ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 1, 1985 Математика

УДК 517.18.36

Ф. Г. АРУТЮНЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ ПО БАЗИСАМ В L^{ν}, $\nu \geqslant 2$

§ 1. Введение

Н. Н. Лузин (см. [1], стр. 190) сформулировал следующую задачу

Пусть $F(x)$ — произвольная измеримая функция на $[0,2\pi]$ (со значениями $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры). Существует ли тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1.1}$$

который сходится или суммируется тем или иным методом к функции $F(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$?

Первые результаты, связанные с этой задачей, получены им же в работе ([2], стр. 236). Фундаментальный результат в этом направлении был получен Д. Е. Меньшовым (см. [3]). Им была установлена

Теорема А (Д. Е. Меньшов). *Для любой почти везде конечной на* $[0, 2\pi]$ *измеримой функции* $F(x)$ *существует тригонометрический ряд* (1.1), *который сходится к ней почти всюду на* $[0, 2\pi]$.

В настоящее время остается открытым вопрос о возможности представления, обращающихся в $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры, измеримых функций почти всюду сходящимися тригонометрическими рядами.

В связи с этой проблемой Д. Е. Меньшовым был рассмотрен вопрос о представлении произвольных измеримых функций сходящимися по мере тригонометрическими рядами, и показал, что в этой постановке проблема имеет положительное решение (см. [4]).

Далее в работе [5], А. А. Талалян распространил эту теорему Д. Е. Меньшова на любые полные ортонормированные системы (и на любые базисы пространства L^{ν}, $\nu>1$). А именно

Теорема Б (А. А. Талалян). *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$ — *базис пространства* $L^{\nu}(G)$, $G=[0,1]$, $\nu>1$. *Тогда для любой измеримой на* G *функции* $F(x)$ ($F(x)$ *может принимать значения* $+\infty$ *или* $-\infty$ *на множествах положительной меры*) *существует ряд*

$$\sum_{n\geq 1} d_n \varphi_n(x),\ d_n \to 0 \text{ при } n\to+\infty, \tag{1.2}$$

который сходится к $F(x)$ *по мере.*

После работы [5] А. А. Талаляна возник вопрос о возможности представления измеримых функций почти всюду сходящимися рядами по полным системам. В нашей совместной с А. А. Талаляном работе [6] и в работе [7] Gundy показано, что ряд по системе Хаара (или по системе Уолша) не может сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры. Следовательно, в теореме Б сходимость по мере нельзя заменить сходимостью почти всюду.

Многие работы посвящены вопросу представления измеримых функций почти всюду сходящимися рядами. В них доказываются либо усиление, либо аналоги теоремы Д. Е. Меньшова: для конкретных систем (например, для систем Хаара и Уолша), для базисов $C(G)$ и так далее.

В 1976 году в работах [8], [9] Б. С. Кашин построил пример полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$ с тем свойством, что расходимость ряда $\sum\limits_{n\geq 1}|d_n|^2$ влечет расходимость ряда (1.2) на множестве положительной меры. Построенный пример показывает, что в теореме Б сходимость по мере нельзя заменить сходимостью почти всюду, даже в том случае, когда $F(x)$ почти всюду конечная функция.

Напомним обозначения. Если $\nu>0$, то $L^\nu(G)$ означает класс измеримых на G функций $f(x)$, для которых $\int\limits_G |f(x)|^\nu\,dx<+\infty$ и $L^0(G)$— класс измеримых почти всюду конечных функций на G. Норма в $L^\nu(G)$, $\nu\geq 1$ определяется формулой $\|f\|_{L^\nu(G)}=\left|\int\limits_G |f(x)|^\nu\,dx\right|^{1/\nu}$. Обозначим

$$\|f\|_{L^\nu(G)}=\int\limits_G |f(x)|^\nu\,dx \text{ при } 0<\nu<1 \text{ и } \|f\|_{L^1(G)}=\int\limits_G |f(x)|\,|1+|f(x)||^{-1}\,dx.$$

Пусть, далее, $\varphi(t)$—положительная возрастающая функция на $[0,+\infty)$. Наряду с пространствами $L^\nu(G)$, $\nu\geq 0$ мы будем рассматривать более общие классы $L^\varphi(G)$ функций, для которых $\varphi(|f(x)|)\in L^1(G)$. Положим

$$\|f\|_{L^\varphi(G)}=\int\limits_G \varphi(|f(x)|)\,dx.$$

Обозначим

$$\varphi^*(t)=t\int\limits_t^{+\infty} u^{-2}\varphi(u)\,du=\int\limits_0^1 \varphi(u^{-1}t)\,du,\quad t\geq 0. \tag{1.3}$$

Очевидно $\varphi^*(t)$ либо обращается в $+\infty$ всюду на $(0,+\infty)$, либо $\varphi^*(t)$— положительная возрастающая функция на $(0,+\infty)$. Если потребуем выполнения условий

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t)=0,\quad \int\limits_1^{+\infty} t^{-2}\varphi(t)\,dt<+\infty,$$

то $\varphi^*(t)$ будет непрерывной положительной возрастающей функцией и

$$\lim_{t\to 0} \varphi^*(t) = 0. \tag{1.4}$$

Легко проверяется также, что если $\varphi(t)$ обладает свойством $\varphi(t_1 + t_2) \leqslant \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$, $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$, то этим свойством обладает и $\varphi^*(t)$.

Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$ — некоторая система функций из $L^0(G)$, а

$$\Omega(x) = \sum_{n\geq 1} d_n \varphi_n(x)$$

— конечный или бесконечный ряд по этой системе. Обозначим

$$\Omega^*_\Phi(x) = \sup_{j\geq 1} \left|\sum_{n\geq j} d_n \varphi_n(x)\right|,$$

$$\|\Omega\|_{L^\varphi(G),\Phi} = \sup_{j\geq 1} \left\|\sum_{n\geq j} d_n \varphi_n\right\|_{L^\varphi(G)}. \tag{1.5}$$

Определение 1.1. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$ — базис пространства $L^\nu(G)$, $\nu > 1$. Φ называется базисом типа $\langle \nu, \nu \rangle$ (или же $\Phi \in \langle \nu, \nu \rangle$), если $S^*_\Phi(f, x) \in L^\nu(G)$ для любого $f(x) \in L^\nu(G)$, где $S(f, x) = \sum_{n\geq 1} c_n(f) \varphi_n(x)$ — разложение $f(x)$ по базису Φ.

Известно, что если $\Phi \in \langle \nu, \nu \rangle$, то существует постоянная $M_\nu > 0$ такая, что

$$\|S^*_\Phi(f)\|_{L^\nu(G)} \leqslant M_\nu \|f\|_{L^\nu(G)}. \tag{1.6}$$

Свойством $\langle \nu, \nu \rangle$ обладают многие классические системы, как например тригонометрическая система, системы Хаара и Уолша и другие.

Пример, построенный Б. С. Кашиным, не является $\langle 2, 2 \rangle$ системой. Следовательно естественно рассмотреть вопрос: верна ли теорема А для систем типа $\langle 2, 2 \rangle$? (На этот вопрос обратил внимание Б. С. Кашин на Всесоюзной конференции по метрической теории функций, прошедшей в Агвеpане (Ереван, 1975 г.).

В настоящей статье доказываются теоремы, которые дают положительный ответ на поставленный вопрос. Прежде чем сформулировать результаты, сделаем несколько замечаний.

Замечание 1.1. Если положительная возрастающая на $[0, +\infty)$ функция $\varphi(t)$ обладает свойствами

$$1)\ \lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0, \qquad 2)\ \int_1^{+\infty} t^{-2} \varphi(t)\, dt < +\infty,$$

$$3)\ \varphi(t_1 + t_2) \leqslant \varphi(t_1) + \varphi(t_2),\ t_1, t_2 \in [0, +\infty),$$

то $\varphi^*(t)$ — непрерывная, положительная, возрастающая функция на $[0, +\infty)$ и

$$1^\circ.\ \lim_{t\to 0} \varphi^*(t) = 0,\ 2^\circ.\ \varphi^*(t_1 + t_2) \leqslant \varphi^*(t_1) + \varphi^*(t_2)$$

для всех $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$.

Замечание 1.2. Если $\varphi(t) = t(1+t)^{-1}$, то $\varphi^*(t) = t \ln(1 + |t|^{-1})$ (при $t = 0$ $\varphi^*(t)$ полагаем равной нулю).

