции равны нулю. Таким образом, рассматривая часть ряда (2.13), в которую входят только те функции Хаара, носители которых лежат в одном из интервалов Γ_n ($n=1, 2, \dots$), получаем сходящийся почти всюду на $[0, 1]$ ряд. Но очевидно, что оставшаяся часть ряда (2.13) тоже почти всюду сходится, так как верхний предел носителей функций Хаара из этой части состоит самое большее из счетного числа точек. Остальная часть доказательства совпадает с доказательством аналогичной части теоремы 1. То, что система $\{\chi_n(x); n \neq n_i, i=1, 2, \dots\}$ является замкнутой минимальной в некотором весовом пространстве $L_{[0,1]}(\psi dt)$, мы уже показали. Откуда, применяя Принцип Банаха, получаем утверждение теоремы. Теорема 2 полностью доказана.

Нам неизвестно, насколько можно ослабить предположение, касающееся множества E . Например, можно ли доказать аналог теоремы 2, когда E — канторово множество. С этими вопросами связаны также обратные в некотором смысле задачи, когда дана конечная или бесконечная подсистема системы Хаара и нужно найти соответствующее ей множество E , чтобы $\{E, \chi_E(x)\}$ была минимальной характеристикой единственности для этой подсистемы. Описание таких множеств для конечных подсистем Хаара дано в работе [5]. Такие множества существуют и для подсистем системы Хаара, которые не являются полными ни на каком множестве положительной меры. Полное описание подсистем системы Хаара, которые являются полными на некоторых множествах положительной меры, дано в работе Дж. Прайса и Р. Зинка [17]. Нам неизвестно, существует ли подсистема системы Хаара, полная по мере на некотором множестве положительной меры и имеющая минимальную характеристику единственности.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 6. III. 1984

Վ. Ս. ՎԱՋԱՐՅԱՆ. Ֆուրիեի և Ֆուրիե-Համարի ընդհանրացված շաբլոնի համարյա ամենուրեք հանգագումարումը և զուգամիությունը (ամփոփում)

Որոշակի բազմությունների վրա եզակիություն ունեցող ֆունկցիաների համար սահմանվում են Ֆուրիեի և Ֆուրիե-Համարի շաբլոնը: Այդ շաբլոնի համար ապացուցվում են թեորեմներ, որոնք հանդիսանում են ֆառուի և Համարի թեորեմների ընդհանրացումները:

K. S. KAZARIAN. *On the summability and almost everywhere convergence of the generalized Fourier and Fourier—Haar series (summary)*

For the functions which have singularities on certain sets of points the generalized Fourier and Fourier Haar series are defined. We prove two theorems which are generalizations of Fatou and Haar theorems.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лузин. Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1951.
2. А. Хаар. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Inauguraldisertation Göttingen, 1909.
3. К. С. Казарян. О мультипликативном дополнении базисных последовательностей L^p , $1 \leq p < \infty$, до базисов в L^p , ДАН Арм.ССР, 52 1976, 203—209.
4. К. С. Казарян. О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в L^p , $1 \leq p < \infty$, Analysis Math., 4, № 1, 1978, 37—52.
5. К. С. Казарян. О мультипликативном дополнении некоторых систем, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 13, № 4, 1978, 315—351.
6. В. Ф. Гапошкин. Мультипликативное пополнение тригонометрической системы до базисов Чезаро, Сообщ. АН Груз.ССР, 96, № 3, 1979, 541—543.
7. V. F. Gaposhkin. Trigonometric Cesàro bases on the spaces of functions integrable with power weight, Analysis Math., 8 № 2, 1982, 103—124.
8. А. Ю. Петрович. О суммируемости обобщенных рядов Фурье, Analysis Math., 4, № 4, 1978, 303—311.
9. А. Ю. Петрович. О суммируемости методом Абеля обобщенных рядов Фурье. Мат. сб., 122, № 2, 1983, 232—244.
10. М. И. Дьяченко. Об обобщенных синус-рядах Фурье, Мат. заметки, 29, 5, 1981, 641—657.
11. S. Banach. Sur la convergence presque partout des fonctionnelles linéaires, I et II, Bull. Sci. Math., 50, 1925, 27—32 et 35—43.
12. A. M. Garza. Topics in almost everywhere convergence, Markham Publ. Comp., 1970.
13. Г. Алексич. Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., 1958.
14. J. Schauder. Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems, Math. Z., 28, 1928, 317—320.
15. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, «Наука», 1974.
16. R. P. Boas, H. Pollard. The multiplicative completion of sets of functions, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 1948, 518—522.
17. J. J. Price, R. E. Zink. On sets of completeness for families of Haar functions. Trans. Amer. Math. Soc., 119, № 2, 1965, 252—259.