ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XX, № 1, 1985 Математика

УДК 517.984.5

И. Г. ХАЧАТРЯН

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ СЛЕДОВ

В настоящей работе выводится соотношение между данными рассеяния для обыкновенного дифференциального оператора L порядка $2n>2$ на полуоси (см. [1]—[3]). Это соотношение является обобщением известной в случае $n=1$ формулы Левинсона [4] (см. также [5], [6]) и представляет собой формулу для индекса некоторого оператора V, построенного при помощи данных рассеяния. Оно позволяет усовершенствовать указанные автором в [7] необходимые и достаточные условия, налагаемые на данные рассеяния, при которых разрешима обратная задача. Аналогичные соотношения будут приведены здесь также для оператора Штурма—Лиувилля с матричным потенциалом и для оператора Дирака.

В случае оператора Штурма—Лиувилля со скалярным потенциалом известное соотношение между данными рассеяния имеет вид (см. [6], стр. 195, 221)

$$\frac{1}{2\pi i}[\ln S(+\infty)-\ln S(+0)]+\frac{1}{4}[S(\infty)-S(0)]=-r,$$

где $S(\lambda)$— функция рассеяния, а r — число собственных значений. Аналогичное соотношение, как показали З. С. Агранович и В. А. Марченко [8], имеет место и в случае оператора Штурма—Лиувилля с матричным потенциалом. В связи с этим отметим, что в случае операторов Штурма—Лиувилля полученные здесь соотношения по форме отличаются от известных и, конечно, эквивалентны им.

1. Пусть L — самосопряженный дифференциальный оператор, порожденный в пространстве $L^2(0,\infty)$ заданной по формуле

$$l[y(x)]\equiv(-1)^n y^{(2n)}(x)+\sum_{k=0}^{2n-2} q_k(x)\,y^{(k)}(x),\qquad 0<x<\infty, \tag{1}$$

самосопряженной по Лагранжу дифференциальной операцией l порядка $2n>2$ (см. [2], [9], [10]), где коэффициенты $q_k(x)$ при $k\geqslant 1$ имеют абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке $[a,b]\subset(0,\infty)$ производные до $(k-1)$-го порядка включительно и удовлетворяют условиям

$$\int_0^\infty x^{2n-1-k}|q_k(x)|\,dx+\int_0^\infty x^{2n-1}|q_k^{(k)}(x)|\,dx<\infty, \tag{2}$$

$$k=0,1,\cdots,2n-2.$$

Область определения оператора L описывается при помощи n краевых условий в точке $x=0$ (их вид не является существенным). Непрерывный спектр оператора L прост и совпадает с полуосью $[0, \infty)$ (здесь под кратностью непрерывного спектра оператора L подразумевается кратность спектра части оператора L, действующей в ортогональном дополнении линейной оболочки всех собственных функций оператора L). Точечный спектр оператора L не имеет отличной от нуля конечной точки сгущения и не содержит точку нуль, причем кратность положительных собственных значений не превосходит $n-1$ (число положительных собственных значений кратности $n-1$ конечно), а кратность отрицательных собственных значений (их число конечно) не превосходит n (точечный спектр более подробно исследован автором в [11]).

Обозначим через T^+ (T^-) множество всех чисел $\lambda>0$ ($\arg\lambda = -\pi/2n$) таких, что числа λ^{2n} являются собственными значениями оператора L. Положим $T=T^+\cup T^-$.

При каждом $\lambda>0$ ($\lambda\in T^+$) дифференциальное уравнение

$$l[y(x)]=\lambda^{2n}y(x),\quad 0<x<\infty, \tag{3}$$

имеет с точностью до постоянного множителя одно ограниченное решение $u(x, \lambda)$, удовлетворяющее в точке $x=0$ краевым условиям, соответствующим оператору L. При этом справедлива асимптотическая формула

$$u(x, \lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[S_0(\lambda)e^{ix\lambda}+S_n(\lambda)e^{-ix\lambda}+o(1)],\quad x\to\infty. \tag{4}$$