Замечания 1.3. Если $\varphi(t)=t^p$, $0<p<1$, то $\varphi^*(t)=N_p\ t^p$ (N_p — постоянная, большая нуля). Следовательно, $L^\varphi(G)=L^{\varphi^*}(G)=L^p(G)$. Справедлива

Теорема 1.1. *Пусть* $\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$ — *базис типа* $\langle\nu,\nu\rangle$, $\nu\geq 2$, *а функция* $\varphi(t)$ *обладает свойствами* 1)—3) *замечания* 1.1. *Тогда существует ряд* (1.2) *такой, что для любой функции* $F(x)\in L^{\varphi^*}(G)$ *существует частичный ряд*

$$\Omega_F(x)=\sum_{n\geq 1}\lambda_n d_n\varphi_n(x) \tag{1.7}$$

(λ_n — *принимает значения* 0 *или* 1), *который удовлетворяет условиям*

1) $\Omega_F(x)=F(x)$ *почти всюду на* G,

2) $\Omega_F(x)$ *по метрике* $L^{\varphi^*}(G)$ *сходится к функции* $F(x)$ *и*

$$\|\Omega_F\|_{L^{\varphi^*}(G);\Phi}\leq\gamma_\varphi\|F\|_{L^{\varphi^*}(G)},$$

3) $\|(\Omega_F^*)_\Phi\|_{L^\varphi(G)}\leq\Gamma_\varphi\|F\|_{L^{\varphi^*}(G)}$ (γ_φ и Γ_φ — *постоянные, большие нуля*).

Из теоремы 1.1 и замечаний 1.2 и 1.3 следуют

Теорема 1.2. *Пусть* $\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$ — *базис типа* $\langle\nu,\nu\rangle$, $\nu\geq 2$. *Тогда существует ряд* (1.2) *такой, что для любой функции* $F(x)\in L^0(G)$ *существует частичный ряд* (1.7), *который удовлетворяет условиям*

1) $\Omega_F(x)=F(x)$ *почти всюду на* G,

2) $\|(\Omega_F^*)_\Phi\|_{L^0(G)}\leq\Gamma_0\int\limits_G|F(x)|\ln(1+|F(x)|^{-1})\,dx$ (Γ_0 — *постоянная, большая нуля*).

Теорема 1.3. *Пусть* $\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$ — *базис типа* $\langle\nu,\nu\rangle$, $\nu\geq 2$, $0<p<1$. *Тогда существует ряд* (1.2) *такой, что для любой функции* $F(x)\in L^p(G)$ *существует частичный ряд* (1.7), *который удовлетворяет условиям*

1) $\Omega_F(x)=F(x)$ *почти всюду на* G,

2) $\|(\Omega_F^*)_\Phi\|_{L^p(G)}\leq\Gamma_p\|F\|_{L^p(G)}$ (Γ_p — *постоянная, большая нуля*).

Метод доказательства теорем позволяет обеспечить сходимость ряда $\sum\limits_{n\geq 1}|d_n|^{2+\varepsilon}$ одновременно для всех положительных ε, но за этим мы следить не будем.

В доказательствах теорем 1.1—1.3 широко используется метод, разработанный в нашей работе [10], где важную роль играют мартингальные свойства системы Хаара (см. [7] и [11]).

Теорема 1 (без условий 2) и 3)) анонсирована в нашей работе [12].

§ 2. Обозначения и вспомогательные леммы

Пусть $\varphi(t)$ — возрастающая положительная функция на $[0,+\infty)$ с условием

$$\int_1^{+\infty} t^{-2}\varphi(t)\,dt < +\infty. \tag{2.1}$$

Мы будем предполагать, что $\varphi(t)$—непрерывна (это требование не обязательно, оно добавляется лишь для облегчения рассуждений). Будем считать также $\varphi(+\infty) = +\infty$.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 2.1. *Пусть $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ — последовательность положительных функций на G с условием*

$$\int_G f_n(x)\,dx \leqslant M < +\infty,\ n \geqslant 1.$$

Тогда можно указать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n\geq 1}$ такую, что

$$\int_G \varphi(\sup_{n\geq 1} n^{-1} f_{k_n}(x))\,dx < +\infty.$$

Доказательство. Не ограничивая общности мы можем предположить, что функция $\varphi(t)$ неограничена. Через $\tilde{f}_n(x)$, $n \geqslant 1$ обозначим равноизмеримую с $f_n(x)$, невозрастающую функцию. Очевидно

$$\int_G \tilde{f}_n(x)\,dx = \int_G f_n(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Из последовательности $\{\tilde{f}_n(x)\}_{n\geq 1}$ можно выделить почти всюду сходящуюся подпоследовательность $\{\tilde{f}_{j_n}(x)\}_{n\geq 1}$. Обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{f}_n(x)$, она будет невозрастающей функцией на G и

$$\int_G f(x)\,dx \leqslant M.$$

Докажем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int_G |\varphi(m\tilde{f}_{j_n}(x)) - \varphi(mf(x))|\,dx = 0 \tag{2.3}$$

при любом m, $0 \leqslant m \leqslant 1$.

Пусть $x_0 \in G$, имеем

$$\int_G |\varphi(m\tilde{f}_{j_n}(x)) - \varphi(mf(x))|\,dx \leqslant \int_0^{x_0} \varphi(m\tilde{f}_{j_n}(x)\,dx +$$

$$+ \int_0^{x_0} \varphi(mf(x))\,dx + \int_{x_0}^1 |\varphi(m\tilde{f}_{j_n}(x)) - \varphi(mf(x))|\,dx = J_1 + J_2 + J_3.$$

Из (2.2) следует $\tilde{f}_{j_n}(x) \leqslant M x^{-1}$, $0 < x \leqslant 1$, следовательно

$$J_1 < \int_0^{x_0} \varphi(Mx^{-1})\,dx = M \int_{Mx_0^{-1}}^{+\infty} t^{-2}\varphi(t)\,dt.$$

Правая часть неравенства не зависит от n. Следовательно, J_1 стремится к нулю (равномерно относительно n) при $x_0 \to 0$. Точно также убедимся, что $J_2 \to 0$ при $x_0 \to 0$.

При фиксированном x_0 последовательность $|\varphi(m\tilde{f}_{J_n}(x)) - \varphi(mf\times\times(x))|$, $x_0 \leqslant x \leqslant 1$ ограничена и почти всюду сходится к нулю. Следовательно к нулю стремится J_3. Соотношение (2.3) доказано.

Из последовательности $\{\tilde{f}_{J_n}(x)\}_{n\geqslant 1}$ выделим подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n\geqslant 1}$ такую, что

$$\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 |\varphi(n^{-1}\tilde{f}_{k_n}(x)) - \varphi(n^{-1}f(x))|\,dx < 1. \tag{2.4}$$

Имеем

$$\varphi(\sup_{n\geqslant 1} n^{-1}f_{k_n}(x)) \leqslant 1 + \varphi(0) + \sup_{n\geqslant 1}[\varphi(n^{-1}f_{k_n}(x)) -$$
$$-1-\varphi(0)]^+ \leqslant 1 + \varphi(0) + \sum_{n\geqslant 1}[\varphi(n^{-1}f_{k_n}(x)) - 1 - \varphi(0)]^+$$

(здесь a^+ означает a, если $a \geqslant 0$ и 0, если $a < 0$). Следовательно, в силу (2.4) имеет место

$$\int_0^1 \varphi(\sup_{n\geqslant 1} n^{-1}f_{k_n}(x))\,dx \leqslant 1 + \varphi(0) +$$
$$+ \sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 [\varphi(n^{-1}f_{k_n}(x)) - 1 - \varphi(0)]^+\,dx =$$
$$= 1 + \varphi(0) + \sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 [\varphi(n^{-1}\tilde{f}_{k_n}(x)) - 1 - \varphi(0)]^+\,dx < \tag{2.5}$$
$$\leqslant 2 + \varphi(0) + \sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 [\varphi(n^{-1}f(x)) - 1 - \varphi(0)]^+\,dx =$$
$$= 2 + \varphi(0) + \sum_{n\geqslant 1}\int_0^{x_n} [\varphi(n^{-1}f(x)) - 1 - \varphi(0)]\,dx.$$

Обозначим $F_n(x) = \varphi(n^{-1}f(x)) - 1 - \varphi(0)$. Определим обратную к $F_n(x)$ функцию $F_n^{-1}(y)$. С этой целью сначала определим обратные (к $f(x)$ и $\varphi(t)$) функции $f^{-1}(y)$, $y \geqslant 0$ и $\varphi^{-1}(y)$, $y > \varphi(0)$.

