ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 1, 1985 Математика

УДК 517.983

Р. Л. ШАХБАГЯН

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1°. В цилиндрической области, основанием которой является CL-многообразие M с краем*, рассмотрим следующую параболическую задачу:

$$\widehat{P}\left(x, \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right)u \equiv \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\widehat{A}(x, \xi)\right)^{k} u(x, t)=f(x, t), \tag{1}$$

$$x \in M,\ t \in R^1,$$

$$\widehat{N}_j\left(x', \xi, \frac{\partial}{\partial t}\right)u\Big|_{\partial M} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}+\widehat{B}(x', \xi)\right)^{n_j} u\Big|_{\partial M}=g_j(x', t), \tag{2}$$

$$x' \in \partial M,\ t \in R^1,\ j=1, 2, \cdots, m,$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t<0}=0,\ k=0, 1, \cdots, m-1,\ x \in M, \tag{3}$$

где $\widehat{A}$ — эллиптический оператор второго порядка, $\widehat{B}$ — оператор первого порядка, заданный на границе (подробнее условия на операторы $\widehat{P}$ и $\widehat{N}_j$ приводятся ниже).

В настоящей статье изучается разрешимость сформулированной задачи. Привлекая технику преобразования Лапласа она сводится к эллиптической задаче с параметром, исследованной автором в работе [1].

При этом решение задачи (1)—(3) получается как обратное преобразование Лапласа соответствующей эллиптической задачи.

Однородная начально-краевая задача для параболических уравнений второго порядка исследована в работе М. И. Вишика и А. В. Марченко [2].

Ю. Л. Далецким в работе [6] доказана однозначная разрешимость задачи Коши для параболического уравнения вида

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left[A^*(t, x) F''(t, x) A(t, x)\right]+\cdots=0$$

с начальными данными

$$u|_{t=0}=\Phi(x),$$

* Определение CL-многообразия см. в [1], [2].

где x — точка функционального пространства, $F(t, x)$ — искомый функционал, F'' — вторая производная F по x в смысле Фреше, A и A^* — сопряженные операторы, зависящие, вообще говоря, от t и x, ограниченные в соответствующих функциональных пространствах, а многоточием в уравнении обозначены младшие члены. Функционал $\Phi(x)$ принадлежит классу $C^{(2)}(H_\gamma)$, где H_t — представитель шкалы гильбертовых пространств.

Совершая формально преобразование Лапласа по t задача (1) — (3) трансформируется в следующую задачу:

$$\widehat{P}(x, \xi, \lambda)\,\widetilde{u}(x, \lambda) = \widetilde{f}(x, \lambda), \quad x \in M, \tag{4}$$

$$\widehat{N}_j(x', \xi, \lambda)\,\widetilde{u}(x, \lambda)\big|_{\partial M} = \widetilde{g}_j(x', \lambda), \quad x' \in \partial M, \quad j = 1, 2, \cdots, m \tag{5}$$

(здесь через $\widetilde{u}, \widetilde{f}, \widetilde{g}_j$ обозначено преобразование Лапласа по t, соответственно, функций u, f, g_j).

Под преобразованием Лапласа (см., например, [3]) функции $h(t)$, тождественно равной нулю при $t < 0$ и для которой $e^{-\gamma t} h \in L_1(R^1)$, будем понимать функцию

$$\widetilde{h}(\lambda) = \Lambda_{t \to \lambda}\, h(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(t)\, dt,$$

где $\lambda \in \mathbf{C}_\gamma = \{\lambda \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} \lambda \geqslant \gamma\}$.

Как известно, обратное преобразование Лапласа $\Lambda^{-1}_{\lambda \to t}$ задается формулой

$$h(t) = \Lambda^{-1}_{\lambda \to t}\, \widetilde{h}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} e^{\lambda t}\, \widetilde{h}(\lambda)\, d\lambda$$

для $\gamma_1 > \gamma$.

Задача (4)—(5), как уже отмечалось, подробно изучена в работе автора [1]. Опишем вкратце классы символов операторов $\widehat{P}(x, \xi, \lambda)$ и $\widehat{N}_j(x', \xi, \lambda)$ (полные определения даны в [1]).

Пусть H — вещественное гильбертово пространство l_2. Пространство H_1, по определению, гильбертово пространство последовательностей $\{x_l\}_{l=1}^\infty$ с конечной нормой $\|x\|_1 = \left(\sum_{l=1}^\infty x_l^2 \sigma_l^{-2}\right)^{1/2}$, где $\{\sigma_l\}_{l=1}^\infty$ — неубывающая последовательность чисел, $\sigma_l > 1$ и $\sum_{l=1}^\infty \sigma_l^{-2} < +\infty$.

Пусть, далее, U — окрестность в H_1. Предполагается, что символы операторов $\widehat{P}$ и $\widehat{N}_j$ локально представимы в виде

$$P(x, \xi, \lambda) = \sum_{k=0}^m (A(x, \xi) + \lambda)^k, \quad x \in U, \ \xi \in H,$$

где $A(x, \xi) = (A_1(x)\,\xi, \xi) + (c(x), \xi) + c_0(x)$,

$$(A_1(x)\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \quad (c(x), \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(x)\xi_i.$$

Коэффициенты $a_{ij}(x)$, $c_i(x)$, $c_0(x) \in CL^{\infty}(U)$, матрица $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{\infty}$ предполагается симметрической, $c(x) = (c_1(x), c_2(x), \cdots)$ принадлежит пространству H при любом $x \in U$, λ—комплексный параметр, принадлежащий $\mathbf{C}_\gamma$. На символ $A(x, \xi)$ налагается условие эллиптичности:

$$C^{-1}\|\xi\|^2 \leqslant (A_1(x)\xi, \xi) \leqslant c\|\xi\|^2, \ \forall x \in U, \ \xi \in H,$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, $\|\xi\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2\right)^{1/2}$.

Класс символов $P(x, \xi, \lambda)$, удовлетворяющих вышеприведенным условиям, обозначим через $E(U)$ (подробнее описание класса $E(U)$ см. в [1]).

Обозначим через U_α $(\alpha \in A)$ координатное покрытие CL-многообразия M, $\{\chi_\alpha\}$ — система локальных карт: $\chi_\alpha : U_\alpha \to H_1$, $\{\varphi_\alpha\}$ — набор функций, удовлетворяющих условию $\sum_\alpha \varphi_\alpha \equiv 1$.