Решение $u(x, \lambda)$ нормируем условием

$$S_n(\lambda)=1. \tag{5}$$

Тогда (см. [2])

$$|S_0(\lambda)|=1. \tag{6}$$

При указанной нормировке решение $u(x, \lambda)$ по непрерывности определяется также для значений $\lambda\in T^+$. При этом существуют непрерывные производные $\frac{\partial}{\partial\lambda}u(x, \lambda)$ $(x\geqslant 0,\ \lambda>0)$ и $S_0'(\lambda)$ $(\lambda>0)$. Решение $u(x, \lambda)$ является нормированной обобщенной собственной функцией оператора L, соответствующей непрерывному спектру, т. е. по формуле

$$(U\varphi)(x)=\int_0^\infty u(x, \lambda)\varphi(\lambda)\,d\lambda,\quad 0<x<\infty, \tag{7}$$

где $\varphi\in L^2(0, \infty)$, а интеграл сходится по метрике $L^2(0, \infty)$, определяется в $L^2(0, \infty)$ ограниченный оператор U, для которого выполняются равенства

$$U^*U=I,\quad UU^*=I-P, \tag{8}$$

где I—единичный оператор, P—ортопроектор на замыкании линейной оболочки всех собственных функций оператора L, а U^*—сопряженный к U оператор.

Пусть P_λ ($\lambda \in T$)—ортопроектор на собственное подпространство оператора L, соответствующее собственному значению λ^{2n}. Очевидно, что P_λ является интегральным оператором. Его ядро обозначим через $P(x, t; \lambda)$ $(0<x, t<\infty)$.

Для оператора L данные рассеяния вводятся при предположении, что при каждом λ ($\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$) уравнение (3) имеет решение $y(x, \lambda)$, которое обладает асимптотикой

$$y(x, \lambda) = e^{i\lambda x}[1+o(1)], \quad x \to \infty,$$

и при каждом $x>0$ как функция от λ голоморфно в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$ и непрерывно вплоть до вещественной оси.

При указанном предположении нормированная обобщенная собственная функция $u(x, \lambda)$ и ядро $P(x, t; \lambda)$ представляются в виде

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n} S_k(\lambda)\, y(x, \lambda\omega_k), \quad \lambda>0, \tag{9}$$

$$P(x, t; \lambda) = \sum_{k, j=1}^{n} N_{kj}(\lambda)\, y(x, \lambda\omega_k)\, \bar{y}(t, \lambda\omega_j), \quad \lambda \in T, \tag{10}$$

причем

$$N_{kn}(\lambda) = N_{nk}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in T^+, \quad k=1, 2, \cdots, n, \tag{11}$$

где

$$\omega_k = \exp\left(i\frac{\pi k}{n}\right), \quad k=0, 1, \cdots, 2n-1. \tag{12}$$

Введем эрмитовы неотрицательно определенные матрицы

$$S(\lambda) = \frac{1}{2\pi}(S_k(\lambda)\, S_j(\lambda))_{k, j=0}^{n}, \quad \lambda > 0, \tag{13}$$

$$N(\lambda) = (N_{kj}(\lambda))_{k, j=1}^{n}, \quad \lambda \in T. \tag{14}$$

Отметим, что ранг r_λ матрицы $N(\lambda)$ совпадает с кратностью собственного значения λ^{2n}.

Рассмотрим набор данных

$$\{T, N(\lambda)\ (\lambda \in T), S(\lambda)\ (\lambda>0)\}, \tag{15}$$

которые условимся называть данными рассеяния оператора L.

Будем говорить, что для дифференциальной операции l существует оператор преобразования, если существует функция $K(x, t)$ $(0<x\leqslant t<\infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $K(x, t) = K_1(x+t) + K_2(x, t)$, где функция $K_1(x)$ имеет абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset (0, \infty)$ производные до $(2n-2)$-го порядка включительно, а $K_2(x, t)$ имеет непрерывные в области $0<x\leqslant t<\infty$ частные производные до $(2n-1)$-го порядка включительно, и, кроме того, выполняются оценки

$$\left|\frac{\partial^k K(x, t)}{\partial x^\nu\, \partial t^{k-\nu}}\right| < \frac{1}{x^k}\psi_k(x+t), \quad 0\leqslant\nu\leqslant k\leqslant 2n-1, \tag{16}$$

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \left\{\left|\frac{\partial}{\partial x}K(x, t)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t}K(x, t)\right|\right\} dt\,dx < \infty, \tag{17}$$

где $\psi_k(x)$ $(0 \leqslant k \leqslant 2n-2)$ — невозрастающие и вместе с $\psi_{2n-1}(x)$ суммируемые на полуоси $(0, \infty)$ функции;

б) при каждом λ $(\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0)$ определенная по формуле

$$y(x, \lambda) = e^{ix\lambda} + \int_x^\infty e^{it\lambda} K(x, t)\, dt, \quad 0 < x < \infty, \tag{18}$$

функция $y(x, \lambda)$ является решением уравнения (3).