Положим $e_y = \{x : f(x) = y\}$, $y > 0$ (будем считать, что $f(0-) = +\infty$). Если e_y содержит одну точку, то полагаем $f^{-1}(y) = x$. Если e_y содержит более одной точки (количество таких y может быть лишь счетным), то в качестве $f^{-1}(y)$ берем любое x из e_y. Ес-

ли e_y — пустое множество, то существует $x \in G$ такая, что $y \in [f(x-), f(x+)]$ (будем считать, что $f(1+)=0$). В таких точках y полагаем $f^{-1}(y)=x$. Известно, что $f^{-1}(y)$ не возрастает и

$$\int_0^{+\infty} f^{-1}(y)\,dy = \int_G f(x)\,dx \tag{2.6}$$

$\varphi^{-1}(y)$ в промежутке $[\varphi(0), +\infty)$ определяется обычным образом. Положим

$$F_n^{-1}(y) = f^{-1}(n\,\varphi^{-1}(1+\varphi(0)+y),\ y \geqslant 0.$$

Тогда имеет место

$$\int_0^{x_n} [\varphi(n^{-1}f(x)) - 1 - \varphi(0)]\,dx = \int_0^{+\infty} F_n^{-1}(y)\,dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} f^{-1}(n\,\varphi^{-1}(1+\varphi(0)+y)\,dy = \int_{1+\varphi(0)}^{+\infty} f^{-1}(n\varphi^{-1}(y))\,dy.$$

Обозначим

$$F(x) = \int_{1+\varphi(0)}^{+\infty} f^{-1}(x\,\varphi^{-1}(y))\,dy,\ x \geqslant 1.$$

Очевидно функция $F(x)$ не возрастает. Следовательно, в силу (2.5) сходимость ряда

$$\sum_{n \geqslant 1} \int_G [\varphi(n^{-1}f_{k_n}(x) - 1 - \varphi(0)]^+\,dx$$

равносильна сходимости интеграла

$$I = \int_1^{+\infty} dx \int_{1+\varphi(0)}^{+\infty} f^{-1}(x\,\varphi^{-1}(y))\,dy.$$

Подставляя $t = \varphi^{-1}(y)$, получим

$$I = \int_1^{+\infty} dx \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} f^{-1}(xt)\,d\varphi(t) = \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} d\varphi(t) \times$$

$$\times \int_1^{+\infty} f^{-1}(xt)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} d\varphi(t) \int_t^{+\infty} f^{-1}(u)\,t^{-1}\,du =$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} f^{-1}(u)\,du \int_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{u} t^{-1}\,d\varphi(t) \leqslant$$

$$< \int\limits_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} f^{-1}(u)\, du\, [u^{-1}\varphi(u) +$$

$$+ \int\limits_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{u} t^{-2}\, \varphi(t)\, dt] \leqslant \int\limits_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} f^{-1}(u)\, u^{-1}\varphi(u)\, du +$$

$$+ \int\limits_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} f^{-1}(u)\, du \int\limits_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} t^{-2}\varphi(t)\, dt.$$

Для завершения доказательства леммы 2.1 достаточно убедиться, что первый интеграл в правой части полученного неравенства конечен. Из (2.6) вытекает

$$u f^{-1}(u) \leqslant \int\limits_{0}^{+\infty} f^{-1}(u)\, du \leqslant M < +\infty, \quad u \geqslant 0.$$

Следовательно

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} f^{-1}(u)\, u^{-1}\varphi(u)\, du \leqslant M \int\limits_{\varphi^{-1}(1+\varphi(0))}^{+\infty} u^{-2}\varphi(u)\, du < +\infty.$$

Лемма 2.1 доказана.

Заметим, что в случае $\varphi(t) = t(1+t)^{-1}$ лемма 2.1 следует также из оценок, полученных в работе [13] (см. [13], стр. 222).

Из доказательства леммы 2.1 следует

Лемма 2.2. *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ — *последовательность равноизмеримых, интегрируемых положительных функций, а* $\varphi(t)$, $t \geqslant 0$ *удовлетворяет условию* (2.1). *Тогда*

$$\int\limits_{G} \varphi\,(\sup_{n\geqslant 1} n^{-1} f_n(x))\, dx < +\infty.$$

Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ — базис пространства $L^{\nu}(G)$, $\nu > 1$ типа $\langle \nu, \nu \rangle$, $U = \{u_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ — сопряженная к Φ система из $L^{\nu'}(G)$, $|\nu'|^{-1} + \nu^{-1} = 1$. Если $f(x) \in L^{\nu}(G)$ и $\mathfrak{L}_f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} c_n(f)\, \varphi_n(x)$ — разложение функции по системе Φ, то коэффициенты $c_n(f)$, $n \geqslant 1$ определяются формулой

$$c_n(f) = \int\limits_{G} f(x)\, u_n(x)\, dx. \tag{2.7}$$

Построим ортогональную и нормированную по равномерной метрике систему $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k\geqslant 1}$. Пусть $\{\sigma_k\}_{k\geqslant 1}$ — убывающая последовательность положительных чисел $\sum\limits_{k\geqslant 1} \sigma_k < +\infty$. Положим $j_1 = 1$, $\psi_1(x) = r_{j_1}(x)$ ($r_j(x)$, $j \geqslant 1$ — функции Радемахера) и $s_0 = 0$. Существует натуральное число s_1 такое, что

$$\|\psi_1 - \sum_{s_0<n<s_1} c_n(\psi_1)\varphi_n\|_{L^\nu(G)} < \min\{\mu(\Delta_1), \sigma_1\}$$

(где $\Delta_1 = G$).

Остальные функции мы будем строить по пачкам $\psi_k(x)$, $n_j < k \leqslant n_{j+1}$, $j \geqslant 1$ (считаем, что в первой пачке одна функция $\psi_1(x)$, считаем также $0 = n_0 < n_1 = 1$). Рассмотрим интервалы постоянства функции $\psi_1(x)$, $\Delta_2, \cdots, \Delta_{n_2}$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$ при $n_1 < i \neq j \leqslant n_2$, $\bigcup_{n_1<i<n_2} \Delta_i = G$ (всюду мы будем считать, что из отрезка G выброшены двоично рациональные точки). Заметим, что Δ_k, $n_1 < k \leqslant n_2$ — двоичные интервалы. Построим вторую пачку функций $\psi_k(x)$, $n_1 < k \leqslant n_2$, $\operatorname{supp}\psi_k(x) = \Delta_k$. Если функции $\psi_1(x), \cdots, \psi_{k-1}(x)$, $n_1 \leqslant k < n_2$ уже построены (построены и числа $s_0 < s_1 < \cdots < s_{k-1}$), то функция $\psi_k(x)$ и число s_k строятся следующим образом. Пусть $\chi_\Delta(x)$ — характеристическая функция интервала Δ тогда для любого $n \geqslant 1$

$$\lim_{j\to+\infty} \int_G \chi_\Delta(x)\, r_j(x)\, \psi_n(x)\, dx = 0.$$

Следовательно, полагая $\psi_k(x) = \chi_{\Delta_k}(x)\, r_{j_k}(x)$, при достаточно большом j_k будем иметь

$$\|\sum_{1<n<s_{k-1}} c_n(\psi_k)\varphi_n\|_{L^\nu(G)} < \delta_k = \min\{|\mu(\Delta_k)|^{1/\nu}, 2^{-1}\sigma_k\}. \tag{2.8}$$

Найдем $s_k > s_{k-1}$, при котором

$$\|\psi_k - \sum_{n<s_k} c_n(\psi_k)\varphi_n\|_{L^\nu(G)} < \delta_k. \tag{2.9}$$

Обозначим

$$v_k(x) = \sum_{s_{k-1}<n<s_k} c_n(\psi_k)\varphi_n(x).$$

Из (2.8) и (2.9) следует

$$\|\psi_k - v_k\|_{L^\nu(G)} \leqslant \|\psi_k - \sum_{n<s_k} c_n(\psi_k) \times$$

$$\times \varphi_n\|_{L^\nu(G)} + \|\sum_{n<s_k-1} c_n(\psi_k)\varphi_n\|_{L^\nu(G)} < 2\delta_k \leqslant \sigma_k. \tag{2.10}$$

Отсюда имеем (см. 16))

$$\|(v_k^*)_\Phi\|_{L^\nu(G)} \leqslant M_\nu \|v_k\|_{L^\nu(G)} \leqslant 2M_\nu \|\psi_k\|_{L^\nu(G)}. \tag{2.11}$$

Вторая пачка функций системы Ψ построена. Пусть построены функции первых $j-1$ пачек $\psi_k(x)$, $k \leqslant n_{j-1}$. Рассмотрим интервалы постоянства функций $\psi_k(x)$, $k \leqslant n_{j-1}$, $\Delta_{n_{j-1}+1}, \cdots, \Delta_{n_j}$,

$$\bigcup_{n_{j-1}<i<n_j} \Delta_i = G,\ \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing,\ n_{j-1} < i \neq i' \leqslant n_j.$$