По символу $P(x, \xi, \lambda) \in E(M)$ определим теперь оператор $\widehat{P}$. Пусть $s \geqslant 2m$, на функциях $u \in CL^s(M)$ оператор $\widehat{P}$ определяется следующим образом:

$$\widehat{P}u = \sum_\alpha \chi_\alpha^* \widehat{P}_\alpha (\chi_\alpha^{-1})^* \varphi_\alpha u, \tag{6}$$

где семейство функций $\{P_\alpha(x, \xi, \lambda)\}$, $\alpha \in A$, отображают $\chi_\alpha(U_\alpha) \times H \times \mathbf{C}_\gamma \to \mathbf{C}$ и подчинены некоторым условиям (см. определение 2 из [1])

Аналогично определяются операторы $\widehat{N}_j$ на границе ∂M многообразия M. На границе ∂U окрестности $U \subset H_1$ символы операторов $\widehat{N}$ задаются следующим образом:

$$N_j(x', \xi, \lambda) \equiv (B(x', \xi) + \lambda)^{n_j} = \left(\xi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(x')\xi_k + \lambda\right)^{n_j}, \tag{7}$$

$$j = 1, 2, \cdots, m, \ b = (b_2(x'), b_3(x'), \cdots) \in H, \ \forall x' \in \partial U.$$

Функции $b_k(x')$ бесконечно дифференцируемы на ∂U, а

$$\operatorname{ord} \widehat{N}_j = n_j < 2m.$$

Пусть, как и выше, U_α, $\alpha \in A$ — координатное покрытие CL-многообразия M. Обозначим через $\Gamma = A \setminus \{\alpha \in A, \ U_\alpha \cap \partial M = \varnothing\}$. По определению CL-многообразия, при $\alpha \in \Gamma$ $\partial M \cap U_\alpha = \varnothing$ и $\chi_\alpha(\partial M \cap U_\alpha) \subset \{x \in H_1^+, x_1 = 0\}$. Для любого $\alpha \in \Gamma$ обозначим через $U'_\alpha = \partial M \cap U_\alpha$.

Мы скажем, что на границе ∂M CL-многообразия M заданы символы $N_j \in E(\partial M)$, $j = 1, 2, \cdots, m$, если задано семейство функций $\{N_{j,\alpha}(x', \xi, \lambda)\}$, $\alpha \in \Gamma$, отображающих $\chi_\alpha(U'_\alpha) \times H \times \mathbf{C}_\gamma \to \mathbf{C}$, имеющих

представление (7), где $x' \in \chi_\alpha(U'_\alpha)$, а коэффициенты $b_\alpha = \{b_{2,\alpha}(x'), b_{3,\alpha}(x'), \cdots\} \in H$, $\forall x' \in \chi_\alpha(U'_\alpha)$ (см. определение 3 работы [1]).

Определим теперь граничные операторы (5). На функциях $u \in CL^s(M)$, при $s \geqslant n_j$ оператор $\widehat{N}_j$ определяется следующим образом:

$$\widehat{N}_j u = \sum_{\alpha \in \Gamma} \chi_\alpha^* \widehat{N}_{j,\alpha} (\chi_\alpha^{-1})^* \varphi_\alpha u. \tag{8}$$

2°. Введем функциональное пространство, в котором будем искать решение $\bar{u}$ задачи (4), (5). Как будет доказано ниже (предложение 1) решение u задачи (1)—(3) будет получено из решения $\tilde{u}$ задачи (4), (5) с помощью обратного преобразования Лапласа.

Пространство $\Lambda CL(M, \gamma)$. Функция $\tilde{h}(x, \lambda)$ принадлежит, по определению, пространству $\Lambda CL(M, \gamma)$, если

а) Для любого $\lambda_0 \in \mathbf{C}_\gamma$ функция $\bar{h}(x, \lambda_0) \in CL^0(M)$, причем как функция от λ $\tilde{h}(x, \lambda)$ непрерывна в $\mathbf{C}_\gamma$ со значениями в $CL^0(M)$.

в) $\bar{h}(x, \lambda)$ аналитична по λ со значениями в $CL^0(M)$, при этом $\tilde{h}(x, \lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$ в $\mathbf{C}_\gamma$.

с) Положим $\lambda = \sigma + i\tau$. Требуется, чтобы для любого $\sigma \geqslant \gamma$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sigma + i\tau|^m \, \|\bar{h}(x, \sigma + i\tau)\|_{C(M)} \, d\tau \leqslant K < +\infty, \tag{9}$$

где $K > 0$ — постоянная, не зависящая от σ.

Пространство $\Lambda CL(\partial M, \gamma)$ определяется аналогично. Функция $\bar{h}(x', \lambda)$, $x' \in \partial M$, принадлежит, по определению, пространству $\Lambda CL(\partial M, \gamma)$, если выполнены условия а)—с), в которых необходимо заменить x на x', $CL^0(M)$—на $CL^0(\partial M)$, а условие (9) записывается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sigma + i\tau|^m \, \|\bar{h}(x', \sigma + i\tau)\|_{C(\partial M)} \, d\tau \leqslant K < +\infty, \tag{9'}$$

где постоянная K не зависит от σ.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ оператор задачи (4), (5):

$$\mathfrak{M}\bar{u} = \{\widehat{P}\bar{u}(x, \lambda),\ x \in M,\ \widehat{N}_1 \bar{u}|_{\partial M}, \cdots, \widehat{N}_m \bar{u}|_{\partial M},\ \lambda \in \mathbf{C}_\gamma\}$$

и пусть $\Omega_{\mathfrak{M}}$ — область определения его замыкания.

Определение. Мы скажем, что функция $\bar{u}(x, \lambda) \in \Omega_{\mathfrak{M}}$ является решением задачи (4), (5), если $\bar{u} \in \Lambda CL(M, \gamma)$, ограничение $\tilde{u}$

на $\partial M: \tilde{u}|_{\partial M} \in \Lambda CL(\partial M, \gamma)$ и для любого $\lambda \in \mathbf{C}_\gamma$ удовлетворяет уравнениям (4), (5).

3°. Предложение 1. *Пусть* $\tilde{f}(x, \lambda) \in \Lambda CL(M, \gamma)$, $\tilde{g}_j(x', \lambda) \in \Lambda CL(\partial M, \gamma)$, *а* $\tilde{u}(x, \lambda)$ — *соответствующее им решение задачи* (4), (5).

