ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 1, 1985 Математика

УДК 517.95

К. А. ЯГДЖЯН

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Введение

Пусть $x \in R^n$, $t \in J=[0, T]$, $T>0$, $D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $D_t=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$, α-мультииндекс

$$P(t, D_t, D_x)=D_t^m+\sum_{\substack{j+|\alpha|<m \\ j<m}} a_{j,\alpha}(t)\, D_t^j\, D_x^\alpha, \tag{0.1}$$

$P_s(t; \tau, \xi)=\sum_{j+|\alpha|=s} a_{j,\alpha}(t)\,\tau^j\,\xi^\alpha$, $\tau \in R^1$, $\xi \in R^n$. Рассмотрим уравнение

$$Pu=f \tag{0.2}$$

и для него задачу Коши с начальными условиями

$$D_t^i\, u|_{t=t_C}=\varphi_i(x),\ i=0,\cdots,m-1,\ t \in J. \tag{0.3}$$

Хорошо известно, что для корректности задачи Коши даже в очень слабом смысле необходимым условием является вещественность всех характеристических корней $\tau=\tau_j(t, \xi)$ уравнения

$$\tau^m+\sum_{j+|\alpha|=m,\ j<m} a_{j,\alpha}(t)\,\tau^j\,\xi^\alpha=0,\ \xi \in R^n \setminus 0. \tag{0.4}$$

Если они различны, то выполнена L_2-оценка [1], и, наоборот, [2]. Нас будет интересовать случай, когда все корни совпадают при некоторых (t, ξ). Если теперь мы потребуем всего лишь, чтобы для любых достаточно гладких правых частей f и начальных данных φ_i задача Коши имела единственное решение, то вообще говоря, для подобной корректности необходимо будет накладывать некоторые условия на P_s, $s<m$.

Часто эти условия называют условиями Е. Е. Леви [3], который указал достаточные условия корректности задачи Коши для уравнений с характеристиками постоянной кратности (т. е. не зависящей от t, x, ξ) при $n=1$. Нахождению этих условий посвящены работы многих математиков. Обзоры этих работ можно найти в [2], [4], поэтому мы остановимся только на некоторых результатах, которые тесно связаны с интересующим нас случаем уравнения, коэффициенты которого не зависят от x.

Наиболее общее достаточное условие корректности задачи Коши с $t_C=0$ для уравнения (по повторяющимся индексам ведется суммирование)

$$u_{tt}-\lambda^2(t)(a^{ij}(t,x)\,u_{x_i})_{x_j}=b^j(t,x)\,u_{x_j}+b^0u_t+cu+f, \tag{0.5}$$

где $\lambda(0)=0$, $\lambda(t>0)>0$, $a^{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\delta|\xi|^2$, $\delta=\mathrm{const}>0$, было предложено А. Б. Нерсесяном [5] и имеет следующий вид:

$$\int_0^t \max_x |b^i(\tau,x)|\,d\tau\leqslant \mathrm{const}\,\lambda(t). \tag{0.6}$$

Условия для уравнений высокого порядка [6] в применении к (0.5) дают

$$\max_{\substack{x\\0\leqslant\tau\leqslant t}} |b^i(\tau,x)|\leqslant \mathrm{const}\,\lambda_t(t),\ \left(\lambda_t=\lambda'=\frac{d\lambda}{dt}\right). \tag{0.7}$$

В дальнейшем им же было предложено заменить λ_t в правой части (0.7) на $\frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)}$, где $\Lambda(t)=\int_0^t\lambda(s)\,ds$. Необходимость условия (0.7) для уравнений с C^∞ коэффициентами в случае, когда при некотором k $\frac{d^k\lambda}{dt^k}(0)\neq 0$ следует из очень общих результатов работы В. Я. Иврия и В. М. Петкова [2]. Для уравнений второго порядка с $n=1$ и с аналитическими коэффициентами необходимые и достаточные условия указаны Т. Нишитани [7]. Необходимым условиям на главный символ нестрого гиперболического оператора посвящены работы [8], [9] [10].

Для оператора ($n>0$)

$$P=D_t^2+A^2\exp(-2t^{-n})\,D_x^2+iBt^{-n-1-l}\exp(-t^{-n})\,D_x, \tag{0.8}$$

где A, B, n, l — постоянные, задача (0.2), (0.3) с $t_C=0$ была исследована в [11] С. Тарамой, и было установлено, что задача корректна при $\mathrm{Re}\,B\neq 0$ ($\mathrm{Re}\,B=0$) тогда и только тогда, когда $l\leqslant 0$ ($l\leqslant n$).