Аналогичным образом, на каждом из этих интервалов Δ_k, $n_{j-1} < k \leqslant n_j$ построим функцию j-ой пачки $\psi_k(x)$ так, чтобы выполнялись условия (2.10) и (2.11), при этом каждая из этих функций имеет вид

$$\psi_k(x) = \chi_{\Delta_k}(x)\, r_{j_k}(x),\ j_{k+1} > j_k,\ k \geqslant 1,$$

где Δ_k — двоичный интервал и

$$\int_{\Delta_k} r_{j_k}(x)\,dx = 0. \tag{2.12}$$

Положим

$$V_i(x) = \Big(\sum_{n_{i-1}<k<n_i} (v_k^*(x))_\Phi^\nu\Big)^{1/\nu}.$$

Имеем

$$\int_G |V_i(x)|^\nu\,dx = \sum_{n_{i-1}<k<n_i} \int_G (v_k^*(x))_\Phi^\nu\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n_{i-1}<k<n_i} 2\cdot M_\nu^\nu \int_G |\psi_k(x)|^\nu\,dx = 2^\nu M_\nu^\nu = M.$$

Следовательно, в силу леммы 2.1 существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{i_j\}_{j\geqslant 1}$ такая, что

$$\int_G \varphi(|\sup_{j\geqslant 1} j^{-1} V_{i_j}(x)|^\nu)\,dx < +\infty, \tag{2.13}$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (2.1). Предположим $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = 0$, тогда из (2.13) получим

$$\lim_{n\to+\infty} \int_G \varphi(|\sup_{j\geqslant n} j^{-1}\ln^{-1}(j+1)\,V_{i_j}(x)|^\nu)\,dx = 0. \tag{2.14}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $i_j = j$, $j \geqslant 1$.

Обозначим

$$b_k = (j\ln(j+1))^{-\frac{1}{\nu}} \tag{2.15}$$

при $n_{j-1} < k \leqslant n_j$, $j \geqslant 1$. Пусть $n_{i-1} < n \leqslant n_i$. Имеем

$$\sup_{k\geqslant n} b_k(v_k^*(x))_\Phi \leqslant \sup_{j\geqslant i}\Big(\sum_{n_{j-1}<k<n_j} |b_k(v_k^*(x))_\Phi|^\nu\Big)^{1/\nu} =$$

$$= \sup_{j\geqslant i} |j\ln(j+1)|^{-\frac{1}{\nu}} V_j(x).$$

Следовательно, в силу (2.14)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_G \varphi(|\sup_{j\geqslant n} b_k(v_k^*(x))_\Phi|^\nu)\,dx = 0.$$

Положим $\omega(t) = \omega_\varphi(t) = \varphi(t^\nu)$. Справедливо

Замечание 2.1.

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sup_{k\geqslant n} b_k(v_k^*)_\Phi\|_{L^\infty(G)} = 0,$$

где $\omega(t)$ — монотонно возрастающая функция на $[0, +\infty)$ и

$$\lim_{t\to 0} \omega(t) = 0, \int_1^{+\infty} t^{-\nu-1}\, \omega(t)\, dt < +\infty, \ \nu > 1. \qquad (2.16)$$

Легко проверить, что если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (2.1), т $\omega(t) = \varphi(t)$ или $\omega(t) = \varphi^*(t)$ будет удовлетворять условию (2.16) Следовательно, из замечания 2.1 будет вытекать

Замечание 2.2.

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sup_{k>n} b_k (v_k^*)\|_{L^{\varphi^*}(G)} = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sup_{k>n} b_k (v_k^*)\|_{L^{\varphi}(G)} = 0,$$

где $\varphi(t)$ — возрастающая функция на $[0, +\infty)$ и

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0, \int_1^{+\infty} t^{-2}\, \varphi(t)\, dt < +\infty. \qquad (2.17)$$

Замечание 2.3.

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sum_{k>n} b_k |v_k - \psi_k|\|_{L^{\omega}(G)} = 0,$$

где функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию (2.16).

Замечание 2.4.

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sum_{k>n} b_k |v_k - \psi_k|\|_{L^{\varphi^*}(G)} = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sum_{k>n} b_k |v_k - \psi_k|\|_{L^{\varphi}(G)} = 0,$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (2.17).

Замечание 2.4 следует из замечания 2.3. Убедимся в справедливости замечания 2.3. Обозначим

$$Q_n(x) = \sum_{k>n} b_k |v_k(x) - \psi_k(x)| \text{ и } \varepsilon_n = \|Q_n\|^{\nu}_{L^{\nu}(G)}.$$

Пусть $\widetilde{Q}_n(x)$ — возрастающая равноизмеримая с $Q_n(x)$ функция, тогда $\widetilde{Q}_n^*(x) \leqslant \varepsilon_n x^{-1}$. Отсюда

$$\|Q_n\|_{L^{\omega}(G)} = \|Q_n^*\|_{L^{\varphi}(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \int_G \varphi(\varepsilon_n t^{-1})\, dt = \varepsilon_n \int_{\varepsilon_n}^{+\infty} t^{-2}\, \varphi(t)\, dt = \varphi^*(\varepsilon_n).$$

Из (2.10) следует, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Следовательно, в силу (1.4) стремится к нулю и $\varphi^*(\varepsilon_n)$. Замечание 2.3 доказано.

Замечание 2.5. При $\nu > 2$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |\sum_{k<n} b_k \psi_k(x)| = +\infty \text{ почти всюду на } G.$$

Доказательство. В силу (2.14) имеет место

$$\sum_{k\geqslant 1} |b_k \psi_k(x)|^2 = \sum_{j\geqslant 1} |j \ln (j+1)|^{-\frac{2}{\nu}} \times$$

$$\times \sum_{n_{j-1}<k<n_j} |\psi_k(x)|^2 = \sum_{j\geqslant 1} |j \ln (j+1)|^{-\frac{2}{\nu}} = +\infty \text{ почти всюду на } G.$$

Если учесть, что функция $\psi_k(x)$, $k\geqslant 1$ является полиномом из функций j_k-ой пачки системы Хаара и при этом $j_{k+1}>j_k$ (см. 2.12), то из полученного неравенства следует (см. [7] и [10]) справедливость замечания 2.5.

Замечание 2.6. Если в формуле (2.15) взять $b_k=(j \ln (j+1))^{-\frac{1}{2}}$ при $n_{j-1}<k\leqslant n_j$, $j\geqslant 1$, то при $\nu>2$ получили бы

1) $$\lim_{n\to+\infty} \|\sup_{k\geqslant n} b_k (v_k^*)_\Phi\|_{L^\nu(G)} = 0,$$

2) $$\lim_{n\to+\infty} \|\sum_{k\geqslant n} b_k (v_k - \psi_k)\|_{L^\nu(G)} = 0.$$

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Через G^* обозначим систему множеств из G, каждое из которых является объединением конечного числа двоичных интервалов. Пусть e_1 и e_2 — множества из G^* равной меры,

$$r_{e_1, e_2}(x) = \chi_{e_1}(x) - \chi_{e_2}(x). \tag{3.1}$$

Справедлива

Лемма 3.1. *Пусть заданы $e\in G^*$, $\sigma>0$, действительное число f и натуральное число n. Тогда существует разбиение множества $e=e^+\cup e^-$ и функция*

$$\Psi_e(x) = \sum_{n<k<m} \eta_k b_k \psi_k(x)$$

($\eta_k=0$ *или* 1, $n<k\leqslant m$), *которые удовлетворяют условиям*

1) $$\|\Psi_e - f r_{e^+, e^-}\|_{L^\nu(G)} < \sigma$$

($\nu\geqslant 2$ — *заранее фиксированное число*).

2) $$(\Psi_e^*(x))_\Psi \leqslant (|f|+\sigma)\chi_e(x) \text{ для всех } x\in G.$$

(Определение $(\Psi_e^*(x))_\Psi$ см. 1.5)).

Доказательство. При $f=0$ достаточно взять $\Psi_e(x)\equiv 0$, $x\in G$ и условия леммы будут выполнены. Предположим, что $f\neq 0$. Пусть $\varepsilon>0$ ($\varepsilon=\varepsilon(\sigma)$ выберем позднее) $l>n$ и

$$\sup_{k\geqslant l} |b_k| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{k\geqslant l} \alpha_k b_k \psi_k(x)$, где $\alpha_k=0$, если Δ_k лежит в $G\setminus e'$ и $\alpha_k=1$, если $\Delta_k\subseteq e$. Из замечания 2.5 следует

$$\sup_{j\geqslant 1} |\sum_{l<k<j} \alpha_k b_k \psi_k(x)| \geqslant |f| \text{ почти всюду на } e. \tag{3.3}$$

Через $j(x)$ обозначим наименьшее число j, $j>l$, при котором

$$\Big|\sum_{l<k<j(x)} a_k b_k \psi_k(x)\Big| \geqslant |f|. \tag{3.4}$$

В силу (3.3) $j(x)$ — почти всюду конечная функция на e. Поэтому для некоторого натурального числа m $\mu(e_\varepsilon)<\varepsilon$, где $e_\varepsilon=\{x: x\in e,\ j(x)>m\}$.

