ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 2, 1985 Математика

УДК 517.986

С. А. ГРИГОРЯН

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ КОММУТАТИВНЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

Введение

Пусть A и B—коммутативные банаховы алгебры с единицей. Говорят, что B является расширением алгебры A, если существует сохраняющий единицу банахов изоморфизм из A в B. Один из примеров расширения—это известное расширение Аренса—Гофмана, которое строится следующим образом (см. [1]).

Для коммутативной банаховой алгебры A с единицей рассмотрим $A[x]$—алгебру полиномов над A от неизвестного x. Пусть $\alpha(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ — некоторый унитарный полином от x с коэффициентами из A, и $B=A[x]/\alpha(x)A[x]$—фактор-алгебра, полученная факторизацией алгебры $A[x]$ по идеалу $\alpha(x)A[x]$. С помощью положительного числа t, удовлетворяющего неравенству $t^n>\|a_1\|t^{n-1}+\cdots+\|a_n\|$ можно таким образом задать норму на B (для каждого класса $b=\sum_1^{n-1}c_ix^i+\alpha(x)A[x]$, $\|b\|=\sum_1^{n-1}\|c_i\|t^i$), что B станет коммутативной банаховой алгеброй. Естественное вложение A в B является изометрическим изоморфизмом и поэтому можно предположить, что A — замкнутая подалгебра банаховой алгебры B.

В § 1 данной статьи вводится понятие полиномиального расширения коммутативных банаховых алгебр (см. определение 1.2) и показывается, что расширение Аренса—Гофмана является частным случаем полиномиального расширения.

В § 2 вводится понятие „сильного полиномиального расширения". Пример 2 показывает, что каждое сильное полиномиальное расширение является также полиномиальным расширением, хотя обратное неверно.

Следующий параграф посвящен полиномиально замкнутым и целозамкнутым равномерным алгебрам. Здесь формулируется достаточное условие полиномиальной замкнутости равномерной алгебры; для плоского компакта K находятся условия, при которых классические алгебры $P(K)$ и $R(K)$ являются полиномиально замкнутыми и целозамкнутыми.

В § 4 дается понятие дифференцирования в коммутативных банаховых алгебрах, обобщающее точечное дифференцирование, и устанавливается связь между полиномиальными расширениями и дифференцированием.

В заключение приводится несколько нерешенных задач, естественным образом возникающих из содержания настоящей работы*.

§ 1. Расширение Аренса—Гофмана

Основные свойства расширений Аренса—Гофмана описаны в [1]. Здесь укажем только те, которые нам понадобятся в дальнейшем:

а) Из построения алгебры B (см. введение) видно, что каждый элемент $b \in B$ однозначно представим в виде $a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$. Иными словами, алгебра B является свободным A-модулем с базисом $e, x, \cdots, x^{n-1}$, e — единица алгебры A. Поэтому норма на B эквивалентна покоординатной норме.

б) Если B—расширение Аренса—Гофмана алгебры A с помощью полинома $\alpha(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, зная M_A— пространство максимальных идеалов алгебры A, можно описать M_B— пространство максимальных идеалов алгебры B. Пусть π_A— естественная проекция из M_B на M_A. Эта проекция в данном случае является сюръекцией и для любого $m \in M_A$ множество $(\pi_A^B)^{-1}(m)$ состоит не более, чем из n точек. Действительно, если $m_0 \in (\pi_A^B)^{-1}(m)$, то $m_0(\alpha(x)) = 0$ в силу построения алгебры B, поэтому число $m_0(x)$ есть одно из решений уравнения

$$y^n + m(a_1) y^{n-1} + \cdots + m(a_n) = 0. \tag{1.1}$$

И обратно—для каждых двух решений y_1, y_2 $(y_1 \neq y_2)$ уравнения (1.1) найдутся единственные m_1, $m_2 \in (\pi_A^B)^{-1}(m)$ такие, что $m_1(x) = y_1$, $m_2(x) = y_2$. Таким образом, card $(\pi_A^B)^{-1}(m)$ совпадает с числом решений, без учета кратности, уравнения (1.1). Поэтому справедливо следующее

Предложение 1.1. *Пусть B— нетривиальное расширение Аренса—Гофмана алгебры A. Если $M_A = M_B$, то B имеет нетривиальный радикал.*

Действительно, из условия $M_A = M_B$ следует, что уравнение (1.1) имеет одно, без учета кратности, решение. Следовательно, для каждого $m \in M_A$ решение уравнения (1.1) равно числу $-\frac{m(a_1)}{n}$. А поскольку $M_A = M_B$ и $m(x)$ является решением уравнения (1.1), $m\left(x + \frac{a_1}{n}\right) = 0$ для любого $m \in M_B$. Отсюда $x + \frac{a_1}{n}$ принадлежит радикалу алгебры B.

Следствие. *Пусть банахова алгебра B является расширением Аренса—Гофмана банаховой алгебры A с помощью полинома $\alpha(x) = x^2 + a_1 x + a_2$. card $(\pi_A^B)^{-1}(m) \equiv 1$ на M_A тогда и только тогда, когда $a_1^2 - 4a_2$ принадлежит радикалу алгебры A.*

---

* Некоторые частные случаи результатов настоящей работы анонсированы в [2].

Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Обозначим через $A[x_1 \cdots x_n]$ алгебру полиномов от неизвестных $x_1 \cdots x_n$ над A.

Определение 1.2. *Пусть A и B—коммутативные банаховы алгебры с единицей. Скажем, что B является полиномиальным расширением алгебры A, если найдутся такое число n и гомоморфизмы Φ_A^B I, Ψ, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\Phi_A^B"] \arrow[d, "I"'] & & B \\ & A[x_1 \cdots x_n] \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, где отображение Φ_A^B осуществляет банахов изоморфизм между A и некоторой замкнутой подалгеброй алгебры B, имеющей с B общую единицу; Ψ — гомоморфизм из $A[x_1 \cdots x_n]$ на B, а I—естественное вложение A в $A[x_1 \cdots x_n]$.

Следующий пример показывает, что не каждое полиномиальное расширение является расширением Аренса—Гофмана, хотя, как будет видно из дальнейшего, между этими расширениями есть связь.

Пример 1. Пусть D — единичный круг, $X = D \times [0,1]$ и B — алгебра тех непрерывных функций на X, которые при фиксированном $t \in [0,1]$ принадлежат диск-алгебре, а $A = \{f \in B;\ f_z(0, t) = 0\}$. Очевидно, $M_A = M_B$ и $B = A + zA$ — полиномиальное расширение алгебры A, но не расширение Аренса—Гофмана (см. предложение 1.1).

Теорема 1.3. *Пусть банахова алгебра B — полиномиальное расширение алгебры A. Тогда существует такая башня банаховых алгебр*

$$A = A_0 \subseteq \cdots \subseteq A_n,$$

что каждая алгебра A_i является расширением Аренса—Гофмана предыдущей алгебры A_{i-1}, $1 \leqslant i \leqslant k$, и такой непрерывный гомоморфизм Φ из A_n на B, что $\Phi(a) = \Phi_A^B(a)$ для всех $a \in A$.