При этом оператором преобразования называется $I + K$, где K — вольтерров интегральный оператор с указанным ядром $K(x, t)$ $(0 < x \leqslant t < \infty)$ (ниже K рассматривается как оператор в $L^2(0, \infty)$).

Заметим, что для дифференциальной операции l оператор преобразования существует, например, если коэффициенты $q_k(x)$ аналитически продолжаются с полуоси $(0, \infty)$ в сектор

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \tag{19}$$

и удовлетворяют оценкам

$$\int_0^\infty x^{2n-2-k} |q_k(x+z)|\, dx < h(\operatorname{Re} z), \quad k = 0, 1, \cdots, 2n-2, \tag{20}$$

где $h(x)$ — невозрастающая суммируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция (см. [12], а также пример в [13]).

Отметим, что при существовании оператора преобразования множество T^+ ограничено и

$$\sum_{\lambda \in T^+} \sqrt{\lambda^n} < \infty. \tag{21}$$

Заметим еще, что при условиях (20) функции $S_k(\lambda)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ стремятся к конечным пределам при $\lambda \to \infty$.

Выведем соотношение между данными рассеяния (15) оператора L в предположении, что для дифференциальной операции l существует оператор преобразования. С этой целью введем следующие обозначения:

$$v(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n} S_k(\lambda)\, e^{ix\lambda\omega_k}, \quad \lambda > 0, \tag{22}$$

$$F_S(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[\int_0^\infty \int_0^x \int_0^t v(\xi, \lambda)\, \overline{v}(\eta, \lambda)\, d\eta\, d\xi\, d\lambda - \min\{x, t\} \right],$$

$$F_N(x, t) = \sum_{\lambda \in \Gamma} \sum_{k, j=1}^{n} N_{kj}(\lambda)\, e^{ix\lambda\omega_k}\, e^{\overline{it\lambda\omega_j}}, \tag{23}$$

$$F(x, t) = F_S(x, t) + F_N(x, t), \quad 0 < x, t < \infty. \tag{24}$$

Здесь $F(x, t)$ — аналог ядра Гельфанда—Левитана—Марченко (см. [6], [14]).

Теорема 1. *Пусть для дифференциальной операции l выполняются условия* (2) *и существует оператор преобразования. Тогда данные рассеяния* (15) *оператора L удовлетворяют соотношению*

$$\int_0^\infty F(x, x)\,dx + \sum_{\lambda\in T}\left[r_\lambda + \sum_{k,j=1}^{n_\lambda}\frac{N_{kj}(\lambda)}{i\lambda\omega_k + i\lambda\overline{\omega}_j}\right] +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\frac{S_0'(\lambda)}{S_0(\lambda)} + \sum_{\substack{k,j=0\\0<k+j<2n}}^{n}\frac{S_k(\lambda)\,\overline{S}_j(\lambda)}{\lambda(\omega_k-\overline{\omega}_j)}\right]d\lambda = 0, \tag{25}$$

где r_λ — ранг матрицы $N(\lambda)$, $n_\lambda = n$ при $\lambda\in T^-$, $n_\lambda = n-1$ при $\lambda\in T^+$, а интегралы и ряд сходятся абсолютно. В частности, если сумма r всех чисел r_λ конечна, то

$$\int_0^\infty F_S(x, x)\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\frac{S_0'(\lambda)}{S_0(\lambda)} + \sum_{\substack{k,j=0\\0<k+j<2n}}^{n}\frac{S_k(\lambda)\,\overline{S}_j(\lambda)}{\lambda(\omega_k-\overline{\omega}_j)}\right]d\lambda = -r. \tag{26}$$

Доказательство наметим ради простоты для случая, когда множество T конечно. Действующий в $L^2(0, \infty)$ ограниченный оператор V определим по формуле

$$(V\varphi)(x) = \int_0^\infty v(x, \lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda, \quad 0 < x < \infty,$$

где $\varphi\in L^2(0, \infty)$, а интеграл сходится по метрике $L^2(0, \infty)$. Используя оператор преобразования $I+K$, в силу (9), (18) и (22) для определенного по формуле (7) оператора U получим равенство

$$U = (I+K)V. \tag{27}$$

Из равенств (8) и (27) следует, что оператор V обратим вместе с U, а оператор V^* имеет r-мерное нулевое подпространство.