Пусть $\tau(x)=j(x)$ при $x\in e\setminus e_\varepsilon$ и $\tau(x)=m$ в остальных точках G. Определим β_k, $l\leqslant k\leqslant m$, полагая $\beta_k=1$ всегда, кроме тех случаев, когда $\Delta_k\subseteq e$ и в некоторой точке x из Δ_k $j(x)<k$. В этом случае берем $\beta_k=0$.

Рассмотрим функцию

$$\Psi_e(x)=\sum_{n<k<m} \eta_k\, b_k \psi_k(x), \text{ где } \eta_k=0 \text{ при}$$

$n<k<l$ и $\eta_k=\alpha_k\beta_k$ при $l\leqslant k\leqslant m$. Докажем, что

$$\eta_k b_k \psi_k(x)=\alpha_k b_k \psi_k(x),\ x\in G,\ l\leqslant k\leqslant \tau(x)$$

и

$$\eta_k b_k \psi_k(x)=0,\ x\in G,\ \tau(x)<k\leqslant m. \tag{3.5}$$

Вне e утверждение очевидно. Пусть $x_0\in e$. Предположим $\eta_k b_k \psi_k(x_0)\neq \alpha_k b_k \psi_k(x_0)$, тогда $x_0\in\Delta_k$, $\beta_k=0$ и $\alpha_k b_k \psi_k(x_0)\neq 0$. Следовательно, для некоторого $x_1\in\Delta_k$ $j(x_1)<k$. Так как функции $\psi_j(x)$, $l\leqslant j\leqslant j(x_1)$ постоянны на Δ_k, то $j(x_1)=j(x)=\tau(x)$ всюду на Δ_k и, в частности, $k>\tau(x_0)$.

Пусть теперь $k>\tau(x_0)=j(x_0)$. Если $x_0\notin\Delta_k$, то $\eta_k b_k \psi_k(x_0)=0$. Если же $x_0\in\Delta_k$, то $\beta_k=0$. Следовательно, $\eta_k b_k \psi_k(x_0)=0$. Тем самым утверждение (3.5) доказано.

Из (3.5) и, соответственно, из (3.4) имеем

$$\Psi_e(x)=\sum_{l<k<\tau(x)} \alpha_k b_k \psi_k(x),\ x\in G,$$

$$(\Psi_e^*(x))_\Psi \leqslant \Big|\sum_{l<k<\tau(x)} \alpha_k b_k \psi_k(x)\Big| + \sup_{k>l}|b_k| \leqslant |f|+\varepsilon,\ x\in e. \tag{3.6}$$

Это показывает, что при $\varepsilon>\sigma$ условие 2) леммы 3.1 выполнено.

Нам остается убедиться в справедливости условия 1). Обозначим через e_1 то множество из e, на котором функция $\Psi_e(x)$ и f имеют одинаковый знак, и через e_2 множество из e, на котором $\Psi_e(x)$ и f имеют противоположные знаки. Очевидно e_1 и e_2 принадлежат G^*.

Из (3.4) и (3.6) следует

$$|f|\,\mu(e_1)+\varepsilon \geqslant \int_{e_1}\Psi_e(x)\,dx = 2^{-1}\int_{e_1}|\Psi_e(x)|\,dx =$$

$$=2^{-1}\int_{e\setminus e_\varepsilon}|\Psi_e(x)|\,dx \geqslant 2^{-1}\int_{e-e_\varepsilon}|f|\,dx > 2^{-1}|f|\,(\mu(e)-\varepsilon).$$

Следовательно, $\mu(e_1)>2^{-1}\mu(e)-2^{-1}\varepsilon-|f|^{-1}\varepsilon$. Точно также убедимся, что $\mu(e_2)>2^{-1}\mu(e)-2^{-1}\varepsilon-|f|^{-1}\varepsilon$. Мы можем считать, что $\mu(e_1)<2^{-1}\mu(e)$ и $\mu(e_2)<2^{-1}\mu(e)$. Пусть $e'=e\setminus(e_1\cup e_2)$. Имеем $\mu(e')<\varepsilon+2|f|^{-1}\varepsilon$. Множество e' разобьем на две e_1' и e_2' части (e_1' и e_2' при-

надлежат G^*) так, чтобы $\mu(e^+)=2^{-1}\mu(e)$ и $\mu(e^-)=2^{-1}\mu(e)$ (где $e^+=e_1\cup e_1'$ и $e^-=e_2\cup e_2'$. Имеем

$$\|\Psi_e-f\|_{L^\nu(e^+)}\leqslant\|\Psi_e-f\|_{L^\nu(e_1)}+\|\Psi_e\|_{L^\nu(e_1')}+\|f\|_{L^\nu(e_1')}\leqslant\varepsilon\mu(e)+2|f|\varepsilon+4\varepsilon.$$

Отсюда следует, что при достаточно малом ε будет

$$\|\Psi_e-f\|_{L^\nu(e^+)}<2^{-1}\sigma.$$

Точно также убедимся, что

$$\|\Psi_e+f\|_{L^\nu(e^-)}<2^{-1}\sigma.$$

Из последних двух неравенств следует справедливость условия 1) леммы 3.1. Тем самым лемма 3.1 доказана.

Из замечаний 2.1 и 2.3 легко получить такое утверждение.

Лемма 3.1′. *Пусть заданы: $e\in G^*$, $\sigma>0$, f — действительное число, m_0—натуральное число. Тогда существуют разбиение $e=e_1\cup e_2$, полином*

$$V_e(x)=\sum_{n<k<m}\eta_k b_k v_k(x) \tag{3.7}$$

($\eta_k=0$ *или* 1, $n<k\leqslant m$), *которые удовлетворяют условиям:*

1) $\|V_e-f r_{e^+,e^-}\|_{L^\omega(G)}<\sigma$,

2) $\|(V_e^+)_\Phi\|_{L^\omega(G)}\leqslant 3\|f r_{e^+,e^-}\|_{L^\omega(G)}$,

3) $\|(V_e^+)_\Phi\|_{L^\omega(G\setminus e)}<\sigma$

(*функция* $\omega(t)$ *удовлетворяет условию* (2.16)).

Из замечания 2.6 следует

Лемма 3.1″. *Пусть заданы $e\in G^*$, $\sigma>0$, f — действительное число, m_0—натуральное число. Тогда при $\nu>2$ существуют разбиение $e=e^+\cup e^-$, полином* (3.7), *которые удовлетворяют условиям*

1) $\|V_e-f r_{e^+,e^-}\|_{L^\nu(G)}<\sigma$,

2 $\|(V_e^-)_\Phi\|_{L^\nu(G)}\leqslant 3\|f r_{e^+,e^-}\|_{L^\nu(G)}$,

3) $\|(V_e)_\Phi\|_{L^\nu(G\setminus e)}<\sigma$.

Леммы 3.1′ и 3.1″ мы не будем использовать, однако мы их привели, так как считаем, что они представляют самостоятельный интерес.

Справедлива

Лемма 3.2. *Пусть заданы: $e\in G^*$, $\varepsilon>0$, f — действительное число, m_0— натуральное число. Тогда существует полином по системе Ψ*

$$\Psi_e(x)=\sum_{m_0<k<m_1}\eta_k b_k\psi_k(x)$$

(η_k — *принимает значения* 0 *или* 1), *который удовлетворяет условиям*

1) $\|\Psi_e-f\chi_e\|_{L^{\nu^*}(G)}<\varepsilon$,

2) $\|\Psi_e\|_{L^{\varphi^*}(G),\Psi} \leqslant \gamma \| f \chi_e \|_{L^{\varphi^*}(G)}$,

3) $\|(\Psi_e^*)_\Psi\|_{L^\varphi(G)} \leqslant \Gamma \|f \chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)}$

(γ и Γ — *постоянные большие нуля, функция* $\varphi(t)$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 3) *замечания* 1.1)

Доказательство. Если $f=0$, то $\Psi_e(x) \equiv 0$ будет удовлетворять условиям леммы. Предположим $f \neq 0$. Построим функцию $r_{e_k^+, e_k^-}(x)$ и

$$\Psi_{e_k}(x) = \sum_{l_{k-1} < j < l_k} \eta_{jk} b_k \psi_k(x), \quad k \geqslant 1$$