Тогда $u(x, t) = \Lambda^{-1}\tilde{u}(x, \lambda)$ *является решение задачи* (1)—(3), *соответствующее правой части* $f(x, t) = \Lambda^{-1}\tilde{f}(x, \lambda)$ *и функциям* $g_j(x', t) = \Lambda^{-1}\tilde{g}_j(x', \lambda)$, *заданным на границе* ∂M, *при этом* $\tilde{P}u$ *и* $\tilde{N}_j u|_{\partial M}$ *непрерывны по* t *со значениями в* $CL^0(M)$ *и* $CL^0(\partial M)$ *соответственно.*

Доказательство. Пусть $\tilde{u}(x, \lambda)$ — решение задачи (4), (5). Проверим вначале выполнение условия (3). Имеем для k, $0 \leqslant k \leqslant m-1$ и $\sigma > \gamma$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} (\sigma + i\tau)^k e^{(\sigma + i\tau)t}\,\tilde{u}(x, \sigma + i\tau)\,d\tau,$$

откуда

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\, e^{-\sigma t}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} |\sigma + i\tau|^k\, |\tilde{u}(x, \sigma + i\tau)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} |\sigma + i\tau|^k \|\tilde{u}(x, \sigma + i\tau)\|_{C(M)}\,d\tau \leqslant K_1 < +\infty.$$

При выводе последней оценки мы воспользовались условием (9). Из этого неравенства очевидным образом следует, что

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \equiv 0, \text{ при } t < 0 \text{ и } k = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Докажем теперь, что $u = \Lambda^{-1}\tilde{u} \in \Omega_{\mathfrak{M}}$ для любого $t > 0$, а также, что функция u удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (2).

Функция $\tilde{u}(x, \lambda) \in \Lambda CL(M, \gamma)$, следовательно, в силу условия а), она непрерывна в $\mathbf{C}_\gamma$. Пусть

$$\Lambda_{N,j}^{-1}\tilde{u} = \frac{1}{2\pi i}\sum_j \tilde{u}(x, \sigma + i\tau_j)\, e^{(\sigma + i\tau_j)t}\,\Delta\tau_j$$

— интегральная сумма для интеграла

$$u_N(x, t) \equiv \Lambda_N^{-1}\tilde{u} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - iN}^{\sigma + iN} \tilde{u}(x, \sigma + i\tau)\, e^{(\sigma + i\tau)t}\,d\tau.$$

Имеем $\lim\limits_{\max \Delta\tau_j \to 0} \Lambda_{N,j}^{-1} \tilde{u} = \Lambda_N^{-1} \tilde{u}$ в $CL^0(M)$. По определению решения $\tilde{u} \in \Omega_{\mathfrak{M}}$, откуда следует, что $\Lambda_{N,j}^{-1} \tilde{u} \in \Omega_{\mathfrak{M}}$. Следовательно, к функции $\Lambda_{N,j}^{-1} \tilde{u}$ можно применить оператор $\hat{P}$. Имеем

$$\hat{P}(x, \xi, \lambda)\, \Lambda_{N,j}^{-1} \tilde{u} = \sum_{k=0}^{m} (\hat{A}(x, \xi) + \lambda I)^k\, \Lambda_{N,j}^{-1} \tilde{u} = \Lambda_{N,j}^{-1} \hat{P} \tilde{u} =$$

$$= \Lambda_{N,j}^{-1} \left(\sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} C_{k,l}\, \lambda^l [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l} \tilde{u} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l}\, \Lambda_{N,j}^{-1} (\lambda^l\, [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l} \tilde{u}) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l}\, [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l}\, \Lambda_{N,j}^{-1} (\lambda^l \tilde{u}).$$

Из условия а) следует, что $\Lambda_{N,j}^{-1} (\lambda^l \tilde{u}) \to \Lambda_N^{-1} (\lambda^l \tilde{u})$ при $\max |\Delta\tau_j| \to 0$ в пространстве $CL^0(M)$. Таким образом

$$\hat{P}(x, \xi, \lambda)\, \Lambda_{N,j}^{-1} \tilde{u} \to \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l} [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l}\, \Lambda_N^{-1} (\lambda^l \tilde{u}).$$

С другой стороны, мы имели, что $\Lambda_{N,j}^{-1} \tilde{u} \to \Lambda_N^{-1} \tilde{u}$ в $CL^0(M)$. Пользуясь теперь замкнутостью оператора $\hat{P}$ в $CL^0(M)$, получим, что $\Lambda_N^{-1} \tilde{u} \in \Omega_{\mathfrak{M}}$ и

$$\hat{P} \Lambda_N^{-1} \tilde{u} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l} [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l}\, \Lambda_N^{-1} \lambda^l \tilde{u}).$$

Далее, из условий в) и с) определения пространства $\Lambda CL(M, \gamma)$ имеем: $\Lambda_N^{-1} \tilde{u} \to \Lambda_{\lambda \to t}^{-1} \tilde{u}$, при $N \to \infty$ и

$$\hat{P}\, \Lambda_N^{-1} \tilde{u} \to \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l} [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l} \Lambda_{\lambda \to t}^{-1} (\lambda^l \tilde{u}). \tag{10}$$

В обоих случаях сходимость имеет место в $CL^0(M)$.

Еще раз используя замкнутость оператора $\hat{P}$ будем иметь $\hat{P}\, \Lambda_N^{-1} \tilde{u} \underset{N \to \infty}{\to} \hat{P}\, \Lambda_{\lambda \to t}^{-1} \tilde{u}$. Заметим, что $\Lambda_{\lambda \to t}^{-1} (\lambda^l \tilde{u}) = \dfrac{\partial^l u}{\partial t^l}$, отсюда и из (10) получим

$$\hat{P} u = \Lambda_{\lambda \to t}^{-1} \left(\sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} c_{k,l} [\hat{A}(x, \xi)]^{k-l} \lambda^l \tilde{u} \right) =$$

$$= \Lambda_{\lambda \to t}^{-1} (\hat{P}(x, \xi, \lambda) \tilde{u}) = \Lambda_{\lambda \to t}^{-1} \tilde{f} = f(x, t).$$

Из непрерывности $\Lambda_{\lambda \to t}^{-1} (\lambda^l \tilde{u})$ вытекает непрерывность по t $\hat{P} u\ (x, t)$ в $CL^0(M)$.

