ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 1, 1985 Математика

УДК 517.95

Г. Р. АЛЕКСАНДРЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Работа посвящена исследованию ветвления особенностей для одного класса модельных слабо гиперболических уравнений с вырождением достаточно общего вида, допускающих нетривиальную факторизацию. При этом рассматриваются как случаи общего степенного, так и экспоненциального вырождения.

Для строго гиперболических операторов волновые фронты были исчерпывающе изучены в работах Хермандера (см., напр., [1]), а также Лакса и Ниренберга (см. [2]). Для слабо гиперболических операторов возможно ветвление сингулярностей при прохождении через многообразие вырождения. Это явление было обнаружено В. Я. Иврием в [3], а в дальнейшем подробно изучалось на модельных уравнениях Алиньяком в [4], Танигучи и Тозаки в [5] и др. (см. также [7], [8]).

Изучаемое ниже уравнение допускает сингулярную факторизацию, однако отметим, что из приведенного далее явного решения все еще трудно усмотреть характер ветвления особенностей. Поэтому оказывается целесообразным строить с его помощью параметрикс в виде интегрального оператора Фурье. Это построение осуществляется с помощью исследования асимптотик соответствующих интегралов.

Изучение сингулярностей мы будем проводить микролокально, в терминах волнового фронта. Приведем здесь его определение.

Пусть X — область в R^n, $(x_0, \xi^0) \in X \times (R^n \setminus 0)$, u — распределение из $D'(X)$. Говорят, что (x_0, ξ^0) не принадлежит волновому фронту u ($WF(u)$), если существует такое распределение с компактным носителем $v \in E'(X)$, что $u = v$ в окрестности x_0 и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для любого $N > 0$ существует постоянная $C_N > 0$ такая, что

$$|\hat{v}(\xi)| \leqslant C_N (1+|\xi|)^{-N} \text{ при } \left|\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\xi^0}{|\xi^0|}\right| < \varepsilon,$$

т. е. преобразование Фурье $\hat{v}(\xi)$ быстро убывает в конической окрестности ξ^0.

Подробное описание волновых фронтов и их свойств можно найти, например, в [9].

Рассматривается следующая задача Коши

$$u_{tt} - \lambda^2(t)\, u_{xx} - \left(\lambda'(t) + \frac{2\lambda(t)}{t}\right) u_x = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=-1}=\varphi_0(x),\ u_t|_{t=-1}=\varphi_1(x), \tag{2}$$

где $t\in J=(-1,1)$, $x\in R^1$. Относительно $\lambda(t)$ предположим, что $\lambda(0)=0$, $\lambda'(t)>0$ и $\lambda(t)\neq 0$ при $t\neq 0$. Кроме того предположим, что $\int\limits_0^t \frac{\lambda(\tau)}{\tau}\,d\tau$ сходится. Отметим, что это очень слабое ограничение, поскольку, например, при его нарушении $\lambda(t)$ уже не может быть из C^∞.

Модельное уравнение (1) было впервые рассмотрено в [6] и обнаружено, что по отношению к некоторым классическим задачам оно проявляет аномальные свойства. Однако задача Коши для него корректна (см. [6], [7]).

1°. В этом пункте мы сформулируем и докажем теорему о ветвлении особенностей для случая общего степенного вырождения.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda(t)=t^k\lambda_0(t)$, *где* $\lambda_0(t)\neq 0$, $\lambda_0\in C^\infty$, $k\in\mathbf{N}$, *и пусть* $WF(\varphi_0)\cup WF(\varphi_1)=\{(x_0,\xi^0)\}$, *тогда волновой фронт решения* (1)—(2) *распространяется вдоль следующих нулевых бихарактеристик*:

$$\Gamma_i(x,\xi)=\{(x_0+(-1)^i(\Lambda(t)-\Lambda(-1)),\ t,\ \xi,\ (-1)^{i-1}\lambda(t)\xi),\ t<0\},$$

$$\gamma_i(x,\xi)=\{(x+(-1)^i\Lambda(t),\ t,\ \xi,\ (-1)^{i-1}\lambda(t)\xi),\ t\geqslant 0\}$$

$$i=1,2,\ \Lambda(t)=\int\limits_0^t\lambda(s)\,ds,$$

а именно:

$$WF(u(t))=\Gamma_1(x_0,\xi^0)\cup\Gamma_2(x_0,\xi^0)\cup$$
$$\cup\gamma_1(x_0-\Lambda(-1),\xi^0)\cup\gamma_2(x_0-\Lambda(-1),\xi^0)\cup\gamma_1(x^0+\Lambda(-1),\xi^0).$$