(η_{jk} принимает значения 0 и 1) следующим образом: положим $e_1 = e_0^- = e$. Применяя лемму 3.1, построим функции $r_{e_1^+, e_1^-}(x)$ и $\Psi_{e_1}(x)$, где вместо n и σ берутся $l_0 = m_0$ и $2^{-1}\sigma$, соответственно. Предположим построены $r_{e_1^+, e_1^-}(x), \cdots, r_{e_{k-1}^+, e_{k-1}^-}(x)$, $\Psi_{e_1}(x), \cdots, \Psi_{e_{k-1}}(x)$. Положим $e_k = e_{k-1}^-$. Применяя лемму 3.1, построим $r_{e_k^+, e_k^-}(x)$ и $\Psi_{e_k}(x)$, которые удовлетворяют условиям

$$\|\Psi_{e_k} - 2^{k-1} f r_{e_k^+, e_k^-}\|_{L^\varphi(G)} < 2^{-k}\sigma, \tag{3.8}$$

$$(\Psi_{e_k}^*(x))_\Psi \leqslant (2^{k-1}|f| + 2^{-k}\sigma)\chi_{e_k}(x), \quad x \in G. \tag{3.9}$$

Пусть s — натуральное число. Обозначим

$$\Psi_j(x) = \sum_{1 \leqslant k < j} \Psi_{e_k}(x), \quad 1 \leqslant j \leqslant s,$$

$$\Psi_e(x) = \Psi_s(x)$$

и

$$f_j(x) = \sum_{1 \leqslant k < j} 2^{k-1} f r_{e_k^+, e_k^-}(x), \quad 1 \leqslant j \leqslant s.$$

Из (3.9) имеем

$$(\Psi_e^*(x))_\Psi \leqslant \sum_{1 \leqslant k < s} (\Psi_{e_k}^*(x))_\Psi \leqslant \sum_{1 \leqslant k < n} 2^{k-1}|f|\chi_{e_k}(x) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant k < s} 2^{-k}\sigma\chi_{e_k}(x) \leqslant \sum_{1 \leqslant k < s} 2^{k-1}|f|\chi_{e_k}(x) + \sigma\chi_e(x).$$

По построению

$$\mu(e_k) = \mu(e_{k-1}^-) = 2^{-1}\mu(e_{k-1}) = \cdots = 2^{1-k}\mu(e_1) = 2^{1-k}\mu(e).$$

Поэтому

$$\|(\Psi_e^*)_\Psi\|_{L^\varphi(G)} \leqslant 2\mu(e) \sum_{k \geqslant 1} \varphi(2^{k-1}|f|)2^{-k} +$$

$$+ \varphi(\sigma) \leqslant 2\mu(e) \int_0 \varphi(|f| t^{-1})\, dt + \varphi(\sigma) =$$

$$= 2\mu(e)|f| \int_{|f|}^{+\infty} t^{-2}\varphi(t)\, dt + \varphi(\sigma) = 2\|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)} + \varphi(\sigma).$$

Так как $\varphi(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$, то полученное неравенство показывает, что при достаточно малом σ условие 3) леммы 3.2 будет выполнено.

Убедимся в справедливости условия 1). Пусть $x \in e_k^+$, $1 \leqslant k \leqslant j \leqslant s$. Тогда

$$x \in e_k^+ \subseteq e_k = e_{k-1}^- \subseteq e_{k-1} \subseteq e_{k-2}^- \subseteq \cdots \subseteq e_1^-, \quad x \overline{\in} e_k^- = e_{k-1} \supseteq e_{k+1}^- = \\ = e_{k+2} \supseteq \cdots \supseteq e_j.$$

Следовательно

$$f_j(x) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant k} 2^{l-1} f r_{e_l^+, e_l^-}(x) = 2^{k-1} f - \\ - \sum_{1 \leqslant l \leqslant k} 2^{l-1} f = f, \quad x \in e_k^+, \quad 1 \leqslant k \leqslant j \leqslant s. \tag{3.10}$$

С другой стороны

$$e_j^- = e_j \setminus e_j^+ = e_{j-1}^- \setminus e_j^+ = e_{j-1} \setminus \\ \setminus (e_j^+ \cup e_{j-1}^+) = \cdots = e_1 \setminus \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant j} e_k^+ = e \setminus \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant j} e_k^+, \quad 1 \leqslant j \leqslant s. \tag{3.11}$$

Поэтому

$$f_j(x) = -f \sum_{1 \leqslant k \leqslant j} 2^{k-1} = (1-2^j) f, \quad x \in e_j^-, \quad 1 \leqslant j \leqslant s. \tag{3.12}$$

Отсюда и из (3.10)—(3.11) вытекает

$$f \chi_e(x) - f_s(x) = 2^s f \chi_{e_s^-}(x), \quad x \in G.$$

Следовательно

$$\|f \chi_e - f_s\|_{L^{\varphi^*}(G)} = \varphi^*(2^s |f| \mu(e_s^-)) = \\ = \varphi^*(2^s |f|) 2^{-s} \mu(e) = |f| \mu(e) \int_{2^s |f|}^{+\infty} t^{-2} \varphi(t)\, dt. \tag{3.13}$$

Пусть

$$e_j(\sigma) = \{x : |\Psi_j(x) - f_j(x)| > \sigma^{1/2}, \ x \in e\}.$$

Применяя неравенство Чебышева, в силу (3.8) будем иметь

$$\mu(e_j(\sigma)) \leqslant \sigma^{-\frac{1}{2}} \int_G |\Psi_j(x) - f_j(x)|\, dx \leqslant \\ \leqslant \sigma^{-\frac{1}{2}} \|\Psi_j - f_j\|_{L^1(G)} \leqslant \sigma^{-\frac{1}{2}} \sum_{1 \leqslant k \leqslant j} \|\Psi_{e_k} - 2^{k-1} f \times \\ \times r_{e_k^+, e_k^-}\|_{L^1(G)} < \sigma^{1/2}, \quad 1 \leqslant j \leqslant s.$$

Следовательно

$$\|\Psi_j - f_j\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant \int_{e(\sigma)} \varphi^*(\Psi_j(x) - f_j(x))\, dx + \\ + \int_{e - e_j(\sigma)} \varphi^*(|\Psi_j(x) - f_j(x)|)\, dx \leqslant \tag{3.14}$$

$$\leqslant \varphi^* (2^j |f| + \sigma) \sigma^{1/2} + \sigma^{1/2} \mu (e).$$

Это неравенство вместе с (3.13) дает

$$\|\Psi_e - f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant \sigma^{1/2} + \varphi^* (2^s |f| + \sigma) \sigma^{1/2} +$$

$$+ |f| \int\limits_{2^s |f|}^{+\infty} t^{-2} \varphi (t)\, dt = J_1 + J_2 + J_3.$$

При достаточно большом s J_3 будет меньше $3^{-1}\varepsilon$. После выбора s выберем достаточно малое σ, при котором $J_1 < 3^{-1}\varepsilon$, $J_2 < 3^{-1}\sigma$, и убедимся в справедливости условия 1).

Условие 2). Имеем

$$\|\Psi_e\|_{L^{\varphi^*}(G), \Psi} \leqslant \sup_{1 \leqslant j \leqslant s} \|f_j\|_{L^{\varphi^*}(G)} + \sup_{1 \leqslant j \leqslant s} |\Psi_j -$$

$$- f_j\|_{L^{\varphi^*}(G)} + \sup_{1 \leqslant k \leqslant s} \|(\Psi^*_{e_k})_\Psi\|_{L^{\varphi^*}(G)} = J_4 + J_5 + J_6.$$

Из (3.10)—(3.12) следует

$$J_4 \leqslant \sup_{1 \leqslant j \leqslant s} \varphi^* (|f|) \mu (e \setminus e_j^-) + \varphi^* ((2^j - 1) |f|) \mu (e_j^-)) \leqslant$$

$$\leqslant 2\varphi^* (|f|) \mu (e) = 2 \|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)}.$$

Из (3.14) вытекает, что при достаточно малом σ $J_5 \leqslant \|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)}$. Из (3.9) следует

$$J_6 \leqslant \varphi^* (2^{k-1} |f|) \mu (e_k) + \varphi^* (\sigma) \leqslant \varphi^* (|f|) \mu (e) + \varphi^* (\sigma).$$

Отсюда при достаточно малом σ $J_6 \leqslant 2 \|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)}$. Полученные неравенства вместе дают

$$\|\Psi_e\|_{L^{\varphi^*}(G), \Psi} \leqslant s \|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)} = \gamma \|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)}.$$

Условие 2) выполнено. Тем самым, лемма 3.2, доказана.