Таким образом, доказано, что функция u удовлетворяет уравнению (1) при любом $t > 0$.

Рассмотрим теперь граничные операторы. Имеем

$$\widehat{N}_k(x', \xi, \lambda)\,\widetilde{u}(x, \lambda)|_{\partial M} = \widetilde{g}_k(x', \lambda),\ k=1, 2, \cdots, m.$$

Функция $\widetilde{u}(x, \lambda) \in \Omega_{\mathfrak{M}}$. Поскольку она является решением задачи, то ограничение $\widetilde{u}$ на границу $\partial M: \widetilde{u}|_{\partial M} \in \Lambda CL(\partial M, \gamma)$. Тогда согласно условию а) определения пространства $\Lambda CL(\partial M, \gamma)$ $\widetilde{u}|_{\partial M}$ непрерывно в C_γ со значениями в $CL^0(\partial M)$. Далее очевидно, что $(\Lambda^{-1}_{N,j}\,\widetilde{u})|_{\partial M} = \Lambda^{-1}_{N,j}(\widetilde{u}|_{\partial M})$ и так же как и выше получаем

$$\lim_{\max|\Delta\tau_j|\to 0} \Lambda^{-1}_{N,j}(\widetilde{u}|_{\partial M}) = \Lambda^{-1}_{N}(\widetilde{u}|_{\partial M}). \tag{11}$$

Из принадлежности $\Lambda^{-1}_{N,j}(\widetilde{u}|_{\partial M})$ к $\Omega_{\mathfrak{M}}$ выводим, что к ней можно применить оператор $\widehat{N}_k$. Разлагая его, как и выше, по степеням λ, получим

$$(\widehat{N}_k(x', \xi, \lambda)\ \Lambda^{-1}_{N,j}\,\widetilde{u})|_{\partial M} = [(\widehat{B}(x', \xi) + \lambda I)^{n_k}\ \Lambda^{-1}_{N,j}\,\widetilde{u}]|_{\partial M} =$$

$$= \Lambda^{-1}_{N,j}\,[(\widehat{B}(x', \xi) + \lambda I)^{n_k}(\widetilde{u}|_{\partial M})] =$$

$$= \Lambda^{-1}_{N,j}\left[\sum_{l=0}^{n_k} c_l \lambda^l (\widehat{B}(x', \xi))^{n_k - l}(\widetilde{u}|_{\partial M})\right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{n_k} c_l\,(\widehat{B}(x', \xi)]^{n_k -}\ \Lambda^{-1}_{N,j}(\lambda^l\,\widetilde{u}|_{\partial M}).$$

Условия в) и с) определения пространства $\Lambda CL(\partial M, \gamma)$ обеспечивают при $N \to \infty$ сходимость в $CL^0(\partial M)$:

$$(\widehat{N}_k\,\Lambda^{-1}_N\,\widetilde{u})\Big|_{\partial M} \to \sum_{l=0}^{n_k} c_l\,[\widehat{B}(x', \xi)]^{n_k - l}\ \Lambda^{-1}_{\lambda\to t}\left(\lambda^l\,\widetilde{u}\Big|_{\partial M}\right).$$

Из замкнутости оператора $\widehat{N}_k$ и того, что $\Lambda^{-1}_N\,\widetilde{u}|_{\partial M} \to \Lambda^{-1}_{\lambda\to t}\,\widetilde{u}|_{\partial M}$, получаем

$$\widehat{N}_k u\Big|_{\partial M} = \Lambda^{-1}_{\lambda\to t}\left(\sum_{l=0}^{n_k} c_l\,[\widehat{B}(x', \xi)]^{n_k - l}\,\lambda^l\,\widetilde{u}\Big|_{\partial M}\right) =$$

$$= \Lambda^{-1}_{\lambda\to t}(\widehat{N}_k(x', \xi, \lambda)\,\widetilde{u})\Big|_{\partial M} = \Lambda^{-1}_{\lambda\to t}\,\widetilde{g}_k(x', \lambda) = g_k(x', t)$$

при любом $t > 0$.

Непрерывность $\widehat{N}_k\,u|_{\partial M}$ по t в $CL^0(\partial M)$ вытекает из непрерывности $\Lambda^{-1}_{\lambda\to t}(\lambda^l\,\widetilde{u}|_{\partial M})$, $l = 0, 1, \cdots, n_k$. Тем самым установлено, что функция $u = \Lambda^{-1}_{\lambda\to t}\,\widetilde{u}$ удовлетворяет граничным условиям (2), чем и завершается доказательство предложения.

4°. Обратимся к вопросу о существовании решения задачи (4), (5). Как уже отмечалось выше эта задача решена в работе [1] (теорема 2). Приведем ее формулировку.

Теорема А. *Пусть операторы $\hat{P}$ и $\hat{N}_j$ удовлетворяют условиям, приведенным в п. 1° и, кроме того, связаны следующим алгебраическим условием:*

$$\det\left\| N_{j,\alpha}\left(x', -i\frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda\right)\omega_{k,\alpha}(x, x_1, \xi', \lambda)\Big|_{x_1=0}\right\| \neq 0,$$

$$\forall\alpha\in\Gamma,\ \forall x'\in\chi_\alpha(U_\alpha),\ \|\xi'\|+|\lambda|\neq 0,\ \xi'=(\xi_2, \xi_3, \cdots),$$

где $\omega_{k,\alpha}$, $k=1, 2, \cdots, m$ — базис в пространстве устойчивых решений уравнения

$$P_{0,\alpha}\left(x, -i\frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda\right)v=0,\ x\in\chi_\alpha(U_\alpha), \tag{11'}$$

а $P_{0,\alpha}$ — слагаемые представления главной части символа P.

Тогда для достаточно больших $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ оператор $\mathfrak{M}$ задачи (4), (5) осуществляет изоморфное отображение $\Omega_{\mathfrak{M}}$ на пространство $CL^0(M)\times\prod_{j=1}^{m} CL^0(\partial M)$ и имеет место оценка

$$\|\mathfrak{M}^{-1}(\tilde{f}, \tilde{g}_1, \cdots, \tilde{g}_m)\|_{C(M)} \leqslant C|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\varepsilon}\left\{\|\tilde{f}\|_{C(M)}+\sum_{j=1}^{m}\|\tilde{g}_j\|_{C(\partial M)}\right\},\ \varepsilon>0. \tag{12}$$

Теорема. *Пусть операторы $\hat{P}$ и $\hat{N}_j$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ удовлетворяют условиям теоремы А, $\Lambda_{t\to\lambda}f(x, t)\in\Lambda CL(M, \gamma)$, $\Lambda_{t\to\lambda}g_j(x', t)\in\Lambda CL(\partial M, \gamma)$ с достаточно большим $|\gamma|$. Тогда задача (1)—(3) однозначно разрешима.*

Доказательство. Пусть $\gamma>0$ достаточно велико.