Доказательство. Пусть B — полиномиальное расширение алгебры A. Не теряя общности можно предположить: $A \subset B$ и существуют такие $b_1, \cdots, b_n \in B$, что $B = A[b_1 \cdots b_n]$. Пусть B_k—пространство полиномов от $b_1, \cdots, b_n$ над A, степень которых не превосходит k. Тогда $B = A[b_1, \cdots, b_n] = \bigcup_1^\infty B_k$. По теореме Бэра о категориях найдется такое число $k_0 \geqslant 1$, что B_{k_0} является множеством второй категории в B. Обозначим через D пространство полиномов над A от неизвестных $y_1, \cdots, y_n$, степень которых не превосходит k_0. Очевидно, что D — есть банахово пространство в норме

$$\left\| \sum_{j_1+\cdots+j_n<k_0} a_{j_1\cdots j_n} y_1^{j_1}\cdots y_n^{j_n} \right\| = \sum_{j_1+\cdots+j_n<k_0} \|a_{j_1\cdots j_n}\|$$

и естественно определенный A-линейный оператор T из D в B не прерывен и отображает D на B_{k_0} — пространство второй категории в B. Отсюда, по теореме об открытом отображении (см. [3], стр. 58), $B_{k_0}=B$. Покажем теперь, что каждый элемент из B является целым над A. Для фиксированного $b\in B$ и каждого элемента d из базиса свободного A-модуля D можно подобрать такой элемент $S(d)\in D$, что $T(S(d))=bT(d)$. Тем самым определено A-линейное отображение $S: D\to D$, удовлетворяющее условию $TS=bT$. По теореме Кэли—Гамильтона ([4], стр. 446) существует такой унитарный многочлен α, что $\alpha(S)=0$, откуда легко следует, что $\alpha(b)=0$. Тем самым доказано, что каждый элемент из B является целым над A. Пусть $\alpha_i(x_i)$ — такой унитарный полином над A от неизвестного x_i, для которого b_i является корнем, $1\leqslant i\leqslant n$. Полагая $A_0=A$, через A_i обозначим расширение Аренса—Гофмана алгебры A_{i-1} с помощью полинома $\alpha_i(x_i)$, $1\leqslant i\leqslant n$. В полученной башне банаховых алгебр

$$A=A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_n$$

каждая последующая алгебра является расширением Аренса—Гофмана предыдущей алгебры. Если теперь через k_i обозначить степень полинома $\alpha_i(x_i)$, то из построения алгебры A_n следует, что каждый элемент из A_n представим единственным образом в виде

$$\sum a_{j_1\cdots j_n} x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}, \text{ где } j_i\leqslant k_i-1,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ a_{j_1\cdots j_n}\in A.$$

Поэтому норма, заданная на A_n, эквивалентна покоординатной норме. Следовательно, гомоморфизм Φ из A_n на B — $\Phi(\sum a_{j_1\cdots j_n} x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n})=$ $=\sum a_{j_1\cdots j_n} b_1^{j_1}\cdots b_n^{j_n}$ — непрерывен и $\Phi(a)=a$ для всех $a\in A$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Каждый элемент из B является целым над $\Phi_A^B(A)$.*

Доказательство. Из построения алгебры A_n следует, что каждый элемент из A_n является целым над A. Следовательно, каждый элемент из B — целый над $\Phi_A^B(A)$.

Следствие 2. *Пусть A и B — коммутативные банаховы алгебры. Если B — полиномиальное расширение алгебры A, то на B можно задать структуру конечномерного A-модуля.*

Доказательство. Из доказательства теоремы следует, что B является конечномерным $\Phi_A^B(A)$-модулем. Но алгебра $\Phi_A^B(A)$ изоморфна алгебре A. Следовательно, на B можно задать структуру конечномерного A-модуля.

§ 2. Полиномиальные расширения

Если банахова алгебра A является замкнутой подалгеброй банаховой алгебры B, то из того, что B — полиномиальное расширение алгебры A еще не следует, что для некоторых $b_1, \cdots, b_n \in B$ алгебра B совпадает с $A[b_1, \cdots, b_n]$.

Пример 2. Пусть D — единичный круг и $X = D \times [0,1]$. B — алгебра, состоящая из тех непрерывных функций на X, которые при фиксированном $t \in [0, 1/4]$ принадлежат диск-алгебре, а A — алгебра тех функций из $C(X)$, которые при фиксированном $t \in [0, 1/2]$ принадлежат диск-алгебре. Очевидно, $A \subset B$, и A и B изометрически изоморфны. Поэтому B является полиномиальным расширением алгебры A, но, как легко проверить, каковы бы ни были $b_1, \cdots, b_n \in B$, алгебра $A[b_1, \cdots, b_n]$ не совпадает с B.

Определение 2.1. *Пусть A — замкнутая подалгебра банаховой алгебры B, имеющая с B общую единицу. Скажем, что B является сильным полиномиальным расширением алгебры A если существуют такие $b_1, \cdots, b_n \in B$, что B совпадает с $A[b_1 \cdots \cdots b_n]$ — алгеброй полиномов над A от $b_1, \cdots, b_n$.*

Таким образом, под „B—сильное полиномиальное расширение алгебры A“ подразумеваем, что A — подалгебра алгебры B, а роль Φ_A^B (см. определение 1.2) играет естественное вложение.

Предположим, что A является подалгеброй конечной коразмерности в B. Тогда B, очевидно, —сильное полиномиальное расширение алгебры A. Хорошо известно как получаются алгебры конечной коразмерности. Например, каждая подалгебра коразмерности 1 алгебры B совпадает либо с ядром некоторого точечного дифференцирования, т. е. ядром такого линейного функционала δ на B, что для некоторого $m \in M_B$ и любых $a, b \in B$, $\delta(ab) = m(a)\delta(b) + m(b)\delta(a)$, либо получается склеиванием двух точек пространства максимальных идеалов алгебры B (см. [5]). А поскольку каждая подалгебра конечной коразмерности содержится в подалгебре коразмерности 1 алгебры B, то каждая такая алгебра либо содержится в ядре точечного дифференцирования, либо в алгебре, полученной с помощью склеивания двух точек пространства M_B.

Аналогичный результат верен и для сильных полиномиальных расширений.

Теорема 2.2. *Пусть B — нетривиальное сильное полиномиальное расширение алгебры A. Тогда либо найдутся $m_1, m_2 \in M_B$, $m_1 \neq m_2$, такие, что $A \subset \{b \in B;\ m_1(b) = m_2(b)\}$, либо найдется ненулевое непрерывное точечное дифференцирование δ на B, что*

$$A \subset \{b \in B;\ \delta(b) = 0\}.$$

Доказательству теоремы предпошлем две леммы, представляющие самостоятельный интерес.

Для каждого $b \in B$ через $r(b)$ обозначим минимальную из степеней унитарных полиномов над A от неизвестного x, для которых $b \in B$ является корнем.

Лемма 2.3. *Пусть A—замкнутая подалгебра банаховой алгебры B, имеющей с ней общую единицу. Предположим, что для некоторого $b \in B$, $A[b]$ замкнута в B. Тогда найдется такая замкнутая подалгебра D алгебры $A[b]$,*

$$A \subset D \subset A[b], \quad \text{что} \quad A[b]/D = r(b) - 1.$$

Доказательство. Пусть

$$\alpha(x) = x^k + a^0_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a^0_0 \tag{2.1}$$

—один из унитарных полиномов над A степени $k = r(b)$, для которого $b \in B$ является корнем; A^0—расширение Аренса—Гофмана алгебры A с помощью $\alpha(x)$, и Φ—отображение, фигурирующее в теореме 1.3 (в теореме 1.3 надо заменить A_n на A^0 и B на $A[b]$). Из § 1 а) следует, что каждый элемент из A^0 однозначно представим в виде $\sum_0^{k-1} a_i x_i$, $a_i \in A$. Из построения Φ (см. теорему 1.3) следует, что $\operatorname{Ker}\Phi$ состоит из тех полиномов $p(x) \in A^0$, для которых $p(b) = 0$. Для $p(x) \in \operatorname{Ker}\Phi$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}$, пусть $K_p = \{m \in M_A;\ m(a_{k-1}) = 0\}$. Множество $\bigcap_{p \in \operatorname{Ker}\Phi} K_p$ не пусто. Действительно, в противном случае нашлись бы такие $d_1, \cdots, d_n \in A$ и полиномы $p_1, \cdots, p_n \in \operatorname{Ker}\Phi$, что $\sum_1^n d_i a^{(i)}_{k-1} = 1$, где $a^{(i)}_{k-1}$ — показатель полинома p_i при x^{k-1}, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому у полинома $p(x) = \sum_1^n d_i p_i(x)$ коэффициент при x^{k-1} равен единице, т. е. является унитарным полиномом степени $k-1$, и, кроме того, $p(b) = 0$. А это противоречит минимальности числа $k = r(b)$. Покажем теперь, что для каждого $p(x) \in \operatorname{Ker}\Phi$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}$, справедливо равенство: $m(a_i) = 0$ для любого $m \in \bigcap_{p \in \operatorname{Ker}\Phi} K_p$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