Для доказательства рассмотрим сначала вспомогательную задачу

$$v_{tt}-\lambda^2(t)v_{xx}-\left(\lambda'(t)+\frac{2\lambda(t)}{t}\right)v_x=0, \tag{3}$$

$$v|_{t=0}=\varphi(x),\ v_t|_{t=0}=\psi(x). \tag{4}$$

Заметим, что уравнение (3) факторизуется, а именно

$$t\,[v_{tt}-\lambda^2(t)v_{xx}-(\lambda'(t)+2t^{-1}\lambda(t))v_x]=$$
$$=\partial_+(t\partial_-v-v),\ \partial_\pm=(\partial_t\pm\lambda(t)\partial_x). \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть* $\hat{v}(t,\xi)$ — *частичное преобразование Фурье решения* (3)—(4), *тогда*

$$\hat{v}(t,\xi)=e^{-i\Lambda(t)\xi}\hat{\varphi}(\xi)+e^{i\Lambda(t)\xi}[t\hat{\psi}(\xi)+A(t,\xi)\hat{\varphi}(\xi)], \tag{6}$$

где

$$A(t,\xi)=2i\xi t\int\limits_0^t e^{-2i\Lambda(\tau)\xi}\frac{\lambda(\tau)}{\tau}\,d\tau. \tag{7}$$

Поскольку один из операторов первого порядка в (5) имеет особенность в точке $t=0$, то решение задачи (3)—(4) требует предва-

рительной регуляризации. Например, можно показать, что ее решение есть предел решений $v_\varepsilon(t, x)$ семейства задач Коши

$$\partial_+ (t\partial_- v_\varepsilon - v_\varepsilon) = 0, \tag{8}$$

$$v_\varepsilon \Big|_{t=\varepsilon} = \varphi(x), \ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}\Big|_{t=\varepsilon} = \psi(x) \tag{9}$$

при $\varepsilon \to 0$. Что же касается решения (8)—(9), то для его получения мы применяем частичное преобразование Фурье и последовательно решаем возникающие при этом обыкновенные дифференциальные уравнения. Наконец, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ убеждаемся в справедливости леммы.

Покажем далее, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Параметрикс задачи Коши* (3)—(4) *может быть записан в виде*

$$\begin{aligned} v(t, x) = &\iint e^{i(x-y-\Lambda(t))\xi} a_1(t, \xi)\varphi(y)\,dy d\xi + \\ &+ \iint e^{i(x-y+\Lambda(t))\xi} a_2(t, \xi)\varphi(y)\,dy d\xi + \\ &+ t\iint e^{i(x-y+\Lambda(t))\xi}\psi(y)\,dy d\xi \ [\mathrm{mod}\ C^\infty], \end{aligned} \tag{10}$$

где a_1, a_2 по ξ являются эллиптическими символами нулевого порядка.

Отметим, что, как нетрудно убедиться, $A(t, \xi)$ не является символом из класса $S^m_{\rho,\delta}$ (см. [9]), поэтому для доказательства этой леммы нам нужно выяснить его асимптотическое поведение при больших $|\xi|$. Поскольку у $\Lambda(t)$ есть только одна стационарная точка конечного порядка $k - t = 0$, то, в силу известных результатов, при достаточно большом $|\xi|$

$$A(t, \xi) \sim e^{-2i\Lambda(t)\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t)\xi^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(t)\xi^{-n}, \tag{11}$$

где α_n, β_n вычисляются по определенным формулам (см. [10]).

Далее, применяя обратное преобразование Фурье и принимая во внимание лемму 1 и соотношение (11), нетрудно убедиться в справедливости леммы 2.