Имея в виду предложение 1 однозначная разрешимость задачи (1)—(3) будет установлена, если мы докажем, что решение $\tilde{u}$ задачи (4), (5) (существование и единственность которого обеспечивается теоремой А) принадлежит пространству $\Lambda CL(M, \gamma)$.

Проверим вначале условие с) определения пространства $\Lambda CL(M, \gamma)$. По условию теоремы $\tilde{f}\in\Lambda CL(M, \gamma)$, а $\tilde{g}_j\in\Lambda CL(\partial M, \gamma)$. Тогда для них справедливы, соответственно, оценки (9), (9′). Воспользуемся теперь оценкой (12) для решения $\tilde{u}$ задачи (4), (5). Из нее следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma+i\tau|^m\|\tilde{u}(x, \sigma+i\tau)\|_{C(M)}\,d\tau \leqslant C|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\varepsilon}\times$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma+i\tau|^m\|f(x, \sigma+i\tau)\|_{C(M)}\,d\tau+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma+i\tau|^{m}\|\tilde{g}_j(x',\sigma+i\tau)\|_{C(\partial M)}\,d\tau\Big\}\leqslant C_1|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-s},$$

где C_1 — некоторая константа, не зависящая от $\mathrm{Re}\,\lambda$.

Последнее неравенство означает, что для $\tilde{u}$ выполнено условие с). Далее, из оценки (12) вытекает сходимость $\|\tilde{u}\|_{C(M)}=\|\mathfrak{M}^{-1}[\tilde{f},\tilde{g}_1,\cdots$ $\cdots,\tilde{g}_m]\|_{C(M)}\to 0$, при $\lambda\to\infty$, т. е. требование, входящее в условие в) определения пространства $ACL(M,\gamma)$.

Проверим теперь условие а). С этой целью воспользуемся представлением для регуляризатора задачи (4), (5), полученного в [1]. Регуляризатор, отвечающий внутренности многообразия M, имеет вид

$$\hat{R}\tilde{f}=\sum_{\alpha}\chi_\alpha^*[\hat{\varphi}_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1}(\chi_\alpha^{-1})^*\psi_\alpha\tilde{f}, \tag{13}$$

а решение $\tilde{u}=\hat{R}\circ(E+\hat{T})^{-1}$, где $\hat{T}=\hat{P}\circ\hat{R}-E$ (E — тождественный оператор).

Суммирование в (13) проводится по $\alpha\in B\overset{\mathrm{def}}{=}\{\alpha\in A,\ U_\alpha\cap\partial M=\varnothing\}$, а $\{\psi_\alpha\}$ — накрывающие многообразия M.

Символы слагаемых представления (13) принадлежат соответствующим классам $\sum_{A_1}^{-2m+s,s}$, введенным в [1], [2], откуда следует, что эти операторы порождаются счетно-аддитивными мерами $\mu_\alpha(x,dz,\lambda)$.

Обозначим через $\hat{C}_\alpha=\hat{\varphi}_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1}(\chi_\alpha^{-1})^*\psi_\alpha$. Имеем

$$\hat{C}_\alpha\tilde{f}(x,\lambda)=\int\tilde{f}(x-z,\lambda)\,\mu_\alpha(x,dz,\lambda),$$

где интегрирование ведется по H_1, а $x\in\chi_\alpha(U_\alpha)=V_\alpha\subset H_1$. Для доказательства непрерывности $\hat{C}_\alpha\tilde{f}$ по λ рассмотрим разность

$$\hat{C}_\alpha\tilde{f}(x,\lambda+\Delta\lambda)-\hat{C}_\alpha\tilde{f}(x,\lambda)=\int\tilde{f}(x-z,\lambda+\Delta\lambda)\,\mu_\alpha(x,dz,\lambda+\Delta\lambda)-$$

$$-\int\tilde{f}(x-z,\lambda)\,\mu_\alpha(x,dz,\lambda)=\int[\tilde{f}(x-z,\lambda+\Delta\lambda)-$$

$$-\tilde{f}(x-z,\lambda)]\,\mu_\alpha(x,dz,\lambda+\Delta\lambda)+$$

$$+\int\tilde{f}(x-z,\lambda)[\mu_\alpha(x,dz,\lambda+\Delta\lambda)-\mu_\alpha(x,dz,\lambda)]\equiv J_1\tilde{f}+J_2\tilde{f}.$$

Оценим вначале слагаемое J_2. Функция $\tilde{f}(x,\lambda)$ равномерно ограничена по λ. Следовательно, $\|\tilde{f}\|_{C(M)}\leqslant K$, где $K>0$ — некоторая константа. Далее для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что

$$\mathrm{Var}_z\,[\mu_\alpha(x, dz, \lambda+\Delta\lambda]-\mu_\alpha(x, dz, \lambda)]<\varepsilon,$$

при $|\Delta\lambda|<\delta$. Отсюда при $|\Delta\lambda|<\delta$ имеем

$$\|J_2\tilde{f}\|_{C(V_\alpha)}\leqslant\|\tilde{f}\|_{C(M)}\,\mathrm{Var}_z\,[\mu_\alpha(x, dz, \lambda+\Delta\lambda)-\mu_\alpha(x, dz, \lambda)]<\varepsilon K. \quad (14)$$

Для оценки оператора J_1 выберем $R>0$ настолько большим, чтобы при $\|z\|_{H_1}>R$ имело место: $\mathrm{Var}_z\,\mu_\alpha(x, dz, \lambda+\Delta\lambda)<\varepsilon$ при любом $x\in\mathcal{X}_\alpha(U_\alpha)$ (этого можно добиться в силу равномерной непрерывности на бесконечности мер μ_α). Представим теперь J_1 в виде

$$J_1\tilde{f}=\int\limits_{\|z\|_{H_1}<R}[\tilde{f}(x-z, \lambda+\Delta\lambda)-\tilde{f}(x-z, \lambda)]\,\mu_\alpha(x, dz, \lambda+\Delta\lambda)+$$

$$+\int\limits_{\|z\|_{H_1}>R}[\tilde{f}(x-z, \lambda+\Delta\lambda-\tilde{f}(x-z, \lambda)]\,\mu_\alpha(x, dz, \lambda+\Delta\lambda)\equiv J_1'\tilde{f}+J_1''\tilde{f}.$$