Пусть i_0— такое число, $0 < i_0 < k-1$, что для любого полинома $p(x) = \sum_0^{k-1} a_i x^i \in \operatorname{Ker}\Phi$, $m(a_i) = 0$ для всех $i > i_0$ и $m \in \bigcap_{p \in \operatorname{Ker}\Phi} K_p$. Покажем, что $m(a_{i_0}) = 0$. Для этого, умножив полином $p(x)$ на x и заменив $-x^k$ на $\sum_0^{k-1} a^0_i x^i$ (см. равенство (2.1)), получим новый полином $\sum_0^{k-1} d_i x^i$ из $\operatorname{Ker}\Phi$ с коэффициентами $d_0 = -a_{k-1} a^0$, $d_{i+1} = -a^0_{i+1} a_{k-1} + a_i$, $0 \leqslant i \leqslant k-2$. Но, в силу допущения, $m(d_{i_0+1}) = 0$ для всех $m \in \bigcap_{p \in \operatorname{Ker}\Phi} K_p$; следовательно, $m(a_{i_0}) = 0$. Таким образом, для каждого $p(x) \in \operatorname{Ker}\Phi$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}$, выполняется равенство $m(a_i) = 0$ для всех $m \in \bigcap_{p \in \operatorname{Ker}\Phi} K_p$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

Пусть I — максимальный идеал алгебры A, соответствующий некоторому $m \in \bigcap_{p \in \operatorname{Ker}\Phi} K_p$. Из сказанного выше следует, что все коэффициенты каждого полинома из $\operatorname{Ker}\Phi$ содержатся в $D^0 = A + Ix + \cdots$

$\cdots + Ix^{k-1}$, и поскольку D^0 является замкнутой подалгеброй алгебры A^0, то $D=\Phi(D^0)$ замкнут в $A[b]$. Очевидно, $D=A+Ib+\cdots+Ib^{k-1}$.

Покажем теперь, что никакая линейная комбинация элементов $b, b^3, \cdots, b^{k-1}$ не принадлежит D. Действительно, пусть существуют такие комплексные числа $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$, что $\sum_1^{k-1} \alpha_i b^i$ принадлежит D. Тогда $\sum_1^{k-1} \alpha_i b^i = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{k-1} b^{k-1}$, где $a_i \in I$, $i \geqslant 1$. Следовательно, $a_0 + \sum_1^{k-1} (\alpha_i - a_i) b^i = 0$, т. е. полином $p(x) = -a_0 + \sum_1^{k-1} (\alpha_i - a_i) x^i$ принадлежит Ker Φ. Поэтому $m(\alpha_i - a_0) = 0$, а так как $m(a_i) = 0$, то $m(\alpha_i) = 0$. Отсюда $\alpha_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Таким образом, $\dim A[b]/D = k-1$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть банахова алгебра B является нетривиальным сильным полиномиальным расширением банаховой алгебры A. Тогда существует замкнутая подалгебра конечной коразмерности в B, содержащая алгебру A.*

Доказательство. Из определения 2.1 следует, что найдутся такие $b_1, b_2, \cdots, b_n \in B$, что $A[b_1, \cdots, b_n] = B$. Для каждого b_i через k_i, $i \geqslant 2$, обозначим минимальную из степеней унитарных полиномов от неизвестного x_i над $A[b_1, \cdots, b_{i-1}]$, для которых b_i является корнем. Не теряя общности, можно считать, что $k_i \geqslant 2$. Пусть $\alpha_i(x_i)$, $2 \leqslant i \leqslant n$, —такой унитарный полином степени k_i от неизвестного x_i над $A[b_1, \cdots, b_{n-1}]$, для которого b_i является корнем, и $\alpha_1(x_1)$ — произвольный унитарный полином над A, для которого b_1 является корнем. Рассмотрим башню таких банаховых алгебр

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n,$$

что каждая алгебра A_i является расширением Аренса—Гофмана алгебры A_{i-1} с помощью $\alpha_i(x_i)$. Так как каждый элемент из A_n однозначно представим в виде $\sum a_{j_1 \cdots j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$, где $j_i < k_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и норма на A_n эквивалентна покоординатной, то отображение Φ:

$$\Phi\left(\sum a_{j_1 \cdots j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}\right) = \sum a_{j_1 \cdots j_n} b_1^{j_1} \cdots b_n^{j_n}$$

является непрерывным гомоморфизмом из A_n на B и (см. доказательство леммы 2.3) существует такой максимальный идеал I алгебры A_{n-1}, что Ker $\Phi \subset A_{n-1} + Ix_n + \cdots + Ix_n^{k_n-1} = D^0$. Поскольку алгебра D^0 замкнута в A_n и Φ—непрерывное отображение из A_n на B, то $D = \Phi(D^0)$—замкнутая подалгебра алгебры B, содержащая алгебру A. Так как $\dim A_n/D^0 = k-1$, то $\dim B/D = k-1$.

Доказательство теоремы 2.2. Из леммы 2.4 следует, что существует подалгебра конечной коразмерности в B, содержащая алгебру A. Поэтому (см. рассуждения, предшествующие теореме 2.2) либо A содержится в ядре некоторого точечного дифференцирования, либо найдутся $m_1, m_2 \in M_B$, $m_1 \neq m_2$ такие, что $A \subset \{b \in B;\ m_1(b) = m_2(b)\}$. Теорема доказана.

Пусть X — компактное пространство, A и B — равномерные алгебры на X, т. е. замкнутые подалгебры $C(X)$, содержащие константы и разделяющие точки X.

Следствие 1. *Пусть равномерная алгебра B является сильным полиномиальным расширением равномерной алгебры A. Если $M_B = X$ и каждая точка X — есть обобщенная точка пика для B, то $B = A$.*

Доказательство. Поскольку каждая точка из X является точкой пика для B и $M_B = X$, на B нет нетривиального точечного дифференцирования. Поэтому, так как A разделяет точки X, получим $B = A$.

Следствие 2. *Пусть равномерная алгебра B на X является полиномиальным расширением равномерной алгебры A. Если каждая точка X есть точка пика для B и $M_B = X$, то либо A и B изометрически изоморфны, либо, в противном случае, найдутся такие $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, что $\Phi_A^B(A)$ содержится в $B_0 = \{b \in B;\ b(x_1) = b(x_2)\}$.*

Доказательство. Если алгебра $\Phi_A^B(A)$ разделяет точки X, то согласно следствию 1, $\Phi_A^B(A) = B$ и, следовательно, Φ_A^B осуществляет изоморфизм между A и B. А так как A и B — равномерные алгебры, Φ_A^B является изометрическим изоморфизмом. Если же $\Phi_A^B(A)$ не разделяет точки X, то найдутся такие $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, что $\Phi_A^B(A) \subset B_0 = \{b \in B;\ b(x_1) = b(x_2)\}$.

§ 3. Полиномиально замкнутые и целозамкнутые равномерные алгебры

Пусть A — равномерная алгебра на компакте X. Будем говорить что A — полиномиально замкнутая алгебра, если у A нет нетривиальных сильно полиномиальных расширений в категории равномерных алгебр на компакте X, т. е. каждая равномерная алгебра на X, являющаяся сильным полиномиальным расширением алгебры A, совпадает с A.

Теорема 3.1. *Пусть A — такая равномерная алгебра на X, что $M_A = X$. Если каждая точка из X является точкой пика для A, то A — полиномиально замкнутая алгебра.*

Доказательство. Пусть B — некоторая равномерная алгебра на X, являющаяся сильным полиномиальным расширением алгебры A. Тогда, поскольку каждый элемент из B — целый над A и $A \subset B$, $M_B = X$ (см. [7], стр. 130, [9]). Следовательно, из следствия 1 теоремы 2.2, $B = A$. Теорема доказана.