Ядро $F_S(x, t)$ определяет в $L^2(0, \infty)$ ограниченный интегральный оператор F_S и, как нетрудно убедиться

$$I + F_S = VV^*. \tag{28}$$

Рассмотрим также оператор

$$I + A = V^*V. \tag{29}$$

Можно показать, что A есть интегральный оператор с ядром

$$A(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k,j=0}^{n}\frac{\overline{S}_k(\lambda)\,S_j(\mu)}{\lambda\overline{\omega}_k - \mu\,\omega_j}, \quad 0<\lambda, \mu<\infty. \tag{30}$$

Используя равенства (8) и (27), из (28) и (29) получим

$$F_S + P + VV^*K^* + KVV^* + KVV^*K^* = 0, \tag{31}$$

$$A + V^*K^*V + V^*KV + V^*K^*KV = 0. \tag{32}$$

Поскольку K — оператор Гильберта—Шмидта, то операторы KVV^*K^* и V^*K^*KV являются ядерными и, очевидно, имеют одинаковый след. Используя оценки (16) и (17), можно доказать, что ядра интегральных операторов Гильберта — Шмидта $VV^*K^*+KVV^*$ и $V^*K^*V+V^*KV$ тоже имеют одинаковый конечный след. Поэтому соотношение (26) получается из (31) и (32) с учетом равенств (5), (6), (30), $r=\operatorname{sp}P$ и непрерывности рассматриваемых ядер.

В общем случае теорема доказывается аналогично; нужно лишь равенство (31) использовать в виде

$$F-F_N+P+VV^*K^*+KVV^*+KVV^*K^*=0,$$

где F_N и F — интегральные операторы с ядрами (23) и (24) соответственно, и учесть, что ортопроектор P является интегральным оператором, ядро $P(x, t)$ $(0<x, t<\infty)$ которого определяется при помощи ядер (10) по формуле

$$P(x, t)=\sum_{\lambda\in T}P(x, t; \lambda),$$

причем

$$\int_0^\infty P(x, x; \lambda)\,dx=r_\lambda,\ \lambda\in T.$$

2. Приведем характеристические свойства данных рассеяния (15) оператора L в предположении, что для дифференциальной операции l выполняются условия (2) и существует оператор преобразования.

1°. $T=T^-\cup T^+$, где T^- — конечное множество точек на открытом луче $\arg\lambda=-\pi/2n$ ($n>1$ — фиксированное натуральное число), а T^+ — ограниченное множество точек на полуоси $\lambda>0$, не имеющее отличных от нуля точек сгущения.

2°. При каждом $\lambda\in T$ $N(\lambda)$ есть отличная от нуля эрмитова неотрицательно определенная матрица (14), причем выполняются равенства (11).

3°. При каждом $\lambda>0$ $S(\lambda)$ есть матрица (13), где все функции $S_k(\lambda)$ непрерывны на полуоси $\lambda>0$, существует непрерывная производная $S_0'(\lambda)$ и выполняются равенства (5), (6).

4°. Функция

$$\tilde F(x, t)=\sum_{\lambda\in T}\sum_{k, j=1}^{n}\frac{N_{kj}(\lambda)}{|\lambda|^2\omega_k\bar\omega_j}[e^{ix\lambda\omega_k}-1][e^{\overline{it\lambda\omega_j}}-1]+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\sum_{\substack{k, j=0\\ 0<k+j<2n}}^{n}\frac{S_k(\lambda)\bar S_j(\lambda)}{\lambda^2\omega_k\bar\omega_j}[e^{ix\lambda\omega_k}-1][e^{\overline{it\lambda\omega_j}}-1]\,d\lambda,$$

$$0\leqslant x, t<\infty,$$

где числа ω_k определяются по формуле (12), непрерывна в замкнутой области $0\leqslant x, t<\infty$ и имеет непрерывные в открытой области $0<x, t<\infty$ первые частные производные и смешанную производную

$$F(x, t)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\tilde F(x, t),$$

причем выполняется оценка $|F(x, t)| \leqslant \varphi(x+t)$, где $\varphi(x)$ — невозрастающая суммируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция. Кроме того, функция

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{Re}[S_0(\lambda) e^{ix\lambda}] d\lambda, \quad 0 < x < \infty, \tag{33}$$

имеет абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset \subset (0, \infty)$ производные до $2n$-го порядка включительно (как следствие, сумма $F(x, t) + f''(x+t)$ имеет непрерывные в области $0 < x, t < \infty$ частные производные любого порядка).