Лемма 3.3. *Пусть заданы* $e \in G^*$, $\sigma > 0$, f — *действительное число,* l_0 — *натуральное число. Тогда существует полином по системе* Φ

$$P_e (x) = \sum_{l_0 < k < l_1} \eta_k b_k v_k (x)$$

(*η_k принимает значения* 0 *или* 1), *который удовлетворяет условиям*

1) $\|P_e - f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)} < \sigma$,

2) $\|P_e\|_{L^{\varphi^*}(G), \Phi} \leqslant \gamma_1 \|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)}$,

3) $\|(P_e^*)_\Phi\|_{L^{\varphi}(G)} \leqslant \Gamma_1 \|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)}$,

(*γ_1 и Γ_1 — постоянные, большие нуля, функция* $\varphi(t)$ *удовлетворяет условиям* 1)—3) *замечания* 1.1).

Доказательство. Если $f = 0$, то $P_e(x) \equiv 0$ будет удовлетворять условиям леммы. Предположим $f \neq 0$. В силу замечаний 2.2 и 2.4 найдем число $m_0 > l_0$ такое, что

$$\Big\|\sum_{k>m_0} b_k|\psi_k - v_k|\Big\|_{L^{\varphi^*}(G)} < \varepsilon, \quad \Big\|\sup_{k>m_0} b_k (v_k^*)_\Phi\Big\|_{L^{\varphi^*}(G)} < \varepsilon,$$

$$\Big\|\sum_{k>m_1} b_k|\psi_k - v_k|\Big\|_{L^{\varphi}(G)} < \varepsilon, \quad \Big\|\sup_{k>m_0} b_k (v_k^*)_\Phi\Big\|_{L^{\varphi}(G)} < \varepsilon$$

(ε — наперед заданное число, большее нуля).

Пусть $\Psi_e(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3.2. Обозначим

$$P_e(x) = \sum_{m_0<k<m} \eta_k b_k v_k(x).$$

Имеем

$$\|P_e - f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant \|P_e - \Psi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)} + \|f\chi_e - \Psi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \Big\|\sum_{k>m_0} b_k|\psi_k - v_k|\Big\|_{L^{\varphi^*}(G)} + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

$$\|P_e\|_{L^{\varphi^*}(G),\Phi} \leqslant \|\Psi_e\|_{L^{\varphi^*}(G),\Psi} + \Big\|\sum_{k>m_1} b_k|\psi_k -$$

$$- v_k|\Big\|_{L^{\varphi^*}(G)} + \Big\|\sup_{k>m_0} b_k (v_k^*)_\Phi\Big\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant \gamma\|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)} + 2\varepsilon,$$

$$\|(P_e^*)_\Phi\|_{L^{\varphi}(G)} \leqslant \|(\Psi_e^*)_\Psi\|_{L^{\varphi}(G)} + \Big\|\sum_{k>m_0} b_k|\psi_k - v_k|\Big\|_{L^{\varphi}(G)} + \Big\|\sup_{k>m_0} b_k (v_k^*)_\Phi\Big\|_{L^{\varphi}(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \Gamma\|f\chi_e\|_{L^{\varphi^*}(G)} + 2\varepsilon.$$

Взяв $\eta_k = 0$ при $l_0 < k \leqslant m_0$, $l_1 = m_1$ убедимся, что при достаточно малом ε будут выполняться условия 1) и 3) леммы 3.3.

Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. *Пусть заданы $\varepsilon > 0$, функция $F(x) \in L^{\varphi^*}(G)$, натуральное число m_0. Тогда существует полином*

$$\Omega(x) = \sum_{m_0<k<m_1} \eta_k b_k v_k(x)$$

(η_k принимает значения 0 или 1), который удовлетворяет условиям

1) $\|\Omega - F\|_{L^{\varphi^*}(G)} < \varepsilon$,

2) $\|\Omega\|_{L^{\varphi^*}(G),\Phi} \leqslant \gamma_2\|F\|_{L^{\varphi^*}(G)}$,

3) $\|\Omega_\Phi^*\|_{L^{\varphi}(G)} \leqslant \Gamma_2\|F\|_{L^{\varphi^*}(G)}$

(γ_2 и Γ_2 — постоянные, большие нуля, $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1)—3) *замечания* 1.1).

Доказательство. При $\|F\|_{L^{\varphi^*}(G)} = 0$ берем $\Omega(x) \equiv 0$. Пусть $\|F\|_{L^{\varphi^*}(G)} \neq 0$, $\sigma < \min\{\|F\|_{L^{\varphi^*}(G)}, \varepsilon\}$, $f(x)$ — ступенчатая на G функция такая, что $\|F - f\|_{L^{\varphi^*}(G)} < 2^{-1}\sigma$. Обозначим через $e_1, \cdots, e_s$ интервалы постоянства функции $f(x)$. Поочередно применяя лемму 3.3 мы построим полиномы

$$P_{e_j}(x) = \sum_{l_{j-1}<k<l_j} \eta_k b_k v_k(x), \quad 1 \leqslant j \leqslant s$$

(η_k принимает значения 0 или 1, $m_0 = l_0 < l_1 < \cdots < l_s = m_1$), которые удовлетворяют условиям

$$\|P_{e_j} f\chi_{e_j}\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant 2^{-1}s^{-1}\sigma, \quad 1 \leqslant j \leqslant s,$$

$$\|P_{e_j}\|_{L^{\varphi^*}(G),\Phi} \leqslant \gamma_1\|f\chi_{e_j}\|_{L^{\varphi^*}(G)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant s$$

и

$$\|(P^*_{e_j})_\Phi\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant \Gamma_1 \|f\chi_{e_j}\|_{L^{\varphi^*}(G)}.$$

Положим

$$\Omega(x) = \sum_{1<j<s} P_{e_j}(x).$$

Имеем

$$\|\Omega - F\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant \|\Omega - f\|_{L^{\varphi^*}(G)} + \|F - f\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1<j<s} \|P_{e_j} - f\chi_{e_j}\|_{L^{\varphi^*}(G)} + 2^{-1}\varepsilon < \varepsilon,$$

$$\|\Omega\|_{L^{\varphi^*}(G),\Phi} \leqslant \sum_{1<j<s} \|P_{e_j}\|_{L^{\varphi^*}(G),\Phi} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_1 \sum_{1<j<s} \|f\chi_{e_j}\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant \gamma_1 \|f\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_1 \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)} + \gamma_1 \|F - f\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant 2\gamma_1 \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)},$$

$$\|\Omega^*_\Phi\|_{L^{\varphi}(G)} \leqslant \sum_{1<j<s} \|P^*_{e_j})_\Phi\|_{L^{\varphi}(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \Gamma_1 \sum_{1<j<s} \|f\chi_{e_j}\|_{L^{\varphi^*}(G)} = \Gamma_1 \|f\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \Gamma_1 \|f - F\|_{L^{\varphi^*}(G)} + \Gamma_1 \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant 2\Gamma_1 \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)}.$$

Лемма 3.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Через

$$\Omega(x) = \sum_{k>1} d_k \varphi_k(x)$$

обозначим раскрытый по внутренней сумме ряд

$$\sum_{k>1} b_k v_k(x).$$

В случае $\|F\|_{L^{\varphi^*}(G)} = 0$ теорема тривиальна надо положить $\Omega_F(x) \equiv 0$. Пусть $\|F\|_{L^{\varphi^*}(G)} \neq 0$. Согласно лемме 3.4 существует положить

$$\Omega_1(x) = \sum_{l_0<k<l_1} \lambda_k d_k \varphi_k(x), \quad l_0 = 0$$

(λ_k принимает значения 0 или 1), удовлетворяющий условиям

$$\|\Omega_1 - F\|_{L^{\varphi^*}(G)} < 2^{-1} \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)},$$

$$\|\Omega_1\|_{L^{\varphi^*}(G),\Phi} \leqslant \gamma_2 \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)},$$

$$\|(\Omega^*_1)_\Phi\|_{L^{\varphi}(G)} < \Gamma_2 \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)}.$$

Пусть построен полином

$$\Omega_{j-1}(x) = \sum_{l_{j-2}<k<l_{j-1}} \lambda_k d_k \varphi_k(x), \quad j > 1.$$

Применяя лемму 3.4 построим полином

$$\Omega_j(x) = \sum_{l_{j-1}<k<l_j} \lambda_k d_k \varphi_k(x),$$

удовлетворяющий условиям

$$\|\Omega_j - (F - \sum_{1<n<j} \Omega_n)\|_{L^{\varphi^*}(G)} < 2^{-j} \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)}, \tag{3.15}$$

$$\|\Omega_j\|_{L^{\varphi^*}(G),\,\Phi} \leqslant \gamma_2 \|F - \sum_{1\leqslant n<j} \Omega_j\|_{L^{\varphi^*}(G)}, \tag{3.16}$$

$$\|(\Omega_j^*)_\Phi\|_{L^{\varphi}(G)} \leqslant \Gamma_2 \|F - \sum_{1\leqslant n<j} \Omega_n\|_{L^{\varphi^*}(G)}. \tag{3.17}$$