Пусть A — замкнутая подалгебра коммутативной банаховой алгебры B, содержащая единицу. Говорят, что B — целое расширение алгебры A, если каждый элемент из B является целым над A. Будем называть равномерную алгебру A на X целозамкнутой, если каждая равномерная на X алгебра B, являющаяся целым расширением алгебры A, совпадает с A. Скажем, что A — сильно целозамкнутая алгеб-

ра, если каждый элемент из $C(X)$, являющийся целым над A, принадлежит A (ср. [8]).

Напомним, что для банаховых алгебр A и B, $A \subset B$, через π_A^B обозначили естественную проекцию из M_B в M_A.

Лемма 3.2.([11]). *Пусть B — целое расширение алгебры A. Тогда $\pi_A^B(M_B) = M_A$.*

Для каждого замкнутого множества $F \subset X$ через A_F будем обозначать равномерное замыкание сужения A на F.

Лемма 3.3. *Пусть равномерная алгебра B—целое расширение равномерной алгебры A, и $\{F\}$ — разбиение X на максимальные множества антисимметрии относительно A. Тогда для каждого $F \in \{F\}$, B_F — целое расширение алгебры A_F.*

Доказательство очевидно.

Пусть K — компакт в комплексной плоскости, $P(K)$ — равномерная алгебра на K, порожденная полиномами, а $R(K)$—рациональными функциями с полюсами вне K. Через $\partial P(K)$ (соответственно $\partial R(K)$) будем обозначать границу Шилова алгебры $P(K)$ (соответственно $R(K)$).

Лемма 3.4. *Пусть B — равномерная алгебра на K, содержащая $P(K)$. Предположим, что граница Шилова ∂B алгебры B совпадает с $\partial P(K)$. Если $\pi_{P(K)}^B(M_B) = M_{P(K)}$, то $B = P(K)$.*

Доказательство. Так как гельфандовское представление алгебры $P(K)$ на $M_{P(K)}$ является относительно максимальной алгеброй, достаточно показать, что $M_B = M_{P(K)}$ (см. [7], стр. 72). Пусть $m_1, m_2 \in M_B$ такие, что $\pi_{P(K)}^B(m_1) = \pi_{P(K)}^B(m_2)$. Если μ_1 и μ_2 — представляющие меры соответственно m_1 и m_2, носители которых содержатся в ∂B, то мера $\mu_1 - \mu_2$ ортогональна к алгебре Дирихле $P(\partial B)$. Следовательно, $\mu_1 = \mu_2$. Лемма доказана.

Обозначим через $\{F\}_P$ разбиение K на максимальные множества антисимметрии относительно $P(K)$.

Теорема 3.5. 1) *Алгебра $P(K)$ целозамкнута тогда и только тогда, когда ни одно из неодноточечных множеств $F \in \{F\}_P$ не имеет изолированных точек. $P(K)$ является сильно целозамкнутой тогда и только тогда, когда K — полиномиально выпуклый компакт.*

2) *Предположим, что каждая точка из ∂K — топологической границы компакта K — является точкой пика для $R(K)$. Тогда $R(K)$ — полиномиально замкнутая алгебра.*

Доказательство. 1) Пусть $z \in K$ — изолированная точка для некоторого $F \in \{F\}_P$. Тогда найдется $b \in C(K)$, удовлетворяющее условию $b(z) = 1$, $b = 0$ на $K \setminus \{z\}$. Так как $z \notin \partial P(K)$, $P(K)$ — подалгебра коразмерности 1 в равномерной алгебре, порожденной функциями из $P(K)$ и b. Следовательно, $P(K)$ в этом случае не целозамкнутая алгебра.

Обратно, пусть ни одно из множеств $F \in \{F\}_P$ не имеет изолированных точек. Покажем, что для любого целого расширения B равномерной алгебры $P(F)$, ∂B совпадает с $\partial P(F)$ (см. леммы 3.2—3.4).

Допустим противное. Пусть $z_0 \in F \setminus \partial P(F)$ является точкой пика для алгебры B. Так как F не имеет изолированных точек, найдется счетное множество пика E для алгебры B и такая окрестность U точки z_0, что для любого $a \in P(F)$ из условия $a'_{E \cap U} = 0$ следует $a|_U = 0$ $(E \cup U \neq U)$.

Пусть $b \in B$ — функция, пикующая на множестве E. Тогда $b_0 = 1 - b$ обращается в нуль только на множестве E. Так как B — целое расширение алгебры $P(F)$, существуют такие $a_1, \cdots, a_n \in P(F)$, что $b_0^n + a_1 b_0^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. А поскольку $a_n|_{E \cap U} = 0$, то, из построения множества E, $a_n|_U = 0$. Следовательно, $(b_0^n + a_1 b_0^{n-1} + \cdots + a_n)|_U = b_0(b_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1})|_U = 0$, а так как E — счетное множество и F не имеет изолированных точек, $b_0|_{U \setminus E} \neq 0$, то $(b_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1})|_U = 0$. Отсюда $a_{n-1}|_{U \cap E} = 0$. Следовательно, $a_{n-1}|_U = 0$. Продолжая этот процесс, получим, что $b_0|_U = 0$. Пришли к противоречию. Таким образом, $\partial B = \partial P(F)$. Применив теперь леммы 3.2—3.4, получим, что $P(K)$ — целозамкнутая алгебра. Если теперь K — полиномиально выпуклый компакт, $P(K)$ — относительно максимальна и поэтому является сильно целозамкнутой алгеброй (см. [7], стр. 72). Если же K не полиномиально выпукло и z_1, z_2 $(z_1 \neq z_2)$ — две точки из некоторой ограниченной компоненты дополнения к K, функция $b(z) = \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)}$ принадлежит $C(K)$ и является целой над $P(K)$. Очевидно, $b(z) \notin P(K)$.

2). Пусть B — сильное полиномиальное расширение алгебры $A = R(K)$; не теряя общности, можно предположить, что существует такое $b \in B$, что $B = A[b]$. Обозначим через $r(b)$ минимальную из степеней унитарных полиномов над A от неизвестного x, для которых b является корнем. Покажем, что $b \in A$, т. е. $r(b) = 1$. Обозначим через $\mathbf{L}$ линейное пространство полиномов от x над A, степень которых не превосходит $k = r(b) - 1$ и для которых b является корнем. Поскольку $M_A = K$, то и $M_B = K$ (см. [7], стр. 130). Следовательно (см. предложение 1.1) B не является расширением Аренса—Гофмана алгебры A, и поэтому пространство $\mathbf{L}$ не тривиально.

Для каждого $p \in \mathbf{L}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$, пусть $K_p = \{m \in M_A;\ m(a_k) = 0\}$. Как было показано при доказательстве леммы 2.3, из нетривиальности пространства $\mathbf{L}$ следует, что $\bigcap_{p \in \mathbf{L}} K_p$ не пусто и для каждого $m_0 \in \bigcap_{p \in \mathbf{L}} K_p$ алгебра $D = A + Ib + \cdots Ib^k$, где I — максимальный идеал алгебры A, соответствующий точке $m_0 \in M_A$, является замкнутой подалгеброй конечной коразмерности в B. Поскольку $M_A = M_B$, каждая подалгебра конечной коразмерности содержится в ядре некоторого точечного дифференцирования. В частности, алгебра D содержится в ядре точечного дифференцирования на B, соответствующей точке $m_0 \in M_A$. А так как каждая точка из ∂K является точкой пика для $A = R(K)$, то $m_0 \in \operatorname{int} K$ (см. [6]). Пусть теперь полином $p \in \mathbf{L}$ не тривиален и равен $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$. Тогда (см. доказательство леммы 2.3) $m_0(a_i) = 0$ для всех i, и следовательно, если $a_l \neq 0$, то

найдется такое целое число n_i, что $a_i = (z - z_0)^{n_i} d_i$, где $z_0 = m_0(z)$, $d_i \in A$, $m_0(d_i) \neq 0$, $0 \leqslant i \leqslant k$. Пусть $n = \min(n_0, \cdots, n_k)$. Тогда

$$c_i = \frac{a_i}{(z-z_0)^n} \in A, \text{ и } c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k \in \mathrm{L}.$$

Из построения c_i следует, что найдется такое j, $0 \leqslant j \leqslant n$, что $m_0(c_j) \neq 0$. А это противоречит условию $m_0 \in \bigcap_{p \in \mathrm{L}} K_p$. Таким образом, $\bigcap_{p \in \mathrm{L}} K_p$ пусто. Поэтому L тривиально. А это и означает, что $r(b) = 1$, т. е. $b \in A$. Теорема доказана.