5°. Имеет место равенство (25).

6°. При $0 < x \leqslant t < \infty$ выполняются оценки

$$\left| \frac{\partial^k F(x, t)}{\partial x^\nu \, \partial t^{k-\nu}} \right| \leqslant \frac{1}{x^\nu} \varphi_k(x+t), \quad 0 \leqslant \nu \leqslant k, \; 1 \leqslant k \leqslant 2n-1,$$

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) \right| \right\} dt dx < \infty,$$

где $\varphi_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant 2n-2)$ — невозрастающие и вместе с $\varphi_{2n-1}(x)$ суммируемые на полуоси $(0, \infty)$ функции.

7°. Оператор $I + F$ обратим в $L^2(0, \infty)$, где F — интегральный оператор с ядром $F(x, t)$ $(0 < x, t < \infty)$.

Теорема 2. *Чтобы данные* (15) *были данными рассеяния некоторого самосопряженного дифференциального оператора L, порожденного в $L^2(0, \infty)$ самосопряженной по Лагранжу дифференциальной операцией l вида* (1), *для которой выполняются условия* (2) *и существует оператор преобразования, необходимо и достаточно выполнение условий* 1°—7°.

В связи с условием 7° отметим, что при любом $n \geqslant 2$ можно построить пример данных (15), для которых все условия 1°—6° выполняются, но оператор $I + F$ не имеет обратного.

Замечание 1. В работах [2] и [15] автором сформулирована теорема о том, что при условиях типа (20) оператор L по своей спектральной матрице определяется однозначно. Этот результат можно усилить. А именно, указанное утверждение остается верным также при предположении, что для дифференциальной операции l выполняются условия (2) и существует оператор преобразования.

Укажем теперь характеристические свойства данных рассеяния (15) оператора L в предположении, что коэффициенты $q_k(x)$ аналитически продолжаются с полуоси $(0, \infty)$ в сектор (19) и удовлетворяют оценкам

$$\int_0^\infty x^{2n-2-k} |q_k(x+z)| \, dx + \int_0^\infty x^{2n-2} \, |q_k^{(k)}(x+z)| \, dx \leqslant h(\operatorname{Re} z), \tag{34}$$

$$k = 0, 1, \cdots, 2n-2,$$

где $h(x)$ — невозрастающая суммируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция.

При условиях (34) дополнительно выполняются следующие свойства.

6′. Функция $F_0(x, \xi) = F(x, x+\xi)$ $(x > 0, \xi \geqslant 0)$ и все ее частные производные

$$F_k(x, \xi) = \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} F_0(x, \xi), \ k = 0, 1, \cdots, 2n-1,$$

при каждом $\xi \geqslant 0$ по переменной x аналитически продолжаются с полуоси $(0, \infty)$ в сектор (19). Кроме того, при всех z из сектора (19) выполняются оценки

$$\int_0^\infty t^{2n-2} \left| \frac{\partial^{2n-1-k}}{\partial z^{2n-1-k}} F_k(z+t, \xi) \right| dt \leqslant \beta(x+\xi), \quad 0 \leqslant k \leqslant 2n-1,$$

$$\int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial z} F_0(z, \xi) \right| d\xi \leqslant \gamma(x) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq n}}^{2n-1} \tilde{\gamma}\left(\left| x - y \operatorname{tg} \frac{\pi s}{2n} \right| \right),$$

где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, а $\beta(x)$ и $\gamma(x)$—невозрастающие и вместе с $\tilde{\gamma}(x)$ суммируемые на полуоси $(0, \infty)$ функции.