В [12], [13] автором для уравнений с двукратными характеристиками были указаны условия на $\mathrm{Im}\,b^i(t)$ и $\mathrm{Re}\,b^i(t)$, достаточные для C^∞-корректности задачи с любым $t_C\in \mathrm{J}$, которые в широком классе операторов являются и необходимыми.

В настоящей статье мы обобщаем результаты работ [12], [13].

Формулировка результатов. Относительно характеристических корней $\tau_j(t,\xi)$, $j=1,\cdots,m$, предположим, что

$$\tau_j(t,\xi)=\lambda(t)\,\lambda_j(t,\xi),\quad j=1,\cdots,m, \tag{0.9}$$

где $\lambda\in C^1(\mathrm{J})$, $\lambda(0)=\lambda_t(0)=0$, $\lambda(t)>0$, $t>0$, и с некоторой постоянной c_1

$$c_1\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\leqslant\frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t)}\leqslant\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)},\ c_1>\frac{m-1}{m},\ \Lambda(t)\equiv\int_0^t\lambda(s)\,ds,\ t\in \mathrm{J}^0=(0,T], \tag{0.10}$$

а

$$\lambda_i(t, \xi) \neq \lambda_j(t, \xi), \ i \neq j, \tag{0.11}$$

при всех $t \in \mathrm{J}$, $\xi \in R^n \setminus 0$. Для простоты изложения предположим, что $a_{l,\alpha} \in C(\mathrm{J}) \cap C^1(\mathrm{J}^0)$.

Обозначим через $C_t^m(\mathrm{J}; H^s)$ класс функций, осуществляющих вместе со своими производными по t порядка $\leqslant m$ непрерывные отображения J в $H^s(R^n)$ с нормой $\left(\sum_{l=0}^{m} \sup_{t \in \mathrm{J}} \|D_t^l u\|_s^2\right)^{1/2}$, где $\|\cdot\|_s$—норма пространства $H^s(R^n)$, а через $E_s(u; t)$— сумму $\sum_{l=0}^{m-1} \|D_t^l u(t)\|_{m-1+s-l}^2$, когда она имеет смысл. Конус $\{(t, x) \in \mathrm{J} \times R^n; |x - x^0| \leqslant \gamma(t^0 - t)\}$ с вершиной (x^0, t^0) обозначим через $K_\gamma(x^0, t^0)$.

Теорема 1. *Пусть функции $\lambda_i(t, \xi)$, $i = 1, \cdots, m$, вещественны, выполнены условия* (0.9)—(0.11), *и пусть с некоторой положительной постоянной c для всех α, j, и всех $t \in \mathrm{J}^0$*

$$|D_t^k a_{j,\alpha}(t)| \leqslant c\lambda^{m-j}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{m-j-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k, \ k = 0, 1, \tag{0.12}$$

$$|D_t^k \operatorname{Im} a_{m-1-|\alpha|,\alpha}(t)| \leqslant c\lambda^{|\alpha|}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{1+k}, \quad k = 0, 1. \tag{0.13}$$

Тогда существуют положительные постоянные s_0, C, такие, что для любых $t_C \in \mathrm{J}$, $f \in C_t^0(\mathrm{J}; H^{s+s_0})$, $\varphi_j \in H^{s+s_0-j}(R^n)$, $j = 0, \cdots, m-1$, задача (0.2), (0.3) *имеет решение $u \in \bigcap_{l=0}^{m} C_t^l(\mathrm{J}; H^{s+m-l})$. Это решение единственно и удовлетворяет при всех $t \in \mathrm{J}$ энергетическому неравенству*

$$E_s(u; t) \leqslant C\left(E_{s+s_0}(u; t_C) + \left|\int_t^{t_C} \|f(\tau)\|_{s+s_0}^2 d\tau\right|\right). \tag{0.14}$$

При этом задача (0.2), (0.3) *имеет обычный конус зависимости, т. е. из $f|_{K_\gamma(x^0, t^0)} = 0$, $\varphi_j|_{K_\gamma(x^0, t^0) \cap \{t = t_C\}} = 0$, $j \leqslant m-1$, следует $u|_{K_\gamma(x^0, t^0)} = 0$, если*

$$|\gamma| \geqslant \max_{i, t \in \mathrm{J}} |\tau_i(t, \xi)|, \ |\xi| = 1. \tag{0.15}$$

Отметим, что для задачи с $t_C = 0$ условия для оператора с гладкими коэффициентами, зависящими и от x, главный символ которого имеет характеристические корни, слипающиеся с бесконечной по $|x| \cdot t$ скоростью к нулю, эквивалентные (0.12), (0.13), приведены в [14].