Замечание. На каждом компактном множестве X, содержащем канторово множество, можно построить целозамкнутую равномерную алгебру, отличную от $C(X)$, а вот сильно целозамкнутую нельзя. Например, если A — равномерная сильно целозамкнутая алгебра на окружности T, то $A = C(T)$. Действительно, из сильной целозамкнутости A следует, что каждый максимальный идеал алгебры A, ядро которого содержится в T, является алгебраически замкнутым. Поэтому $A = C(T)$ (см. [10]).

Лемма 3.6. *Пусть нормальная в смысле Шилова равномерная алгебра B является целым расширением равномерной алгебры A. Тогда для любого замкнутого множества $F \subset X$ пространство максимальных идеалов M_{A_F} алгебры A_F совпадает с F.*

Доказательство. Так как пространство максимальных идеалов алгебры $B|_F$, полученной из сужения B на F, совпадает с F, а $B|_F$ — целое расширение алгебры $A|_F$, пространство максимальных идеалов алгебры $A|_F$ совпадает с F. Следовательно, $M_{A_F} = F$. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Пусть A и B удовлетворяют условиям леммы 3.6, тогда A — нормальная алгебра.*

Доказательство. Так как $M_A = X$ (см. лемму 3.6), достаточно показать, что A — регулярная алгебра. Пусть E — замкнутое в X множество. Покажем, что для точки $x_0 \in X \setminus E$ найдется $a \in A$, что $a(x_0) = 1$, $a|_E = 0$. Для этого рассмотрим систему таких открытых окрестностей $\{U_i\}_1^\infty$ точки x_0, что $\overline{U}_{i+1} \subset U_i$ и $E = X \setminus U_1$. Пусть $\{b_i\}_1^\infty$ — набор таких функций, что каждое b_i равно нулю на $X \setminus U_{2i}$ и единице на U_{2i+1}. Рассмотрим $b = \sum_1^\infty \frac{b_i + b_{i+1}}{2^i \|b_i - b_{i+1}\|}$. Очевидно, $b \in B$, $b|_{E_i} = \frac{1}{2^i \|b_i - b_{i+1}\|}$, где $E_i = \overline{U}_{2i+1} \setminus U_{2(i+1)}$. Так как $b \in B$ — целое над A, найдутся $a_1^0, \cdots, a_n^0 \in A$ такие, что $b^n + a_1^0 b^{n-1} + \cdots + a_n^0 = 0$. Рассмотрим полином $\Lambda(x, \alpha) = \alpha^n + \alpha^{n-1} \cdot a_1^0(x) + \cdots + a_n^0(x)$ с теми же коэффициентами $a_1^0, \cdots, a_n^0$ над полем комплексных чисел. При каждом фиксированном $x \in X$ полином $\Lambda(x, \alpha)$ имеет ровно n корней. Поэтому найдется такое положительное число i, что $\alpha_0 = b|_{E_{i_0}} = \frac{1}{2^i \|b_i - b_{i+1}\|}$ не является корнем полинома $\Lambda(x_0, \alpha)$. Поэтому $a_0 = \Lambda(x, \alpha_0) \in A$ равен нулю на $E_{i_0} = \overline{U}_{2i_0+1} \setminus U_{2i_0+2}$, а в точке $x_0 \in X$ отлично от нуля. Так как множество $F = X \setminus E_{i_0}$ не связано и $M_{A_F} = F$ (см. лемму 3.6), по теореме Шилова об иденпотентах най-

дется такая последовательность $\{a_n\}_1^\infty \subset A$, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n|_{X\setminus U_{2l_0+1}} = 0, \ \lim_{n\to\infty} a_n|_{U_{2l_0+2}} = \frac{1}{a(x_0)}.$$

Тогда последовательность $\{a_n \cdot a_0\}$ равномерно сходится на X к некоторому $a \in A$, и $a(x_0) = 1$, $a|_E = 0$. Лемма доказана.

Следствие. (ср. [12]). *Пусть B—нормальная равномерная алгебра, содержащая равномерную алгебру* A. *Предположим, что каждый элемент из B локально принадлежит алгебре A, тогда $A = B$.*

Доказательство. Так как каждый элемент из B локально принадлежит алгебре A, для любого $b \in B$ найдутся такие $a_1, \cdots, a_n \in A$, что $\prod_1^n (b - a_i) = 0$, т. е. B является целым расширением алгебры A. Следовательно, A — нормальная алгебра. Но каждая нормальная алгебра является локальной. Поэтому $A = B$.

Следующую лемму можно доказать точно так же, как предыдущую, предварительно заметив, что нормальность является инвариантом при изоморфизме.

Лемма 3.8. *Пусть равномерная алгебра B является полиномиальным расширением равномерной алгебры A. Если B—нормальная алгебра, A—также нормальна.*

Равномерная алгебра A на компакте X называется *максимальной*, если любая замкнутая подалгебра B алгебры $C(X)$, содержащая A, совпадает либо с A, либо с $C(X)$.

Теорема 3.9. *Максимальная алгебра целозамкнута.*

Доказательство. Пусть A—максимальная алгебра. Тогда, как хорошо известно (см., например, [13]), A не может быть нормальной алгеброй. Поэтому, если B является целым расширением алгебры A, то в силу леммы 3.7, $B \neq C(X)$. Следовательно, $B = A$.

Теорема 3.10. *Пусть $C(X)$—полиномиальное расширение равномерной алгебры A. Тогда $A = C(M_A)$.*

Доказательство. Не теряя общности можно предположить, что для некоторого $b \in C(X)$ справедливо равенство $A_0[b] = C(X)$, где $A_0 = \Phi_A^{C(X)}(A)$ (см. определение 1.2). Покажем, что для каждой точки $x_0 \in X$ найдется такая замкнутая окрестность E, что $b_E \in A_0|_E$. Действительно, пусть $r(b) = n$. Тогда $C(X) = A_0 + bA_0 + \cdots + b^{n-1}A_0$. Если I—максимальный идеал алгебры A_0, ядро которого содержит фиксированную точку $x_0 \in X$, алгебра $J = I + bI + \cdots + bI^{n-1}$ является идеалом конечной коразмерности в $C(X)$. Поэтому hull J—ядро идеала J—конечен и, следовательно, $x_0 = \text{hull}\, J$. Пусть E_1 — некоторая замкнутая окрестность точки x_0, не содержащая остальные точки множества hull J. Тогда $J|_{E_1}$ является максимальным идеалом алгебры $C(E)$. Поэтому сужение алгебры $A_0 + bI + \cdots + b^{n-1}I$ на E_1 совпадает с $C(E_1)$, следовательно, найдутся $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2} \in I$, $a_{n-1} \in A$, что для точек из E справедливо равенство

$$b^{n-1} = a_1 b^{n-1} + \cdots + a_{n-1}. \tag{3.2}$$

Так как A—нормальная алгебра (см. лемму 3.8), существует такая замкнутая окрестность E_3 точки x_0, содержащаяся в E_1, и такой элемент $a \in A$, что $\Phi_A^{C(X)}(a)|_{E_3} = \frac{1}{1-a_1}$. Таким образом, умножив обе части равенства (3.2) на $\Phi_A^{C(X)}(a)$, получим, что найдутся такие $c_1, \cdots, c_{n-3} \in I$, $c_{n-2} \in A_0$, что для точек из множества E_2 справедливо равенство

$$b^{n-1} = c_1 b^{n-2} + \cdots + c_{n-2}.$$

Продолжая этот процесс, получим, что для точки $x_0 \in X$ найдется такая замкнутая окрестность E, что $b|_E \in A_0|_E$. Следовательно, $A_0|_E = C(E)$. Таким образом, для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность E, что $A_0|_E = C(X)$. Поэтому $A_0 = C(M_{A_0})$. А так как A изоморфна A_0, то $A = C(M_A)$. Теорема доказана.