7′. При каждом $z \in (0, \infty)$ из замыкания сектора (19) оператор $I + G_z$ обратим в $L^2(0, \infty)$, где G_z — интегральный оператор с ядром

$$G(z; x, t) = \begin{cases} F_0(z+x, t-x) & \text{при } 0 < x \leqslant t < \infty, \\ \overline{F_0}(\bar{z}+t, x-t) & \text{при } 0 < t \leqslant x < \infty. \end{cases} \tag{35}$$

Теорема 3. *Чтобы данные* (15) *были данными рассеяния некоторого самосопряженного дифференциального оператора L, порожденного в $L^2(0, \infty)$ самосопряженной по Лагранжу дифференциальной операцией l вида* (1) *с голоморфными в секторе* (19) *и удовлетворяющими оценкам* (34) *коэффициентами $q_k(x)$, необходимо и достаточно выполнение условий* 1°—5° *и* 6′, 7′.

Сделаем несколько замечаний относительно условия 7′. Из условий 1°—4° и 6′ следует, что оператор G_z вполне непрерывен и является голоморфной сператор-функцией от z в секторе (19); кроме того, $\|G_z\| \to 0$ при $|z| \to \infty$ и $I + G_z > 0$ при $z \geqslant 0$. Непосредственно из формулы (35) следует, что при каждом $a > 0$ имеет место равенство

$$G_{z+a} = B_a^* G_z B_a,$$

где операторы B_a и B_a^* определяются по формулам

$$B_a g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < a, \\ g(x-a) & \text{при } x > a, \end{cases}$$

$$B_a^* g(x) = g(x+a), \ x > 0,$$

причем $B_a^* B_a = I$. Используя эти свойства, легко доказывается (см. [16]), что оператор $I + G_z$ обратим для всех z вне некоторого ограниченного множества, не имеющего точек сгущения внутри сектора (19)

и не содержащего точек из полуоси $(0, \infty)$. Заметим, что в силу теоремы 2 лишь обратимость оператора $I+G_0$ $(G_0=F)$ вместе с условиями $1^\circ-5^\circ$ и $6'$ уже обеспечивает существование дифференциального оператора L, обладающего данными рассеяния (15). Однако коэффициенты $q_k(x)$ будут иметь особенности в точках z, для которых оператор $I+G_z$ не имеет обратного. Отметим, что для любой точки $z_0 \in (0, \infty)$ из замыкании сектора (19) можно построить пример данных (15), для которых все условия $1^\circ-5^\circ$ и $6'$ выполняются, оператор $I+G_0$ обратим, но оператор $I+G_{z_0}$ не имеет обратного.

Замечание 2. В случае $n=1$ (т. е. для оператора Штурма—Лиувилля с удовлетворяющим условию $xq(x) \in L^1(0, \infty)$ потенциалом $q(x)$) удается указать характеристические свойства данных рассеяния, несколько отличающиеся от тех свойств, которые указал В. А. Марченко [6]. Прежде всего заметим, что при $n=1$ данные рассеяния представляют собой набор величин $\{\lambda_k, m_k\ (k=1, 2, \cdots, r);\ S_0(\lambda)\ (\lambda>0)\}$, где λ_k и m_k $(k=1, 2, \cdots, r)$—положительные числа, причем $\lambda_k \neq \lambda_j$ при $k \neq j$ (в данном случае

$$T=\{-i\lambda_1, -i\lambda_2, \cdots, -i\lambda_r\} \text{ и } N(-i\lambda_k)=m_k^2 \quad (k=1, 2, \cdots, r)),$$

а $S_0(\lambda)$— функция, участвующая в асимптотической формуле (4) при нормировке (5) (в приведенной в начале статьи формуле функция $S(\lambda)$ есть $-S_0(\lambda)$). При $n=1$ в качестве характеристических свойств данных рассеяния можно принимать следующие: функция $S_0(\lambda)$ имеет не прерывную на полуоси $\lambda>0$ производную и $|S_0(\lambda)|=1$; функция (33 имеет абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset \subset (0, \infty)$ производные до второго порядка включительно, причем функция

$$F_{S_0}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \operatorname{Re}[S_0(\lambda)\, e^{ix\lambda}]\, d\lambda-\frac{1}{\pi}\frac{d^2}{dx^2}\int_1^\infty \frac{1}{\lambda^2}\operatorname{Re}[S_0(\lambda)\, e^{ix\lambda}]\, d\lambda$$

удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty x\,|F'_{S_0}(x)|\, dx<\infty;$$