Имеем в силу равномерной непрерывности $\tilde{f}$ и равномерной ограниченности $\mu_\alpha:\mathrm{Var}_z\,\mu_\alpha\leqslant K_1$

$$\|J_1'\tilde{f}\|_{C(V_\alpha)}\leqslant\|\tilde{f}(z', \lambda+\Delta\lambda)-\tilde{f}(z', \lambda)\|_{C(M)}\,\mathrm{Var}_z\,\mu_\alpha<\varepsilon K_1. \quad (15)$$

Наконец, для J_1'' имеем такую оценку ($\|z\|_{H_1}>R$)

$$\|J_1''\tilde{f}\|_{C(V_\alpha)}\leqslant 2\|\tilde{f}\|_{C(M)}\,\mathrm{Var}_z\,\mu_\alpha<2K\varepsilon. \quad (16)$$

Из неравенств (14)—(16) вытекает непрерывность $\hat{C}_\alpha\tilde{f}$ по λ. Исследуем теперь регуляризатор задачи вблизи границы ∂M. Он имеет следующее представление (см. [1], теорема 2):

$$\hat{R}_1=\sum_{\alpha\subset\Gamma}P^+\hat{Q}_{\alpha_1}+\sum_{\alpha\subset\Gamma}\hat{Q}_{\alpha_2}, \quad (17)$$

здесь P^+ — оператор проектирования на границу, а

$$P^+\hat{Q}_{\alpha 1}\{\tilde{f}, \tilde{g}_1, \cdots, g_m\}=\chi_\alpha^*P^+\rho(x_1/\delta)\,\varphi_\alpha^*\{\hat{P}_{0,\alpha}^{-1}l(\chi_\alpha^{-1})^*\psi_\alpha\tilde{f}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sim\Omega_{j,\alpha}(\chi_\alpha^{-1})^*\psi_\alpha[\tilde{g}_j-\hat{N}_ju_0|_{x_1=0}]\},$$

$$\hat{Q}_{\alpha 2}\tilde{f}=\chi_\alpha^*(1-\rho(x_1/\delta))[\hat{\varphi}_\alpha^*P_{0,\alpha}^{-1}(\chi_\alpha^{-1})^*\psi_\alpha\tilde{f}],$$

где $\rho(x_1)$ — монотонная функция, удовлетворяющая следующим условиям: $\rho(x_1)\in C^\infty(R_1^+)$, $\rho(x_1)\geqslant 0$, $\rho(x_1)\equiv 1$, при $x_1\leqslant\frac{1}{2}$ и $\rho(x_1)\equiv 0$, $x_1>1$, δ — ширина полосы, в которой оператор $\hat{P}$ приводится к некоторому специальному виду, l — оператор продолжения, $\Omega_{j,\alpha}$ — канонический базис в пространстве устойчивых решений уравнения (11′), $u_0=\hat{P}_0^{-1}l\tilde{f}$.

Справедливость условия а) для слагаемых $\widehat{Q}_{\alpha 2}$ проверяется точно так же, как и выше, поскольку их символы равны нулю вблизи границы.

Операторы $P^+ \widehat{Q}_{\alpha 1}$ состоят из двух слагаемых. Для первого слагаемого имеем: символы $\psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1}$, продолженные нулем в $H_1 \setminus V_\alpha$, принадлежат классу $\sum_{A_1}^{-2m+\varepsilon, s}$ и, следовательно, операторы

$$\widehat{C}_\alpha^{(1)} = \gamma_\alpha^* P^+ \rho(x_1/\delta) \varphi_\alpha^* \widehat{P}_{0,\alpha}^{-1} \circ l = \gamma_\alpha^* P^+ \rho(x_1/\delta) \varphi_\alpha^* \widehat{\ } \psi_\alpha^* P_{0,\alpha}^{-1} \circ l$$

порождаются мерами $\mu_\alpha^{(1)}(x, dz, \lambda)$ и непрерывным образом отображают пространство $CL^0(H_1^+)$ в $CL^0(V_\alpha)$ $(V_\alpha \subset H_1^+)$. Таким образом, имеем представление

$$\widehat{C}_\alpha^{(1)} \widetilde{f} = P^+ \int \widetilde{f}(x-z, \lambda) \mu_\alpha^{(1)}(x, dz, \lambda).$$

Непрерывность $\widehat{C}_\alpha^{(1)} \widetilde{f}$ по λ доказывается теперь повторением рассуждений, проведенных для операторов $\widehat{C}_\alpha$.

Рассмотрим, наконец, операторы

$$\widehat{C}_{\alpha, j}^{(2)} = \rho(x_1/\delta) \varphi_\alpha^* \widehat{\Omega}_{j,\alpha} = \rho(x_1/\delta) \varphi_\alpha^* \widehat{\ } \psi_\alpha^* \Omega_{j,\alpha} \ (j=1, 2, \cdots, m).$$

Продолжим их символы нулем в $H_1 \setminus V_\alpha$. В силу леммы 2 из [4] при $n > m-1$ операторы $\widehat{C}_{\alpha, j}^{(2)}$ принадлежат классу $\sum_{A_\varepsilon(\xi', \lambda)}^{m-n, j-1+\varepsilon, s}$ ($s > 0$ — любое, $\varepsilon > 0$) и, следовательно, в силу предложения 3 работы [4] для любого $\lambda \in \mathbf{C}_+$ существует счетно-аддитивная мера $\mu_{\alpha, j}(x', x_1, dz', \lambda)$ заданная на H_1 такая, что имеет место представление

$$\gamma_\alpha^* P^+ \widehat{C}_{\alpha, j}^{(2)} \overline{g}(x', \lambda) = P^+ \int \overline{g}(x'-z', \lambda) \mu_{\alpha, j}(x', x_1, dz', \lambda). \tag{18}$$