Пусть равномерная алгебра B является целым расширением равномерной алгебры A. Для каждого $b \in B$ через N_b обозначим множество точек из X, для каждой из которых существует окрестность, на которой функция $b \in B$ аппроксимируется функциями из A. Из определения N_b следует, что N_b— открытое множество. Покажем, что $\overline{N_b} = X$. Допустим противное. Пусть $\alpha(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ такой унитарный полином от x над A, что $\alpha(b) = 0$. Через $\alpha^{(k)}(x)$ обозначим формальную производную порядка k от $\alpha(x)$ по x. Если теперь V—некоторое открытое множество в $X \setminus N_b$, найдется такое k_0, $0 \leqslant k_0 \leqslant n-1$, что $\alpha^{(k_0)}(b)|_V = 0$, а $\alpha^{(k_0+1)}(b)|_V \neq 0$. Поэтому, по теореме о неявной функции для банаховых алгебр (см. [7], стр. 119) для некоторой точки $x \in X$ найдется такая окрестность U, что b на V аппроксимируется функциями из A. Отсюда $U \subset N_b$. Полученное противоречие показывает, что $\overline{N_b} = X$.

Теорема 3.11. *Пусть $C(X)$—целое расширение равномерной алгебры A. Предположим, что найдутся такие $b_1, \cdots, b_n \in C(X)$, что равномерная алгебра, порожденная функциями из A и $b_1, \cdots, b_n$ совпадает с $C(X)$. Тогда $A = C(X)$.*

Доказательство. Не теряя общности, можно предположить, что A антисимметрическая алгебра. Покажем, что X состоит из одной точки. Пусть $b_1, \cdots, b_n$ — элементы, фигурирующие в условии теоремы и $N_{b_1}, \cdots, N_{b_n}$ — вышеопределенные множества. Из построения N_{b_i} видно, что $N = \bigcap_1^n N_{b_i}$ не пусто. Допустим, что X неодноточечно. Тогда, поскольку N—открытое в X множество, а A — нормальная равномерная алгебра (см. лемму 3.6), найдется такое открытое множество W, $\overline{W} \subset N$, и $a \in A$, $a \not\equiv 0$, что $a|_{X \setminus W} = 0$. Так как на N каждая функция b_i локально аппроксимируется функциями из A, $b_i|_{\overline{W}} \in A|_{\overline{W}}$ (см. [13]), $1 \leqslant i \leqslant n$. Таким образом, $A_{\overline{W}} = C(\overline{W})$, и поэтому существует последовательность $\{a_n\} \subset A$, сходящаяся на W

к $\bar{a}$. Следовательно, последовательность $\{a_n a\}$ фундаментальна в A и сходится к $|a|^2 = \text{const}$. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

§ 4. Дифференцирование в коммутативных банаховых алгебрах

Как уже отмечалось в § 2, если A — подалгебра коразмерности 1 алгебры B, то либо A совпадает с ядром некоторого точечного дифференцирования, либо найдутся m_1, $m_2 \in M_B$, $m_1 \neq m_2$ такие, что $A = \{b \in B; b(m_1) = b(m_2)\}$. Близкий результат можно получить и для полиномиальных расширений А коразмерности 1.

Пусть B — коммутативная банахова алгебра с единицей.

Определение 4.1. *Непрерывное нетривиальное линейное отображение* D *из* B *в некоторую коммутативную банахову алгебру назовем дифференцированием на* B, *если существует такой непрерывный гомоморфизм* φ *из* B *в* C, *что для любых* a, $b \in B$

$$\mathrm{D}(ab) = \varphi(a)\,\mathrm{D}(b) + \varphi(b)\,\mathrm{D}(a).$$

Данное определение является обобщением точечного дифференцирования.

Дадим несколько примеров таких дифференцирований.

1) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей, и B — расширение Аренса-Гофмана алгебры A с помощью $\alpha(x) = x^2$. Тогда $B = A + Ax$. Рассмотрим два оператора φ и D из B в A, $\varphi(a_1 + a_2) = a_1$, $D(a_1 + a_2) = a_2$. Поскольку $x^2 = 0$, $x \in B$, можно показать, что φ — гомоморфизм, а D — дифференцирование:

$$\mathrm{D}(ab) = \varphi(a)\,\mathrm{D}(b) + \varphi(b)\,\mathrm{D}(a).$$

2) Пусть I — максимальный идеал алгебры A из примера 1). Тогда алгебра $B_0 = A + Ix$ будет замкнутой подалгеброй коразмерности 1 в B и сужение D на B — также есть дифференцирование.

3) Пусть $C^1[0, 1]$ — банахова алгебра непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой: $\|f\| = \sup_x |f| + \sup_x |f'|$, $f \in C^1[0,1]$. Тогда отображение D: $C^1[0,1] \to C[0,1]$, задаваемое $\mathrm{D}(f) = f'$, является дифференцированием на $C^1[0,1]$.

Приведенные примеры интересны тем, что в примере 1) A является полиномиальным расширением ядра оператора D, в примере 2) B — полиномиальное расширение ядра дифференцирования D тогда и только тогда, когда I — конечномерный A-модуль. В третьем же примере $A = \operatorname{Ker} D$ состоит из констант, и $C^1[0, 1]$ не является полиномиальным расширением A. Таким образом, существование дифференцирования D — еще не гарантия того, что B — полиномиальное расширение $\operatorname{Ker}\mathrm{D}$.

Под полиномиальным расширением в этом параграфе мы будем понимать самое простое полиномиальное расширение, т. е. полиномиальное расширение вида $B = A + dA$, где d является расширением некоторого унитарного полинома второго порядка с коэффициентами из A.

Пусть $B = A + dA$. Обозначим через $I = \{a \in A;\ aB \subset A\}$. Очевидно, I — идеал в B. Пусть $B_0 = B/I$, $A_0 = A/I$.

Лемма 4.2. 1) *B_0 — полиномиальное расширение алгебры A_0.* 2) *Найдется такое $b_0 \in B_0$, что $b_0^2 = a_0 \in A_0$, $B_0 = A_0 + b_0 A_0$ и $A_0 \cap \cap b_0 A = \{0\}$.* 3) *Если $a \in A_0$ такое, что $a \cdot b_0 = A_0$, то $a = 0$.*

Доказательство. Что B_0 является полиномиальным расширением алгебры A_0 — очевидно. Пусть $d \in B_0$ такое, что $A_0 + d_0 A_0 = B_0$. Тогда $b_0^2 = a_1 d_0 + a_2$, $a_1 a_2 \in A_0$. Следовательно, $\left(d_0 - \frac{1}{2} a_1\right)^2 = \frac{1}{4} a_1^2 + + a_2$. Положим $b_0 = d_0 - \frac{1}{2} a_1$, $a_0 = \frac{1}{4} a_1^2 + a_2$. Пусть теперь $a \in A_0 \cap \cap b_0 A_0$. Так как $a = b_0 \cdot c$, $aB_0 \subset aA_0 + b_0^2 \cdot c \cdot A_0 \subset A_0$, из построения алгебр A_0 и B_0 следует $a = 0$. Отметим, что утверждение 3) эквивалентно 2). Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Пусть на коммутативной банаховой алгебре B с единицей есть нетривиальное дифференцирование $\mathbf{D}$. Для того, чтобы B было полиномиальным расширением $A = \operatorname{Ker} \mathbf{D}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое дифференцирование $\mathbf{D}_0$ из B в некоторую банахову алгебру C, что*

1) $A = \operatorname{Ker} \mathbf{D}_0$,
2) $\mathbf{D}_0(B) = \varphi_0(B)$, *где φ_0 — гомоморфизм, соответствующий $\mathbf{D}_0$,*
3) *существует такое $b_0 \in B$, что $\mathbf{D}_0(b_0) = e$, $\varphi_0(b_0) = 0$, e — единица алгебры C.*

Доказательство. Достаточность. Из условия 3) и определения дифференцирования следует, что для любого $d \in B$, $\mathbf{D}_0(b_0 d) = \varphi_0(d)$. Так как $\mathbf{D}_0(B) = \varphi_0(B)$ (условие 2), для $d \in B$ найдется $b \in B$ такое, что $\mathbf{D}_0(d) = \varphi_0(b) = \mathbf{D}_0(b_0 \cdot b)$. Отсюда $\mathbf{D}(d - b_0 b) = 0$. Следовательно, каждый элемент $d \in B$ можно представить в виде $d = a + b_0 b$, где $a \in A = = \operatorname{Ker} \mathbf{D}$, $b \in B$. Применив теперь снова условие 3), получим $\varphi(d) = = \varphi(a)$. Таким образом, для каждого $d \in B$ существует $a \in A$ такое что $\varphi(d) = \varphi(a)$. Отсюда $\mathbf{D}_0(B) = \varphi_0(A)$. Следовательно, для каждого $d \in B$ найдется $a \in A$, что $\mathbf{D}_0(d) = \varphi_0(a) = \mathbf{D}_0(b_0 a)$. Поэтому $\mathbf{D}(d - - b_0 a) = 0$, а это и означает, что $B = A + b_0 A$.