Используя теперь лемму 2 и то, что параметрикс (10) при каждом фиксированном $t > 0$ представляет собой сумму классических эллиптических псевдодифференциальных операторов и следовательно, сохраняет волновой фронт, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *на* $\lambda(t)$ *и пусть* $WF(\varphi) \cup WF(\psi) = \{(x_0, \xi^0)\}$, *тогда возможны следующие два случая*: а) *если* $(x_0, \xi^0) \bar{\in} WF(\varphi)$, *то волновой фронт решения* (3)—(4) *распространяется только вдоль одной нулевой бихарактеристики, исходящей из точки* $(x_0, 0, \xi^0, 0)$

$$WF(v(t)) = \gamma_1(x_0, \xi^0);$$

б) *в остальных случаях распространение волнового фронта происходит вдоль обеих нулевых бихарактеристик, т. е.*

$$WF(v(t)) = \gamma_1(x_0, \xi^0) \cup \gamma_2(x_0, \xi^0).$$

Аналогично доказательству леммы 1 нетрудно доказать, что частичное преобразование Фурье решения задачи Коши (1)—(2) в области $t<0$ задается формулой:

$$\hat{u}(t, \xi) = te^{i\Lambda(t)\xi}\{[\hat{\varphi}_0(\xi) + \hat{\varphi}_1(\xi) - i\xi\lambda(-1)\hat{\varphi}_0(\xi)]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{t}e^{-2i\Lambda(t)\xi+i\Lambda(-1)\xi} + 2i\xi e^{i\Lambda(-1)\xi}\int_{-1}^{0}\frac{\lambda(\tau)}{\tau}e^{-2i\Lambda(\tau)\xi}d\tau\right] +$$

$$+ e^{-i\Lambda(-1)\xi}\hat{\varphi}_1(\xi) - i\xi\lambda(-1)e^{-i\Lambda(-1)\xi}\hat{\varphi}_0(\xi)\}. \qquad (12)$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *тогда*

$$WF(u(0, x)) = \{(x_0 - \Lambda(-1), \xi^0)\}.$$

Действительно, устремляя в (12) t к нулю, получаем

$$\hat{u}(0, \xi) = e^{i\Lambda(-1)\xi}[\hat{\varphi}_1(\xi) + \hat{\varphi}_0(\xi) - i\xi\lambda(-1)\hat{\varphi}_0(\xi)]. \qquad (13)$$

Затем, осуществляя в (13) обратное преобразование Фурье, приходим к следующей формуле:

$$u(0, x) = \iint e^{i(x-y+\Lambda(-1))\xi}[\varphi_0(y) + \varphi_1(y) - \lambda(-1)\varphi_0'(y)]\,dy\,d\xi, \qquad (14)$$

откуда и следует утверждение леммы 3.

Возвращаясь к доказательству теоремы 1 заметим, что в области строгой гиперболичности ($t<0$) распространение волнового фронта из точки (x_0, ξ^0) с $t=-1$ происходит вдоль обеих нулевых бихарактеристик $\Gamma_1(x_0, \xi^0)$, $\Gamma_2(x_0, \xi^0)$, поэтому, принимая во внимание лемму 3 и теорему 2 легко убеждаемся в справедливости теоремы 1.

2°. В этом пункте мы покажем, что некоторая модификация описанной выше схемы позволяет исследовать также случай экспоненциального характера вырождения уравнения (1), а именно, имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть* $\Lambda(t) = e^{-\frac{1}{|t|^\alpha}}$, $\frac{1}{\alpha} = m \in \mathbf{N}$ и $WF(\varphi_0) \cup WF(\varphi_1) = \{(x_0, \xi^0)\}$. *Тогда для решения задачи Коши* (1)—(2) *имеем*

$$WF(u(t)) = \tilde{\Gamma}_-(x_0, \xi^0) \cup \bar{\Gamma}_+(x_0, \xi^0) \cup \bar{\gamma}_-\left(x_0 - \frac{1}{e}, \xi^0\right) \cup$$

$$\cup\ \bar{\gamma}_+\left(x_0 - \frac{1}{e}, \xi^0\right) \cup \bar{\gamma}_-\left(x_0 + \frac{1}{e}, \xi^0\right),$$

где

$$\bar{\Gamma}_\pm(x, \xi) = \{(x \pm \left(e^{-\frac{1}{|t|^\alpha}} - \frac{1}{e}\right), t, \xi, \mp\alpha|t|^{-\alpha-1}e^{-|t|^{-\alpha}}\xi), t \leqslant 0\},$$

$$\tilde{\gamma}_{\pm}(x, \xi) = \{(x \pm e^{-|t|^{-\alpha}}, t, \xi, \mp \alpha |t|^{-\alpha-1} e^{-|t|^{-\alpha}} \xi), t > 0\}.$$