Изучим ядра $G_{\alpha, j}$ операторов $P^+ \widehat{C}_{\alpha, j}^{(2)}$:

$$G_{\alpha, j}^{(N)}(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda) = P^+ (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{H^{n-1}} e^{i((\xi')^{n-1}, (x')^{n-1})} \times$$

$$\cdot \times C_{\alpha, j}^{(2)}(x^N, x_1, (\xi')^{n-1}, \lambda) \, d(\xi')^{n-1}.$$

Аналогично тому, как это было установленно в лемме 2 работы [4], для ядер $G_{\alpha, j}^{(N)}$ имеют место равномерные по λ оценки

$$\|G_{\alpha, j}^{(N)}\|_{L_1(H^{n-1})} \leqslant K < +\infty, \tag{19}$$

при $\forall N$, n и $x^N \in V_\alpha \cap H_+^N = \{x^N \in H_1^N, x_1 > 0\}$, а также оценки для моментов

$$\sup_{k \geqslant 2} \int_{H^{n-1}} |z_k^2 G_{\alpha, j}^{(N)}(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda)| \, d(z')^{n-1} \leqslant K \tag{20}$$

для $\forall N$, n и при любом фиксированном $x^N \in H_+^N \cap V_\alpha$.

Далее, поскольку символы рассматриваемых операторов „слабо" зависят от далеких переменных, имеем также

$$\sup_{\substack{\|x_1\|_{H_1^+}<R \\ x\in V_\alpha}} \|G_{\alpha,j}^{(N)}(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda) - G_{\alpha,j}^{(N+k)}(x^{N+k}, x_1, (z')^{n-1}, \lambda)\|_{L_1(H^{n-1})} \to 0 \tag{21}$$

при $N\to\infty$, $k\to\infty$.

Из оценок (19)—(21) (см. [5], теорему 3.3) следует равномерная ограниченность $\mathrm{Var}_z\, \mu_{\alpha,j}$, после чего почти идентичными рассуждениями проводятся оценки, аналогичные (14)—(16), из которых вытекает непрерывность операторов $P^+\widehat{C}_{\alpha,j}^{(2)}$ по λ.

Таким образом, проверено также выполнение условия а) для слагаемых регуляризатора $\widehat{R}_1$ задачи вблизи границы ∂M.

Для рядов (13) и (17), представляющих регуляризатор задачи, соответственно, во внутренности многообразия M и вблизи границы, справедливы оценки вида (12), откуда непосредственно следует, что при $|\mathrm{Re}\,\lambda|\geqslant a$ (a— некоторое фиксированное число) упомянутые ряды равномерно относительно λ сходятся в $CL^0(M)$ и $CL^0(M)\times\prod_{j=1}^{m} CL^0(\partial M)$.

По условию $\widetilde{f}\in\Lambda CL(M,\gamma)$, $\widetilde{g}_j\in\Lambda CL(\partial M,\gamma)$ и, следовательно, удовлетворяют условию а) определения пространства $\Lambda CL(M,\gamma)$ и $\Lambda CL(\partial M,\gamma)$, откуда в силу равномерной сходимости рядов (13), (17) по λ, выводим, что $\widehat{R}\,\widetilde{f}$ и $\widehat{R}_1\,\{\widetilde{f}, \widetilde{g}_1, \cdots, \widetilde{g}_m\}$ также удовлетворяют условию а).

Далее, в силу теоремы A при достаточно больших $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ оператор $\mathfrak{M}$ задачи (4), (5) обладает обратным оператором $\mathfrak{M}^{-1}$. Отсюда получаем, что и для решения $\widetilde{u}=\mathfrak{M}^{-1}\{\widetilde{f}, \widetilde{g}_1, \cdots, \widetilde{g}_m\}$ задачи, представимого в виде ряда, равномерно сходящегося относительно λ, при $|\mathrm{Re}\,\lambda|\geqslant\lambda_0$ (где λ_0 достаточно велико) выполняется условие а).

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что решение $\widetilde{u}$ задачи аналитично по λ со значениями в $CL^0(M)$ (требование, входящее в условие в) определения пространства $\Lambda CL(M,\gamma)$).

Установим вначале аналитичность слагаемых $\widehat{C}_\alpha\widetilde{f}$ регуляризатора $\widehat{R}$. Имеем

$$\frac{\widehat{C}_\alpha\widetilde{f}(x,\lambda+\Delta\lambda)-\widehat{C}_\alpha f(x,\lambda)}{\Delta\lambda} = \int\frac{\widetilde{f}(x-z,\lambda+\Delta\lambda)-\widetilde{f}(x-z,\lambda)}{\Delta\lambda}\times$$

$$\times\mu_\alpha(x,dz,\lambda+\Delta\lambda)+\int\widetilde{f}(x-z,\lambda)\,\frac{\mu_\alpha(x,dz,\lambda+\Delta\lambda)-\mu_\alpha(x,dz,\lambda)}{\Delta\lambda}\equiv$$

$$\equiv J_3\widetilde{f}+J_4\widetilde{f}. \tag{22}$$

Выбирая, как и при оценке J_1, $R>0$ настолько большим, чтобы имело место: $\mathrm{Var}_z\,\mu_\alpha(x,dz,\lambda+\Delta\lambda)<\varepsilon$ при любом $x\in V_\alpha$, представим затем $J_3\widetilde{f}$ в виде

$$J_3\tilde{f}=\int\limits_{\|z\|_{H_1}<R}\frac{\tilde{f}(x-z,\lambda+\Delta\lambda)-\tilde{f}(x-z,\lambda)}{\Delta\lambda}\mu_\alpha(x,dz,\lambda+\Delta\lambda)+$$

$$+\int\limits_{\|z\|_{H_1}>R}\frac{\tilde{f}(x-z,\lambda+\Delta\lambda)-\tilde{f}(x-z,\lambda)}{\Delta\lambda}\mu_\alpha(x,dz,\lambda+\Delta\lambda)=J_3'\tilde{f}+J_3''\tilde{f}.$$

В силу аналитичности $\tilde{f}$ по λ со значениями в $CL^0(M)$ имеем, что существует

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\tilde{f}(x-z,\lambda+\Delta\lambda)-\tilde{f}(x-z,\lambda)}{\Delta\lambda}=\tilde{f}'_\lambda(x-z,\lambda)$$

в $CL^0(M)$, откуда ввиду равномерной сходимости под знаком интеграла следует существование $\lim\limits_{\Delta\lambda\to 0} J_3'\tilde{f}$.