Необходимость. Предположим, что B — полиномиальное расширение алгебры A. Так как $I = \{a \in A;\ a \cdot B \subset A\}$ — идеал алгебры B, содержащийся в A и фактор-алгебра $B_0 = B/I$ является полиномиальным расширением алгебры $A_0 = A/I$, дифференцирование D на B порождает некоторое новое дифференцирование на B_0. Это дифференцирование строится следующим образом.

Пусть φ — соответствующий гомоморфизм, участвующий в разложении $\mathbf{D}$. Тогда $\mathbf{D}(ab) = \varphi(a)\mathbf{D}(b)$, $a \in A$, $b \in B$, и $\mathbf{D}(ab) = 0$, если $a \in I$. Следовательно, $\varphi(I)$ — идеал банаховой алгебры, порожденной элементами из $\varphi(B)$ и $\mathbf{D}(B)$, которую обозначим через C. Пусть $C_0 = C/J$, где $J = \overline{\varphi(I)}$, и Ψ — канонический гомоморфизм из C на C_0. Тогда легко проверить, что $\varphi_1 = \Psi \circ \varphi$ — гомоморфизм, а $\mathbf{D}_1 = \Psi \circ \mathbf{D}$ — дифференцирование из B_0 в C_0, и $\mathbf{D}_1(ab) = \varphi_1(a)\mathbf{D}_1(b) + \varphi_1(b)\mathbf{D}(a)$. Поскольку $B_0 = A_0 + b_0 A_0$ и $b_0^2 = a_0 \in A_0$ (см. лемму 4.2), с одной стороны $\mathbf{D}_1(b_0^2) = 0$, а с другой — $\mathbf{D}_1(b_0^2) = \varphi_1(b_0) \cdot \mathbf{D}_1(b_0)$. Поэтому $\mathbf{D}_1(b_0^3) = = \varphi_1(b_0^2)\mathbf{D}_1(b_0) = 0$. Таким образом, $b_0^3 \in A_0$, но $b_0^3 = a_0 \cdot b_0$. Следова-

тельно, $a_0=0$ (см. лемму 4.2). Определим теперь дифференцирование на B. Для этого сперва определим дифференцирование D_2 на B_0; $D_2(a_1+b_0a_2)=a_2$, $\varphi_2(a_1+b_0a_2))=a_1$. Поскольку $b_0^2=0$, то D_2—дифференцирование и $D_2(b_0)=e$—единица алгебры A_0, $\varphi_2(b_0)=0$, $D_2(B_0)=\varphi_2(B_0)$. Пусть Ψ—канонический гомоморфизм из B на B_0. Тогда $D_0=D_2\circ\Psi$— дифференцирование на B, и $\varphi_0=\varphi_2\circ\Psi$ — соответствующий ей гомоморфизм. Лемма доказана.

При доказательстве леммы 4.3 было показано, что если на B есть некоторое дифференцирование, ядро которого совпадает с A, то это дифференцирование можно распространить на алгебру B_0, и обратно — каждое дифференцирование на B_0 с ядром A_0 расширяется до некоторого дифференцирования на B, ядро которого есть A. Более того, хотя B, вообще говоря, не является расширением Аренса-Гофмана алгебры A, B_0 — расширение Аренса-Гофмана. Поэтому для простоты изложения, если не оговорено противное, в дальнейшем в этом параграфе, мы будем предполагать, что B — расширение Аренса-Гофмана алгебры A с помощью некоторого унитарного полинома $\alpha(x)=x^2-a_0$. Таким образом

$$B=A+xA,\ x^2=a_0. \tag{4.2}$$

Лемма 4.4. (см. [1]). *Пусть π_A^B — естественная проекция из M_B в M_A. Тогда*

1) $\pi_A^B(M_B)=M_A$.

2) *для всякого $m\in M_A$, $(\pi_A^B)^{-1}(m)$ состоит из двух точек тогда и только тогда, когда $m(a_0)\neq 0$, где a_0 удовлетворяет равенству* (4.2) $x^2=a_0$. *В противном случае* $(\pi_A^B)^{-1}(m)=m$.

Лемма 4.5. *Предположим, что A — полупростая алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $M_A=M_B$;

2) *существует дифференцирование на B с ядром A.*

Доказательство. Так как $B=A+xA$ и $x^2=a_0$, то из $M_A=M_B$ и леммы 4.4 следует $m(a_0)=0$ для всех $m\in M_A$. А поскольку A полупростая, $a_0=0$. Тогде $D(a_1+ax_2)=a_2$ есть дифференцирование. Обратное следует из леммы 4.2.

Элемент $a\in A$ называется делителем нуля, если существует такой $b\in A$, $b\neq 0$, что $ab=0$.

Лемма 4.6. *Предположим, что a_0 из* (4.2) *не является делителем нуля в полупростой алгебре A. Тогда существуют два непрерывных гомоморфизма Φ_1 и Φ_2 из B в некоторую полупростую алгебру C такие, что $A=\{b\in B;\ \Phi_1(b)=\Phi_2(b)\}$.*

Доказательство. Поскольку A — полупростая алгебра, $x^2=a_0$ и a_0 не является делителем нуля в A, то B— полупростая алгебра. Действительно, пусть $b=a_1+xa_2$— обобщенный нильпотентный элемент в B. Так как $m(b)=0$ для всех $m\in M_B$, то воспользовавшись леммой 4.4, можно показать, что $m(a_1)=0$ для всех $m\in M_A$, а поскольку A—полупростая, $a_1=0$. Умножив теперь b на x, получим $bx=a_0\cdot a_2\in A$. Из нильпотентности b и полупростоты алгебры A сле-

дует, что $a_0 \cdot a_2 = 0$. А так как a_0 не является делителем нуля в A, то $a_2 = 0$. Таким образом, $b = 0$. Следовательно, B—полупростая алгебра.

Пусть C—алгебра всех ограниченных, не обязательно непрерывных, функций на M_A. Построим два гомоморфизма из B в C: Φ_1 и Φ_2. Напомним, что для каждого $m \in M_A$, card $(\pi_A^B)^{-1}(m) \leq 2$. Поэтому, если $(\pi_A^B)^{-1}(m) = m$, положим $\Phi_1(b)(m) = \Phi_2(b)(m) = b(m)$, если же $(\pi_A^B)^{-1}(m) = (m_1, m_2)$, то положим $\Phi_1(b)(m) = b(m_1)$, $\Phi_2(b)(m) = b(m_2)$. Очевидно, Φ_1 и Φ_2— два гомоморфизма из B в C и если $a \in A$, $\Phi_1(a) = \Phi_2(a)$. Пусть теперь $b \in B$ такое, что $\Phi_1(b) = \Phi_2(b)$. Тогда, если $b = a_1 + xa_2$, то $m(b) = m(a_1)$ для всех $m \in M_B$. А так как B — полупростая алгебра, $b = a_1$. Лемма доказана.