Заметим, что в случае, когда $\Lambda(t)$ имеет нуль бесконечного порядка для интегралов типа (7), ситуация значительно осложняется, поскольку обычный метод стационарной фазы не применим, поэтому мы докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $\Lambda(t) = e^{-t^{-\alpha}}$, $\alpha^{-1} = m \in \mathbf{N}$, *тогда при каждом* $t > 0$ *для* $A(t, \xi)$, *задаваемой формулой* (7) *при* $|\xi| \to \infty$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$A(t, \xi) \sim e^{-2i\Lambda(t)\xi} \{Q_m^0(t, \ln \xi) + Q_{m-1}^1(t, \ln \xi) \xi^{-1} + \\ + \cdots Q_{m-1}^s(t, \ln \xi) \xi^{-s} + \cdots\} + R_m(t, \ln \xi), \tag{15}$$

где $Q_m^0(t, u)$, $R_m(t, u)$ — *полиномы по* u *степени не выше* m, Q_{m-1}^i $(i = 1, 2, \cdots)$ — *полиномы степени не выше* $m-1$ *и которые могут быть явно вычислены.*

Действительно, для доказательства сделаем в интеграле (7) замену переменной $s = e^{-\tau^{-\alpha}} \xi$, тогда нетрудно видеть, что

$$A(t, \xi) = 2it \int_0^{\Lambda(t)\xi} e^{-2is} \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k \left(\frac{\ln s}{\ln \xi}\right)^k ds. \tag{16}$$

Далее, мы ограничимся лишь случаем, когда $\alpha = 1$, поскольку в общем случае доказательство принципиально не отличается, но становится более громоздким. Теперь, разбивая интервал интегрирования в (16) от 0 до t_0 и от t_0 до $\Lambda(t)\xi$ и интегрируя по частям получим

$$A(t, \xi) = \int_0^{t_0} e^{-2is} \ln ds - t \ln \xi\, e^{-2i\Lambda(t)\xi} + t \ln \xi - \\ - t (e^{-2is} \ln s)\Big|_{t_0}^{\Lambda(t)\xi} + t \int_{t_0}^{\Lambda(t)\xi} e^{-2is} \frac{ds}{s}. \tag{17}$$

Из (17) нетрудно увидеть, что последовательное интегрирование по частям приведет нас к следующему соотношению:

$$\int_0^{\Lambda(t)\xi} e^{-2is} \ln s ds = \int_0^{t_0} e^{-2is} \ln s ds + \left[\frac{1}{2i} \ln t_0 + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{2i}\right)^2 \frac{1}{t_0} + \cdots + \left(\frac{-1}{2i}\right)^{p+1} \frac{1}{t_0^p} + \cdots\right] e^{-2it_0} + \\ + e^{-2i\Lambda(t)\xi} \left[-\frac{1}{2i} \ln \xi + \frac{1}{2i} t^{-1} - \sum_{p=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2i}\right)^{p+1} \frac{\xi^{-p}}{(\Lambda(t))^p}\right]. \tag{18}$$

Поскольку при любом фиксированном $t > 0$, $|\xi|$ можно выбрать как угодно большим, то $\Lambda(t)\xi > 1$, поэтому мы можем выбрать $t_0 = 1$ и

ряд $\sum_{p=1}^{\infty}(2it_0)^{-p}$ будет сходиться. Далее из (18) и (16) нетрудно убедиться в справедливости леммы 4, и в случае $e^{-t^{-1}}$ асимптотика (15) принимает следующий простой вид

$$A(t,\xi)\sim\left[-1+t\sum_{p=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2i}\right)^{p}(\Lambda(t))^{-p}\xi^{-p}\right]e^{-2i\Lambda(t)\xi}+$$
$$+t\ln\xi-(c_1+e^{-2i}c_2)\,t,$$

где

$$c_1=2i\int_0^1 e^{-2is}\ln s\,ds,\quad c_2=\sum_{p=1}^{\infty}(-2i)^{-p}.$$

Теорема 4. *Пусть* $\Lambda(t)=\exp(-t^{-\alpha})$, $t\geqslant 0$ и $WF(\varphi)\cup WF(\psi)=\{(x_0,\xi^0)\}$, *тогда для волнового фронта решения* (3)—(4) *возможны только два случая: если* $(x_0,\xi^0)\notin WF(\varphi)$, *то*

$$WF(v(t))=\tilde{\gamma}_-(x_0,\xi^0),$$

во всех остальных случаях

$$WF(v(t))=\tilde{\gamma}_\pm(x_0,\xi^0).$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, аналогичное лемме 2.