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1 задача оказывается корректной в смысле следующих определений.

Определение 1. Задачу (0.2), (0.3) с $t_C \in \mathrm{J}$ будем называть $C^{m,\infty}$-корректной, если:

(E) для любых $\varphi_j \in C^\infty(R^n)$, $j = 0, \cdots, m-1$, $f \in C_t^0(\mathrm{J}; C^\infty(R^n))$ существует $u \in C_t^m(\mathrm{J}; C^\infty(R^n))$ решение задачи (0.2), (0.3);

(U_K) существует конус зависимости, т. е. если $\varphi_j|_{K_\gamma(x^0,t^0)\cap\{t=t_C\}}=0$, $0\leqslant j\leqslant m-1$, $f|_{K_\gamma(x^0,t^0)}=0$, то $u|_{K_\gamma(x^0,t^0)}=0$, где (0.15) и $\gamma(t^0-t)>0$

Определение 2. Задачу (0.2), (0.3) будем называть равномерно по t $C^{m,\infty}$-корректной, если (E), (U_K) имеют место для всех $t_C\in J$ равномерно.

Условие (0.12), (0.13) являются необходимыми для $C^{m,\infty}$-корректности задачи Коши в классах операторов, описанных в нижеследующих теоремах.

Теорема 2. *Предположим, что для некоторого вектора* $\hat{\xi}\in R^n\setminus 0$ *корни* $\{\tau_j(t,\hat{\xi})\}_1^m$ *вещественны и допускают представление* (0.9) *с непрерывными функциями* $\{\lambda_j(t,\hat{\xi})\}_1^m$, *удовлетворяющими* (0.11) *для всех* $t\in J$, *и функцией* $\lambda(t)$, *удовлетворяющей* (0.10). *И пусть*

$$\sum_{|\alpha|=m-1-j}\operatorname{Im} a_{j,\alpha}(t)\hat{\xi}^\alpha=\lambda^{m-1-j}(t)\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\frac{b_j(t)}{\nu(t)},\ j=0,\cdots,m-2,\qquad(0.16)$$

с функциями ν, $b_0,\cdots,b_{m-2}\in C^1(J^0)\cap C(J)$ *такими, что при* $t\in J^0$

$$\nu(t)>0,\ \frac{\nu_t(t)}{\nu(t)}\leqslant\frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t)}\frac{1}{|\ln\lambda(t)|},\qquad(0.17)$$

$$\sum_{j=0}^{m-2}|b_j(0)|\neq 0,\ \sum_{j=0}^{m-2}|D_t b_j(t)|\leqslant c\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}.\qquad(0.18)$$

Предположим далее, что для всех $l=0,\cdots,m-1$, $j=0,\cdots,m-1$, $m-l-j>0$

$$\left|D_t^l\sum_{|\alpha|=m-l-j}a_{j,\alpha}(t)\hat{\xi}^\alpha\right|\leqslant c\lambda^{m-j}(t)\left(\frac{|\ln\lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^l\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k,\ k=0,1,\qquad(0.19)$$

а оставшиеся коэффициенты $a_{j,\alpha}(t)\in C(J)\cap C^1(J^0)$, $j=0,\cdots,m-1$, *удовлетворяют неравенствам* (0.12) *с* $|\alpha|=0$.