Далее, поскольку

$$\frac{\tilde{f}(x-z,\lambda+\Delta\lambda)-\tilde{f}(x-z,\lambda)}{\Delta\lambda}=\tilde{f}'(x-z,\lambda+\theta\,\Delta\lambda),$$

где $0<\theta<1$, в силу равномерной ограниченности $\tilde{f}'_\lambda$ и равномерной непрерывности на бесконечности мер μ_α, имеем оценку

$$\|J_3''\tilde{f}\|_{C(M)}\leqslant\|\tilde{f}'_\lambda\|_{C(M)}\ \mathrm{Var}_z\,\mu_\alpha<\varepsilon K,$$

откуда вытекает, что $J_3''\tilde{f}\to 0$ при $\Delta\lambda\to 0$ в $CL^0(M)$.

Докажем теперь существование предела $\lim\limits_{\Delta\lambda\to 0} J_4\tilde{f}$.

Ядра $G_\alpha^{(N)}$ операторов $\hat{C}_\alpha$ аналитически зависят от λ, при этом легко заметить, что $\frac{\partial C_\alpha}{\partial\lambda}\in\sum_{A_0}^{-2(m+1)+\varepsilon,\,s}$. Отсюда следует, что $\frac{\partial G_\alpha^{(N)}}{\partial\lambda}\in L_1(H^n)$, при этом имеет место равномерная оценка

$$\left\|\frac{\partial G_\alpha^{(N)}}{\partial\lambda}\right\|_{L_1(H^n)}\leqslant K<\infty. \tag{23}$$

Поскольку операторы $\hat{C}_\alpha$ порождались мерами $\mu_\alpha(x,dz,\lambda)$, то из последней оценки следует существование $\frac{\partial\mu_\alpha}{\partial\lambda}$, а также равномерная ограниченность $\mathrm{Var}_z\frac{\partial\mu_\alpha}{\partial\lambda}$. Это позволяет нам утверждать, что существует $\lim\limits_{\Delta\lambda\to 0} J_4\tilde{f}$.

Таким образом, правая часть соотношения (22) имеет предел при $\Delta\lambda \to 0$, откуда следует существование $\frac{\partial \widehat{C}_\alpha \widetilde{f}}{\partial \lambda}$, то есть аналитичность слагаемых $\widehat{C}_\alpha \widetilde{f}$ регуляризатора $\widehat{R}\widetilde{f}$.

Аналитичность по λ $\widehat{R}\widetilde{f}$ топерь вытекает из равномерной сходимости ряда (13) и аналитичности его слагаемых $\widehat{C}_\alpha \widetilde{f}$.

Совершенно аналогично доказывается аналитичность $\widehat{R}_1 \{\widetilde{f}, \widetilde{g}_1, \cdots, \widetilde{g}_m\}$. Надо лишь заметить, что ядра операторов $\frac{\partial \widehat{C}^{(2)}_{\alpha,j}}{\partial \lambda}$ удовлетворяют равномерной оценке вида (23), которая, в свою очередь, следует из принадлежности символов этих операторов классу ${}^{\prime}\sum^{0,0}_{A_3}$.

Из аналитичности $\widehat{R}\widetilde{f}$ и $\widehat{R}_1 \{\widetilde{f}, \widetilde{g}_1, \cdots, \widetilde{g}_m\}$ очевидным образом следует аналитичность $\widetilde{u} = \mathfrak{M}^{-1} \{\widetilde{f}, \widetilde{g}_1, \cdots, \widetilde{g}_m\}$ при достаточно больших $|\mathrm{Re}\,\lambda|$. Справедливость условия в) также установлена.

Таким образом, $\widetilde{u} \in \Omega_{\mathfrak{M}}$ и теорема доказана.

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 31.I.1984

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ. Խառը խնդրի անվերջ բվով անկախ փոփոխականներով բարձր կարգի պարաբոլական հավասարումների համար *(ամփոփում)*

Դլանային տիրույթում, որի հիմքը հանդիսանում է եզրով անվերջ-չափանի ողորկ բազմաձևություն, դիտարկվում է բարձր կարգի անվերջ-չափանի պարաբոլական հավասարումների մի դասի Դրվում է խառը խնդիր ընդհանուր տեսքի եզրային պայմաններով գլանի կողմնային մակերևույթի վրա։ Լապլասի ձևափոխության օգնությամբ խնդիրը բերվում է կոմպլեքս պարամետրից կախված համապատասխան էլիպտական խնդրի ուսումնասիրմանը մի դասի եզրով հիլբերտյան բազմաձևությունների վրա։

Էապես հենվելով [1] աշխատանքում հեղինակի կողմից ստացված էլիպտական խնդրի լուծելիության վերաբերյալ արդյունքների վրա ապացուցվում է պարաբոլական հավասարումների համար խառը խնդրի միարժեք լուծելիությունը հատուկ ձևով կառուցված ֆունկցիոնալ տարածություններում։

R. L. SHAKHBAGIAN. *A mixed problem for high order equations of parabolic type with infinite number of independent variables* (summary)

We consider a class of infinite dimensional high order parabolic equations in a tube domain, the base of which is an infinite dimensional smooth manifold with a border. We pose a mixed problem where general boundary conditions are given on the boundary surface of a cylinder. By means of Laplace transform the problem is reduced to the study of the corresponding elliptic problem with a complex parameter on some class of Hilbert manifolds with a border. Basing on the results on solvability of this problem obtained earlier by the author in [1], the univalent solvability of the mixed problem for parabolic equations in some specially constructed functional spaces is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Л. Шахбагян.* Общая краевая задача для эллиптических операторов высокого порядка на бесконечномерных многообразиях с краем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIX, № 1, 1984, 3—18.
2. *М. И. Вишик, А. В. Марченко.* Кравые задачи для эллиптических и параболических уравнений второго порядка на беконечномерных многообразиях с краем, Матем. сб., 90, № 3, 1973, 331—371.
3. *Л. Шварц.* Математические методы для физических наук, «Мир», М., 1965.
4. *Р. Л. Шахбагян.* Общая краевая задача для уравнений эллиптического типа высокого порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVIII, № 1, 1983, 49—64.
5. *П. М. Блехер, М. И. Вишик.* Об одном классе псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и их приложениях, Матем. сб., 86, № 3, 1971, 446—494.
6. *Ю. Л. Далецкий.* Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения, УМН, 22, № 4 (136), 1967, 3—54.