имеет место равенство

$$\int_0^\infty F_{S_0}(2x)\, dx+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\frac{S_0'(\lambda)}{S_0(\lambda)}+\frac{S_0(\lambda)-\overline{S}_0(\lambda)}{2\lambda}\right]d\lambda=-r.$$

3. В случае краевой задачи Штурма—Лиувилля

$$-y''(x)+Q(x)\,y(x)=\lambda^2 y(x), \quad y(0)=0, \quad 0<x<\infty,$$

с эрмитовой $n \times n$-матрицей $Q(x)$, евклидова норма $|Q(x)|$ которой удовлетворяет условию $x\,|Q(x)| \in L^1(0, \infty)$, удается получить формулу

$$\int_0^\infty \operatorname{sp} F_S(2x)\,dx+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \operatorname{sp}\left[S'(\lambda)\,S^*(\lambda)+\frac{S(\lambda)-S^*(\lambda)}{2\lambda}\right]d\lambda=-r, \tag{36}$$

где $S(\lambda)$— унитарная $n\times n$-матрица рассеяния, $S'(\lambda)$—производная матрицы $S(\lambda)$, r—размерность линейной оболочки всех собственных вектор-функций рассматриваемой краевой задачи, а $n\times n$-матричное ядро $F_S(x+t)$ определяется по формуле

$$F_S(x+t)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[\int_0^\infty\int_0^x\int_0^t v(\xi,\lambda)\,v^*(\eta,\lambda)\,d\eta d\xi d\lambda-\min\{x,t\}\,E\right],$$

причем E — единичная $n\times n$-матрица и

$$v(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{ix\lambda}\,S(\lambda)+e^{-ix\lambda}\,E\right].$$

Отметим, что равенство (36) после упрощения приводится к известному виду (см. [6], стр. 223 и [8], стр. 262; в этих книгах в качестве матрицы рассеяния принимается—$S(\lambda)$). Однако по причинам общности и инвариантности записи относительно краевых условий мы предпочитаем форму (36).

4. В случае канонической краевой задачи Дирака (см. [17])

$$By'(x)+[\Omega(x)+mT]\,y(x)=\lambda y(x),\ 0<x<\infty,$$

где m — неотрицательное число, $y(x)$—вектор-функция с $2n$ компонентами,

$$B=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix}E_n & 0\\ 0 & -E_n\end{pmatrix},\ \Omega(x)=\begin{pmatrix}P(x) & Q(x)\,I_n\\ I_nQ(x) & -I_n\,P(x)\,I_n\end{pmatrix},$$

причем E_n — единичная $n\times n$-матрица, а $n\times n$-матрица I_n имеет вид

$$I_n=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\ \cdot&\cdot&\cdots&\cdot&\cdot\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

предполагается, что евклидовы нормы вещественных симметрических $n\times n$-матриц $P(x)$ и $Q(x)$ удовлетворяют оценкам

$$|P(x)|\leqslant C(1+x)^{-2-\varepsilon},\quad |Q(x)|\leqslant C(1+x)^{-1-\varepsilon}$$

с некоторыми положительными числами C и ε, кроме того, матрица $\Omega(x)$ абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке $[a,b]\subset\subset(0,\infty)$ и $x\,|\Omega'(x)|\in L^1(0,\infty)$. При указанных условиях можно доказать, что унитарная $n\times n$-матрица рассеяния $S(\lambda)$ имеет непрерывную производную $S'(\lambda)$ и справедлива формула (в работе [17] в качестве матрицы рассеяния принимается $-S^*(\lambda)$)

$$\int_0^\infty \operatorname{sp} F_S(2x)\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \operatorname{sp}\left[S'(\lambda)S^*(\lambda) + \frac{m}{2}\,\frac{S(\lambda)-S^*(\lambda)}{\lambda^2-m^2}\right]d\lambda = -r, \tag{37}$$

где $\Delta=(-\infty,-m)\cup(m,\infty)$, r — размерность линейной оболочки всех собственных вектор-функций рассматриваемой краевой задачи (краевые условия задаются в точке $x=0$ и являются самосопряженными), а $2n\times 2n$-матричное ядро $F_S(x+t)$ определяется по формуле

$$F_S(x+t)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[\int_\Delta\int_0^x\int_0^t v(\xi,\lambda)\,v^*(\eta,\lambda)\,d\eta\,d\xi\,d\lambda - \min\{x,t\}\,E_{2n}\right],$$