Тогда, если $\nu(0)=0$, *то задача* (0.2), (0.3) *ни при каком* $t_C\in J$ *не является* $C^{m,\infty}$-*корректной.*

Случай более сильного нарушения условия (0.13), т. е. большей скорости стремления к нулю функции ν в (0.16), а также случай нарушения условия (0.12) описываются следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть для некоторого вектора* $\hat{\xi}\in R^n\setminus 0$ *и для некоторой пары* $(\hat{j},\hat{k})$, $0<\hat{k}\leqslant m-1$, $m-\hat{j}-\hat{k}>0$, *имеет место представление*

$$\sum_{|\alpha|=m-\hat{k}-\hat{j}}a_{\hat{j},\alpha}(t)\hat{\xi}^\alpha=\lambda^{m-\hat{j}}(t)\left(\frac{|\ln\lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{\hat{k}}\frac{b(t)}{\nu(t)},\qquad(0.20)$$

с комплекснозначной функцией $b\in C^1(J^0)$, *неотрицательной функцией* $\nu\in C^1(J^0)$, *с* $\lambda(t)$, *удовлетворящей* (0.10), *и пусть при некоторой постоянной* $\varepsilon>0$

$$\nu(t)>0,\ |\ln|b(t)||<c,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|\leqslant c\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)},\ t\in J^0,$$

$$0 < \frac{\nu_t}{\nu} \leqslant (m - \hat{j} - 1 - \varepsilon) \frac{\lambda_t}{\lambda} - (\hat{k} - 1) \frac{\lambda}{\Lambda}, \ t \in J^0, \tag{0.21}$$

а для остальных

(j, k), $k = 0, \cdots, m-1$, $m - j - k > 0$, $a_{j,\alpha}$, $\sum\limits_{|\alpha| = m-k-j} a_{j,\alpha}(t)\, \hat{\xi}^\alpha \in C(J)$,

и

$$\left| \sum_{|\alpha| = m-k-j} a_{j,\alpha}(t)\, \hat{\xi}^\alpha \right| \leqslant c \lambda^{m-j}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)} \right)^k. \tag{0.22}$$

Предположим далее, что непрерывно дифференцируемые на J^0 *комплексчые корни* $(m - \hat{j})$*-ой степени из* $b(t)/|b(t)|$, *обозначим их через* $\{Z_l(t)\}_1^{m-\hat{j}}$, *можно так пронумеровать и разбить на две группы* $\{Z_l(t)\}_1^r$, $\{Z_l(t)\}_{r+1}^{m-\hat{j}}$, $0 \leqslant r \leqslant m - j$, что $\operatorname{Im} Z_{m-\hat{j}} \leqslant 0$, *и с некоторыми положительными постоянными* δ, δ_1

$$\min_{r+1 < l < m-\hat{j}} |\operatorname{Im} Z_l(t)| \geqslant \delta > 0, \ t \in J^0, \tag{0.23}$$

$$\min_{r+1 < l < m-\hat{j}} |\operatorname{Im} Z_l(t)| > -(1 + \delta_1) \min_{1 < l < r} \operatorname{Im} Z_l(t), \ t \in J^0. \tag{0.24}$$

(*При* $r = 0$ *первая группа пустая, и условие* (0.24) *отсутствует*).

Тогда если $\lim\limits_{t \to 0} \nu(t) = 0$, *то задача Коши* (0.2), (0.3) *с* $t_C = 0$ *не является* $C^{m,\infty}$*-корректной.*

§ 1. Доказательство теоремы 1

Отметим предварительно, что предпосылки предлагаемого нами метода доказательств имелись еще в работе И. С. Березина [9]. Опишем метод вкратце.

Кокасательное расслоение $T^*(J \times R^n)$ с помощью вспомогательных поверхностей $t = t_1(\xi)$, $t = t_\xi$, $\xi \in R^n$, разбивается на три области (зоны). Здесь $0 < t_1(\xi) < t_\xi < T$, $|\xi| > M$, и будут уточнены ниже. В первой зоне, содержащей многообразие вырождения, оператор P ведет себя как оператор с коэффициентами, интегралы (по t) модулей которых ограничены функцией $c \ln |\xi|$. Во второй зоне доминируют младшие члены и учитывается еще и порядок оператора (но не тип!). Наконец в третьей зоне, где доминирует главный символ, проверяется выполнение условия $|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \leqslant c \left(\frac{\lambda_t}{\lambda} + \frac{\lambda \ln^2 \lambda}{\Lambda^2 |\xi|} \right)$, откуда

$$\int_{t_\xi}^{T} |\operatorname{Im} \Delta_k(\tau, \xi)|\, d\tau \leqslant c\,(1 + \ln(1 + |\xi|)), \ k = 1, \cdots, m, \tag{1.1}$$

где $\Delta_k(t, \xi)$ — корни полного символа оператора, т. е. решения уравнения

$$\Delta^m + \sum_{j+|\alpha|<m,\ j<m} a_{j,\alpha}(t)\,\xi^\alpha\,\Delta^j = 0. \tag{1.2}$$

Очевидна связь условия (1.1) с условием гиперболичности по Адамару [15]. В каждой из зон получаем микролокальную энергетическую оценку (т. е. оценку образа решения при преобразовании Фурье по переменной x).