Замечание. Отметим, что, вообще говоря, гомоморфизмы Φ_1 и Φ_2 определяются неоднозначно. Наряду с теми гомоморфизмами, которые были построены здесь, могут существовать и другие гомоморфизмы из B в другую алгебру, отличную от C, при которых лемма 4.6 остается справедливой.

Лемма 4.7. *Предположим, что $a_0 \neq 0$ является делителем нуля в полупростой алгебре A. Тогда существуют два гомоморфизма Φ_1 и Φ_2 из B в некоторую алгебру C и дифференцирование* D *из* $B_0 = \{b \in B; \Phi_1(b) = \Phi_2(b)\}$ в A, *такие, что* Ker $D = A$.

Доказательство. Пусть C — алгебра, построенная в лемме 4.6 и Φ_1 и Φ_2 — соответствующие гомоморфизмы. Поскольку A — полупростая алгебра, для каждого $b \in B_0 = \{b \in B; \Phi_1(b) = \Phi_2(b)\}$, $b = a_1 + xa_2$, справедливо равенство $m(xa_2) = 0$ для всех $m \in M_B$. Следовательно, $x^2 \cdot a_2 = a_0 \cdot a_2 = 0$. Поэтому $a_2 \in J = \{a \in A; a_0 \cdot a = 0\}$. Отсюда $B_0 = A + xJ$. Определим на B_0 два оператора — D и φ: $D(a_1 + xa_2) = a_2$, $\varphi(a_1 + xa_2) = a_1$. Можно проверить, что $D(b_1 \cdot b_2) = \varphi(b_1) D(b_2) + \varphi(b_2) D(b_1)$, $b_1, b_2 \in B_0$. Лемма доказана.

Из лемм 4.2—4.7 непосредственно следует

Теорема 4.8. *Пусть алгебра B является нетривиальным полиномиальным (не обязательно Аренса-Гофмана) расширением алгебры A, и $I = \{a \in A; aB \subset A\}$. Предположим, что $A_0 = A/I$ — полупростая алгебра. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *существует дифференцирование из B на A_0, ядро которого совпадает с A;*

2) *существуют два таких гомоморфизма Φ_1 и Φ_2, $\Phi_1 \neq \Phi_2$, из B в C — алгебру ограниченных функций на M_{A_0}, что $A = \{a \in B; \Phi_1(b) = \Phi_2(b)\}$;*

3) *существуют два гомоморфизма Φ_1 и Φ_2, $\Phi_1 \neq \Phi_2$, из B в алгебру C и нетривиальное дифференцирование* D *из $B_0 = \{b \in B; \Phi_1(b) = \Phi_2(b)$ в A_0 такое, что* Ker D $= A$.

Заметим, что утверждение о подалгебрах коразмерности 1 (см. начало данного параграфа) является следствием вышеизложенной теоремы. Действительно, пусть A — подалгебра коразмерности 1 в B, имеющая с B общую единицу и $I = \{a \in A; aB \subset B\}$ — максимальный идеал алгебры

A и, следовательно, A и B удовлетворяют условию теоремы 4.8. Поэтому для этих алгебр справедливо одно из трех утверждений этой теоремы.

Сразу отметим, что третье утверждение теоремы в данном случае не имеет места, так как, если бы оно выполнялось, то из включения $A \subset B_0 \subset B$ (см. теорему 4.8) следовало бы, что $\dim B/A \geqslant 2$. Поэтому либо A совпадает с ядром некоторого дифференцирования D из B на A_0, а так как A_0 изоморфна полю комплексных чисел, D—точечное дифференцирование, либо существуют два таких гомоморфизма Φ_1 и Φ_2 из B в алгебру $C(M_{A_0})$—ограниченных функций на M_A, что $A = \{b \in B;\ \Phi_1(b) = \Phi_2(b)\}$. Поскольку M_{A_0} одноточечно, $C(M_{A_0}) = \mathbf{C}$ — полю комплексных чисел и, следовательно, Φ_1 и Φ_2 — мультипликативные функционалы на B.

Отметим, что следствие теоремы 4.8 является также следствием основного результата работы [14].

В заключение приведем несколько нерешенных задач.

1. Пусть K — плоский компакт. В § 3 было показано, что если каждая точка из ∂K есть точка пика для $R(K)$, то $R(K)$ — полиномиально замкнутая алгебра. Доказать, что $R(K)$ — всегда полиномиально замкнутая алгебра.

2. Пусть каждый элемент из $C(X)$ является целым над равномерной алгеброй A на компакте X. Верно ли, что $A = C(X)$?

3. Как хорошо известно, если A — такая равномерная алгебра на X, что $M_A = X$ и каждая точка из X является точкой пика для A, любое точечное дифференцирование на A тривиально. Поэтому каждое дифференцирование из такой алгебры A в полупростую банахову алгебру C тривиально. Можно также показать, воспользовавшись тем, что $C(X)$ — единственная аменабельная равномерная алгебра на X (см. [5], стр. 245, [16]), что каждое дифференцирование из $C(X)$ в любую (необязательно полупростую) банахову алгебру тривиально. Из вышесказанного естественно возникает вопрос: найти необходимое и достаточное условие, при котором каждое дифференцирование на равномерной алгебре тривиально.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5. VII. 1983
и 23. VIII. 1984

Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Տեղափոխելի բանախյան հանրահաշիվների բազմանդամային լայնացումները. *(ամփոփում)*

Հոդվածում ներմուծվում է բազմանդամային լայնացման գաղափարը, որի մասնավոր դեպքն է Հանդիսանում Արենս-Հոֆմանի լայնացումը։ Հայտնաբերվում է բազմանդամային լայնացումների և կետային դիֆերենցումները ընդհանրացնող դիֆերենցումների միջև եղած կապը։ Ձևակերպվում են մի քանի լուծված խնդիրներ։

S. A. GRIGORIAN. *Polynomial expansions of commutative Banach algebras* (summary)

In the paper the notion of polynomial expansion is introduced of which the Avense—Hoffman expansion is a particular case. A connection between polynomial expansions and a certain generalization of the point differentation is established. Some unsolved problems are formulated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R Arens and K. Hoffman*. Algebraic extensions of normed algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 7, 1956, 203—210
2. *С. А. Григорян*. О полиномиальных расширениях коммутативных банаховых алгебр, УМН, 39, № 1, 1984.
3. *У. Рудин*. Функциональный анализ, «Мир», 1975.
4. *С. Ленг*. Алгебра, «Мир», 1968.
5. *Е. А. Горин*. Подалгебры конечной коразмерности, Матем. заметки, 6, № 3, 1969, 321—328.
6. *P.J. Cohen*. A note on constructive methods in Banach algebras, P.A.M.S. 12, 1961, 159—163.
7. *Т. Гамелин*. Равномерные алгебры, «Мир», 1975.
8. *М. И. Караханян*. О некоторых алгебраических характеристиках алгебры всех непрерывных функций на локально связном компакте, Матем. сб., 107, № 3, 1978, 416—434.
9. *I. Glitsberg*. Maximal algebras and a theorem of Rado, P J.M., 14, 1964, 919—941.
10. *Е. А. Горин, М. И. Караханян*. О некоторых характеристических свойствах алгебры всех непрерывных функций на локально связном компакте, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XI, № 3, 1976, 237—255.
11. *J. A. Lindberg*. Integrall extensions of commutative Banach algebras, Can. J. Math., vol. XXV, 4, 1973, 679—686.
12. *J. Rainwater*. A remark on regular Banach algebras, P.A.M.S, 18, 1967, 255—256.
13. *С. А. Григорян*. О некоторых свойствах локально аппроксимативных алгебр, Уч. записки ЕрГУ, № 1, 1974, 3—10.
14. *В. Г. Нармания*. О подалгебрах С-коразмерности 1. Сообщения АН ГССР, 91, № 2, 1978, 553—555.
15. *F. F. Bonsall, J. Duncan*. Complete Normed Algebras, 1973.
16. *М. В. Шейнберг*. Об одной характеристике алгебры $C(\Omega)$ в терминах когомологий, УМН, XXXII, № 5, 203—204.