причем

$$v(x,\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\pi b(\lambda)}}\left\{\begin{pmatrix} b(\lambda)E_n\\ -iI_n\end{pmatrix}S(\lambda)\,e^{ixa(\lambda)}+\begin{pmatrix} b(\lambda)E_n\\ iI_n\end{pmatrix}e^{-ixa(\lambda)}\right\},$$

$$a(\lambda)=\lambda\sqrt{1-\frac{m^2}{\lambda^2}},\quad b(\lambda)=\sqrt{\frac{\lambda+m}{\lambda-m}}.$$

Отметим, что при рассматриваемых здесь ограничениях на $Q(x)$ тоже можно указать условия разрешимости обратной задачи рассеяния при этом в качестве одного из этих условий служит равенство (37).

В заключение автор благодарит В. Б. Лидского и Б. В. Федосова за обсуждение результатов и внимание к работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 29.VIII.1983

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Հետքերի մի բանաձևի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում բերվում է մի առնչություն ցրման տվյալների միջև կիսառանցքի վրա $2n\geqslant 2$ կարգի սովորական դիֆերենցիալ L օպերատորի համար։ Այդ առնչությունը հանդիսանում է $n=1$ դեպքում հայտնի Լևինսոնի բանաձևի ընդհանրացումը և իրենից ներկայացնում է բանաձև ցրման տվյալներով կառուցված որոշ V օպերատորի ինդեքսի համար։ Նման առնչություններ բերվում են նաև մատրիցային պոտենցիալով Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորի և Դիրակի օպերատորի համար։

I. G. KHACHATRIAN. *On a trace formula* (summary)

A relation for the scattering data for the ordinary differential operator L of order $2n>2$ on the half-axis is given This relation is a generalization of the well-known Levinson formula in the case $n=1$ and in fact it is a formula for index of some operator V constructed by means of scattering data. Similar relations for the Sturm—Liouville operator with matrix potential and for Dirac operator are also given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Г. Хачатрян.* Об одной обратной задаче, ДАН Арм.ССР, 70, № 3, 1980, 160—166.
2. *И. Г. Хачатрян.* О некоторых обратных задачах для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси. Функц. анализ и его прилож., 17, № 1, 1983, 40—52.
3. *И. Г. Хачатрян.* Об обратной задаче рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков, УМН, 38, № 2 (230), 1983, 229—230.

4. *N. Levinson*. On the uniqueness of the potential in a Schroedinger equation for a given asymptotic phase, Kgl. Danske Videnskab Selskab Mat.-Fys. Medd., 25, № 9, 1949.
5. *Л. Д. Фадеев*. Обратная задача квантовой теории рассеяния, УМН, 14, № 4 (88), 1959, 57—119.
6. *В. А. Марченко*. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения, Киев, «Наукова думка», 1977.
7. *И. Г. Хачатрян*. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси, ДАН Арм.ССР, 77, № 2, 1983, 55—58.
8. *З. С. Агранович, В. А. Марченко*. Обратная задача теории рассеяния, Харьков, 1960.
9. *М. А. Наймарк*. Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.
10. *И. Г. Хачатрян*. О некоторых формулах следов, ДАН Арм.ССР, 78, № 1, 1984, 23—27.
11. *И. Г. Хачатрян*. Изучение точечного спектра обыкновенного дифференциального оператора, ДАН Арм.ССР, 76, № 3, 1983, 103—105.
12. *И. Г. Хачатрян*. О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 14, № 6, 1979, 424—445.
13. *И. Г. Хачатрян*. Об одной обратной задаче для дифференциальных операторов высших порядков на всей оси, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 18, № 5, 1983, 394—402.
14. *И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан*. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР, серия матем., 15, № 4, 1951, 309—360.
15. *И. Г. Хачатрян*. О единственности восстановления дифференциального оператора с аналитическими коэффициентами по его спектральной матрице-функции, ДАН Арм.ССР, 71, № 2, 1980, 91—97.
16. *И. Г. Хачатрян*. О некоторых решениях уравнения нелинейной струны, ДАН Арм.ССР, 78, № 3, 1984, 108—112.
17. *М. Г. Гасымов*. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка 2п, Труды ММО, 19, 1968, 41—112.