В условиях теорем 2, 3 в одной из зон это не удается, поэтому задаем на ее границе данные Коши, подходящим образом выбранные, и прослеживаем за ростом образа Фурье решения при $|\xi| \to \infty$.

Итак, введем функцию $t_1 = t_1(\xi)$ как решение уравнения

$$|\xi|\,\lambda^{m-1}(t_1)\,|\ln\lambda(t_1)|^{m-2} = N_1\,\Lambda^{m-2}(t_1). \tag{1.3}$$

Здесь положительное число N_1 будет выбрано ниже. Определим также функцию $t_\xi = t_\xi(\xi)$ как решение следующего уравнения:

$$|\xi|\,\Lambda(t_\xi) = -N\ln\lambda(t_\xi), \tag{1.4}$$

где положительная постоянная N будет уточнена ниже. Нетрудно проверить, что если N/N_1 достаточно велико, то $t_1 < t_\xi$, при больших M.

Предложение 1. *В условиях теоремы* 1 *для обыкновенного дифференциального уравнения*

$$D_t^m u(t,\xi) + \sum_{\substack{j+|\alpha|<m\\ j<m}} a_{j,\alpha}(t)\,\xi^\alpha D_t^j u(t,\xi) = f(t,\xi) \tag{1.5}$$

с параметром $\xi \in R^n$ *существуют положительные постоянные* c, k, M, N *такие, что для энергии решения* $E(t,u) = \sum_{l=0}^{m-1} |D_t^l u(t,\xi)|^2$ *при всех* $|\xi| > M$, $s_1, s_2 \in [0, t_\xi]$ *имеет место неравенство*

$$E(s_2,u) \leqslant c\,(1+|\xi|)^{2k}\left(E(s_1,u) + \left|\int_{s_1}^{s_2} |f(\tau,\xi)|^2\,d\tau\right|\right). \tag{1.6}$$

Доказательство. Рассмотрим первую зону $0 \leqslant t \leqslant t_1$. При $|\alpha| > 0$ имеем

$$\int_0^t \left|\sum_{j+|\alpha|<m-1} a_{j,\alpha}(\tau)\,\xi^\alpha\right| d\tau \leqslant c \sum_{j+|\alpha|<m-1} |\xi|^{|\alpha|} \int_0^t \lambda^{|\alpha|}\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\,|\ln\lambda|\right)^{m-j-|\alpha|} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{j+|\alpha|<m-1} |\xi|^{|\alpha|}\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\,|\ln\lambda(t)|\right)^{m-j-|\alpha|} \lambda^{|\alpha|}(t)\,\frac{\Lambda(t)}{\lambda(t)} \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{j+|\alpha|<m-1} N_1^{|\alpha|}\left(\frac{\Lambda(t_1)}{\lambda(t_1)\,|\ln\lambda(t_1)|}\right)^{|\alpha|(m-2)-m+j+|\alpha|+1} |\ln\lambda(t_1)|, \tag{1.7}$$

и так как функция $\Lambda/(\lambda\,|\ln\lambda|)$ ограничена, а $|\alpha|(m-2) - m + j + |\alpha| + 1 \geqslant 0$, из (1.7) выводим

$$\int_0^t \left|\sum_{j+|\alpha|<m,\ j<m} a_{j,\alpha}(\tau)\,\xi^\alpha\right| d\tau \leqslant -c\ln\lambda(t_1). \tag{1.8}$$

Далее, функция $\lambda(\lambda|\ln|/\Lambda)^{m-2}$ монотонно стремится к 0 при $t\to 0$, откуда

$$\ln|\xi|=\ln\left(N_1\frac{\Lambda^{m-2}(t_1)}{|\ln\lambda(t_1)|^{m-2}\lambda^{m-1}(t_1)}\right)=\ln N_1-\ln\lambda^{\varepsilon}(t_1)-$$

$$-\ln\frac{\lambda^{m-1-\varepsilon}(t_1)|\ln\lambda(t_1)|^{m-2}}{\Lambda^{m-2}(t_1)},$$

и если $\varepsilon>0$ достаточно мало, то $\lambda^{m-1-\varepsilon}|\ln\lambda|^{m-2}<\Lambda^{m-2}$, и тогда

$$\ln|\xi|\geqslant-\varepsilon\ln\lambda(t_1). \tag{1.9}$$

Оценивая $\left|\frac{dE(t,u)}{dt}\right|$ и используя лемму Гронуолла получаем (1.6) для всех s_1, $s_2\in[0,t_1]$, $|\xi|>M$ с постоянными, зависящими только от констант в оценках условий теоремы.