По построению

$$\|(\Omega_j^*)_\Phi\|_{L^{\varphi}(G)} \leqslant \Gamma_2 2^{1-j} \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)}.$$

Обозначим

$$\Omega_F(x) = \sum_{k\geqslant 1} \lambda_k d_k \varphi_k(x).$$

Из (3.17) следует

$$\|(\Omega_F^*)_\Phi\|_{L^{\varphi}(G)} \leqslant \|\sum_{j\geqslant 1} (\Omega_j^*)_\Phi\|_{L^{\varphi}(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \Gamma_2 \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)} \sum_{j\geqslant 1} 2^{1-j} \leqslant 2\Gamma_2 \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)} = \Gamma_\varphi \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)}.$$

Полученное неравенство, в частности, показывает, что ряд $\Omega_F(x)$ сходится почти всюду. С другой стороны, ряд $\sum_{j\geqslant 1} \Omega_j(x)$ в метрике $L^{\varphi^*}(G)$ сходится к функции $F(x)$ (см. (3.15)). Следовательно, $\Omega_F(x)$ почти всюду на G сходится к $F(x)$. Для завершения доказательства теоремы 1.1 нам остается показать справедливость пункта 2). Из (3.16) имеем

$$\|\Omega_F\|_{L^{\varphi^*}(G),\,\Phi} \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \|\Omega_j\|_{L^{\varphi^*}(G),\,\Phi} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_2 \sum_{j\geqslant 1} 2^{-j} \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)} \leqslant \gamma_\varphi \|F\|_{L^{\varphi^*}(G)}.$$

Эта оценка в частности, показывает сходимость ряда $\Omega_F(x)$ по метрике $L^{\varphi^*}(G)$. Теорема 1.1 доказана.

Известен следующий результат (см. [14], стр. 96—97) Гарсия: Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ — безусловный базис пространства $L^\nu(G)$, $\nu > 1$. Тогда существует постоянная M_ν такая, что для любого $F(x) \in L^\nu(G)$ можно указать перестановку $\Phi' = \{\varphi_{j_n}(x)\}_{n\geqslant 1}$ системы Φ такую, что

$$\|S^*_{\Phi'}(F)\|_{L^\nu(G)} \leqslant M_\nu \|F\|_{L^\nu(G)}.$$

Наш метод вместе с оценкой Гарсия позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ — безусловный базис пространства $L^\nu(G)$, $\nu \geqslant 2$. Тогда существуют перестановка $\Phi' = \{\varphi_{j_n}(x)\}_{n\geqslant 1}$ системы Φ и ряд (по системе Φ')*

$$\sum_{n\geqslant 1} d_n \varphi_{j_n}(x) \tag{3.18}$$

такой, что для любой функции $F(x) \in L^{\varphi^*}(G)$ ($\varphi^*(t)$, $t > 0$ удовлетворяет условиям замечания 1.1) существует частичный ряд

$$\Omega_F(x) = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n d_n \varphi_{j_n}(x) \tag{3.19}$$

(λ_n принимает значения 0 или 1), который удовлетворяет условиям

1) $\Omega_F(x) = F(x)$ *почти всюду на* G,

2) *Ряд* $\Omega_F(x)$ *по метрике* $L^{\Phi^*}(G)$, *сходится к функции* $F(x)$ *и*

$$\|\Omega_F\|_{L^{\Phi^*}(G),\Phi'} \leqslant \gamma_\Phi \|F\|_{L^{\Phi^*}(G)},$$

3) $\|(\Omega_F^*)_{\Phi'}\|_{L^\Phi(G)} \leqslant \Gamma_\Phi \|F\|_{L^{\Phi^*}(G)}$

(γ_Φ *и* Γ_Φ — *постоянные, большие нуля*).

Заметим, что если при доказательстве теоремы 3.1 применить еше и метод, указанный в работе [15] А. М. Олевского (в [15] строится ряд по системе Хаара, корорый после перестановки сходится к $+\infty$ почти всюду, то можно получить следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$ — *безусловный базис пространства* $L^\nu(G)$, $\nu \geqslant 2$. *Тогда существует перестановка* $\Phi' = \{\varphi_{j_n}(x)\}_{n\geq 1}$ *системы* Φ *и ряд* (3.18) (*по этой системе* Φ') *такой, что для любой измеримой на* G *функции* $F(x)$, *принимающей значения* $+\infty$ *или* $-\infty$ *на множествах положительной меры, существует частичный ряд, который сходится к* $F(x)$ *почти всюду*.

В тех случаях, когда $\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$ — тригонометрическая система, система Уолша или полная ортонормированная система, ограниченная в совокупности, этот факт был отмечен в работах, соответственно, [11] и [16], [17], [18].

Доказательство теоремы 3.1 совершенно аналогично доказательству теоремы 1.1. Что же касается теоремы 3.2, то ее доказательство имеет свои трудности. Эта трудность появляется в том случае, когда изображаемая функция принимает значения $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры.

Доказательство теоремы 3.2 мы здесь не приводим.

Ереванский государственный
университет

Поступила 20.VIII.1984

Ֆ. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ. Չափելի ֆունկցիաների ներկայացումը L^ν, $\nu \geqslant 2$ տարածության բազիսներով *(ամփոփում)*

L^ν-տարածության բազիսը կոչվում է $<\nu, \nu>$ տիպի, եթե L^ν դասի ամեն մի ֆունկցիայի վերլուծության մասնակի գումարների մաժորանտը L^ν-ից է։ Հոդվածում ապացուցվում է, որ $<\nu, \nu>$, $\nu \geqslant 2$ տիպի սիստեմը ունի այն հատկությունը, որ ամեն մի չափելի համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիա ներկայացվում է սիստեմով գրված համարյա ամենուրեք զուգամետ շարքով։

F. G. ARUTUNIAN. *Representation of measurable functions by bases of L^ν, space, $\nu \geqslant 2$ (summary)*

The base in L^ν space is called of $<\nu, \nu>$-type if the evaluation of any function in L^ν is again from L^ν. It is proved that every $<\nu, \nu>$ type system $\nu \geqslant 2$, has property that any measurable, almost everywhere finite function is represented by almost everywhere convergent series.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Н. Лузин.* Собрание сочинений, т. I, М., Изд. АН СССР, 1953.
2. *Н. Н. Лузин.* Интеграл и тригонометрический ряд, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
3. *Д. Е. Меньшов.* Sur la représentation des fonctions mesurables par des series trigonométriques, Матем. сб., 9 (51), 1941, 667—692.
4. *Д. Е. Меньшов.* О сходимости по мере тригонометрических рядов, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, вып. 32, 1950.
5. *А. А. Талалян.* Представление измеримых функций рядами. УМН, 15÷5, 1960, 77—141.
6. *А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян.* О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$, Матем. сб., 66 (108), 1965, 240—247.
7. *R. F. Gundy* Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, Trans. Amer. Math. Soc., 124, № 2, 1966, 228—248.
8. *Б. С. Кашин.* Об одной полной ортонормированной системе, Матем. сб., 99, № 3, 1976, 356—365.
9. *Б. С. Кашин.* О некоторых свойствах ортонормированных систем сходимости, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 143, 1977.
10. *Ф. Г. Арутюнян.* Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами. Матем. сб., 90 (132), 4, 1973, 483—520.
11. *Ф. Г. Арутюнян.* О рядах по системе Хаара, ДАН Арм.ССР, т. 42, № 3, 1966, 134—140.
12. *Ф. Г. Арутюнян.* Представление функций кратными рядами, ДАН Арм.ССР, т. 64, № 2, 1977, 72—76.
13. *J. Komlós.* A. generalization of a problem of Steinhaus, Acta Math. Acad. sci. Hung, т. XVIII, № 1—2, 1967, 217—231.
14. *A. Garsia.* Topics in almost every where convergenee, Chicago, 1970.
15. *А. М. Олевский.* О некоторых особенностях рядов Фурье в пространствах L^p ($p < 2$), Матем. сб., 77, № 2, 1968, 251—258.
16. *Ф. Г. Арутюнян.* Система представления, ДАН Арм.ССР, № 2, 1973, 65—71.
17. *Р. И. Овсепян.* О представлении функций ортогональными рядами, ДАН Арм.ССР, LVII, № 1, 1973, 483—494.
18. *Н. Б. Погосян.* Представление измеримых функций ортогональными рядами, Матем. сб., 98 (140), № 1 (9), 1975, 102—112.