Лемма 5. *Пусть* $\Lambda(t)=\exp(-t^{-\alpha})$, *тогда параметрикс задачи* (3)—(4) *может быть записан в виде*

$$v(t,x)=\iint e^{i(x-y-\Lambda(t))\xi}\,\tilde{a}_1(t,\xi)\,\varphi(y)\,dy\,d\xi+$$
$$+\iint e^{(x-y+\Lambda(t))\xi}\,\tilde{a}_2(t,\xi)\,\varphi(y)\,dy\,d\xi+ \tag{19}$$
$$+t\iint e^{i(x-y+\Lambda(t))\xi}\,\psi(y)\,dy\,d\xi\ [\mathrm{mod}\ C^\infty],$$

где

$$\tilde{a}_1(t,\xi)=\left[1+Q_m^0(t,\ln\xi)+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Q_{m-1}^p(t,\ln\xi)}{\xi^p}\right],\quad \tilde{a}_2=R_m(t,\ln\xi).$$

Справедливость леммы 5 может быть установлена с помощью лемм 1 и 4 аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 2.

Заметим, что существенное отличие лемм 2 и 5 заключается в том, что, в то время как в (10) символы были классическими и эллиптическими, то в (19) они не классические и у них нет главного символа в обычном понимании. Это связано с наличием экспоненциального вырождения (см. [8]). Поэтому теорема 4 не может быть сразу получена из леммы 5 аналогично теореме 2, поскольку нельзя применить непосредственно свойства эллиптических псевдодифференциальных операторов. Однако, применяя конструкцию параметрикса для эллипти-

ческих операторов можно показать, что псевдодифференциальные операторы с такими символами с точки зрения волновых фронтов ведут себя как эллиптические. После этого, учитывая (19), уже нетрудно проверить справедливость теоремы 4.

Отметим, что утверждение леммы 3 сохраняется и для случая $\Lambda(t) = e^{-\frac{1}{|t|^2}}$, поскольку формула (12) справедлива для любого $\Lambda(t)$. Поэтому теорема 3 может быть установлена с помощью леммы 3 и теоремы 4 аналогично тому, как доказывалась теорема 1.

Ереванский государственный
университет

Поступила 24.XII.1984

Գ. Ռ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ. Ալիքային ճակատների տարածումը թույլ հիպերբոլական հավասարումների մի դասի համար *(ամփոփում)*

Աշխատանքում հետազոտվում է թույլ հիպերբոլական հավասարումների մի մոդելային դասի լուծումների եզակիությունների հյուղավորումները նաև այն դեպքում երբ բնութագրիչների շոշափումն ունի բավականաչափ ընդհանուր բնույթ (թե աստիճանային և թե էքսպոնենցիալ)։

G. R. ALEXANDRIAN. *Propagation of the wave front for a class of weakly hyperbolic equations* (summary)

The paper investigates the branching of singularities for a class of weakly hyperbolic equations, where the degeneration has rather general character.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Hormander*. Linear differential operators, Pros. International Congress Math (Nice). vol. 1, Gauthier—Villare, Paris, 1972, 121—133.
2. *L. Nirenberg*. Lections on linear partial differential equations, Regional Conf. Series in Math., Amer. Math. Soc., № 17, 1973, 1—29.
3. *В. Я. Иврий*. Волновые фронты решений некоторых микролокально гиперболических уравнений, ДАН СССР, № 6, 1976, 1009—1011.
4. *S. Alinhac*. Branching of singularities for a class of hyperbolic operators, Indiana Univ. Math. J., 1979, 87—97.
5. *K. Tanigucht, Y. Tozakt*. A hyperbolic equation with double characteristics wich has a solution with branching singularities, Math. Japonica, 25, № 3, 1980, 273—300.
6. *Л. Ш. Агабабян, А. Б. Нерсесян*. О некоторых задачах для одного модельного слабо гиперболического уравнения, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 16, № 5, 1981, 397—407.
7. *Г. Р. Александрян, К. А. Ягджян*. Условия корректности задачи Коши и распространение особенностей решений уравнений с кратными характеристиками. Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 18, № 2, 1983, 134—149.
8. *Г. Р. Александрян*. Параметрикс и распространение волнового фронта решения задачи Коши для одного модельного уравнения, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 19, № 3, 1984, 219—233.
9. *М. А. Шубин*. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, «Наука», 1978.
10. *А. Эрдейи*. Асимптотические разложения, ГИФМЛ, 1962.