Рассмотрим теперь зону $[t_1, t_\xi]$. Введем вектор $U={}^t(u, D_t u,\cdots, D_t^{m-1}u)$ и перепишем (1.5) в виде системы первого порядка

$$D_t U=AU+F,\ \text{где}\ F={}^t(0,\cdots,0,f). \tag{1.10}$$

Обозначим через $\rho(t,\xi)$ положительный корень уравнения

$$\rho^m-1-|\xi|\lambda^m(t)\Lambda^{1-m}(t)|\ln\lambda(t)|^{m-1}=0,$$

а через N^{-1} — диагональную матрицу с элементами $(N^{-1})_{kl}=\delta_{kl}\rho^{k-1}$, где δ_{kl} — символ Кронекера. Тогда $(N)_{lj}=\delta_{lj}\rho^{-l+1}$. Введем новую неизвестную функцию $V=NU$, которая будет удовлетворять уравнению

$$D_t V=BV+iNN_t^{-1}V+NV, \tag{1.11}$$

где $B=NAN^{-1}$, и ее элементы B_{kl} выражаются через элементы A_k матрицы A следующим образом: $B_{kl}=\rho^{l-k}A_{kl}$. Но $A_{k,k+1}=1$, и

$$A_{mk}(t,\xi)=\sum_{|\alpha|<m-k+1}a_{k-1,\alpha}(t)\xi^\alpha,\ k=1,\cdots,m, \tag{1.12}$$

а остальные A_{kl} равны нулю. Поэтому

$$|B_{mk}|\leqslant\rho^{k-m}\Big|\sum_{k-1+|\alpha|=m}a_{k-1,\alpha}(t)\xi^\alpha\Big|+\rho^{k-m}\Big|\sum_{k+|\alpha|<m}a_{k-1,\alpha}(t)\xi^\alpha\Big|\leqslant$$

$$\leqslant c\rho^{k-m}(\lambda(t)|\xi|)^{m+1-k}+c\rho^{k-m}\sum_{k+|\alpha|<m}\lambda^{|\alpha|}|\xi|^{|\alpha|}\left(\frac{\lambda}{\Lambda}|\ln\lambda|\right)^{m-k+1-|\alpha|}.$$

Но

$$\left(\frac{\lambda(t)|\xi|}{\rho(t,\xi)}\right)^m\leqslant\left(\frac{|\xi|\Lambda(t)}{|\ln\lambda(t)|}\right)^{m-1}\leqslant\left(\frac{|\xi|\Lambda(t_\xi)}{|\ln\lambda(t_\xi)|}\right)^{m-1}\leqslant N^{m-1},$$

и

$$\rho^{-m}\left\{\rho^{k-m}\lambda^{m-k+1}|\xi|^{|\alpha|}\left(\frac{|\ln\lambda|}{\Lambda}\right)^{m-k+1-|\alpha|}\right\}^m\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{|\xi|\Lambda(t)}{|\ln\lambda(t)|}\right)^{m|\alpha|-m+k-1}\leqslant\left(\frac{|\xi|\Lambda(t_\xi)}{|\ln\lambda(t_\xi)|}\right)^{m|\alpha|-m+k-1}=N^{m|\alpha|-m+k-1},$$

так как при $|\alpha|\neq 0$, $k\geqslant 1$, $k+|\alpha|\leqslant m$ имеем $m|\alpha|-m+k-1\geqslant 0$.

Если же $|\alpha|=0$, то $\rho^{k-m}|a_{k-1,\alpha}(t)|<\text{const}$. Таким образом $\|B\|\leqslant c\rho$. С другой стороны, ясно, что $\|NN_t^{-1}\|\leqslant c\lambda/\Lambda$. Поэтому для $E(t, V)=\sum_{l=1}^{m}|V_l(t, \xi)|^2$ получаем

$$\left|\frac{dE}{dt}\right|\leqslant c\left(\rho+\frac{\lambda_t}{\lambda}\right)E+c|f|. \tag{1.13}$$

Очевидно, что для всех s_1, $s_2\in[t_1, t_\xi]$

$$\int_{s_1}^{s_2}\frac{\lambda_t}{\lambda}\,dt\leqslant-\ln\lambda(t_1)\leqslant c\ln|\xi|,$$

$$\int_{s_1}^{s_2}\rho(\tau)\,d\tau\leqslant\int_{t_1}^{t_\xi}d\tau+\int_{t_1}^{t_\xi}\left(|\xi|\lambda^m(\tau)\left(\frac{|\ln\lambda(\tau)|}{\Lambda(\tau)}\right)^{m-1}\right)^{1/m}d\tau.$$

С другой стороны

$$\int_0^t\lambda(\tau)\Lambda^{(1-m)/m}(\tau)|\ln\lambda(\tau)|^{(m-1)/m}d\tau\leqslant c\left(\frac{\Lambda(t)}{|\ln\lambda(t)|}\right)^{1/m}\ln\left(\frac{|\ln\lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right). \tag{1.14}$$

Таким образом, при всех s_1, $s_2\in[t_1, t_\xi]$, $|\xi|>M$, имеем

$$\int_{s_1}^{s_2}\rho(\tau)\,d\tau\leqslant c\ln|\xi|,\ \|N\|\leqslant c,\ \|N^{-1}\|\leqslant c|\xi|.$$

Используя теперь лемму Гронуолла из (1.13) легко выводим (1.6). Предложение доказано.

Замечание. Условием $c_1>(m-1)/m$ мы воспользовались только при введении первой зоны. Ее возникновение связано с тем, что, вообще говоря, $t_C\neq0$. В противном случае, когда $t_C=0$, можно принять во внимание неотрицательную определенность матрицы NN_t^{-1}, что приведет к отсутствию в (1.13) ядра λ_t/λ.

Рассмотрим теперь третью зону, т. е. $t_\xi\leqslant t\leqslant T$. Покажем, что оценка (1.6) остается справедливой и при s_1, $s_2\in[t_\xi, T]$ за счет интегральной (по t) гиперболичности (т. е. (1.1)). Для этого в (1.2) осуществим однородную замену $\Delta=\lambda(t)|\xi|\gamma$. Тогда γ будет решением уравнения

$$\gamma^m+\sum_{0<j<m}\left(\sum_{|\alpha|=m-j}(\lambda|\xi|)^{j-m}a_{j,\alpha}(t)\xi^\alpha+B_{j+1}\right)\gamma^j=0, \tag{1.15}$$

где

$$B_{j+1}=\sum_{|\alpha|<m-1-j}(t|\xi|)^{j-m}a_{j,\alpha}(t)\xi^\alpha,\ j=0,\cdots,m-1.$$

Согласно условию, при $0\leqslant t\leqslant T$, $\xi\neq0$, корни $\mu_k=\lambda_k(t, \xi)/|\xi|$, $k=1,\cdots,m$, уравнения

$$\mu^m + \sum_{j<m} \left(\sum_{|\alpha|=m-j} (\lambda|\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha \right) \mu^j = 0 \tag{1.16}$$

вещественные и простые. Поэтому, если мы докажем, что в (1.15) добавки B_j малы, то корни уравнения (1.15) будут аналитически зависеть от этих возмущений и, следовательно, представляться в виде рядов

$$\gamma^k(t, \xi) = \mu_k(t, \xi) + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m>0} a^k_{i_1, i_2, \ldots, i_m} B_1^{i_1} B_2^{i_2} \cdots B_m^{i_m}. \tag{1.17}$$

Действительно, так как $j \leqslant m-1$, то

$$|B_{j+1}| \leqslant |(\lambda|\xi|)^{j-m} a_{j,0}| + \left| \sum_{0<|\alpha|<m-1-j} (\lambda|\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha \right| \leqslant$$

$$\leqslant c(\lambda|\xi|)^{j-m} + c \sum \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)|\xi|} \right)^{m-j-|\alpha|} \leqslant$$

$$\leqslant c(\Lambda(t_\xi)|\xi|)^{j-m} + c \sum \left(\frac{|\ln \lambda(t_\xi)|}{\Lambda(t_\xi)|\xi|} \right)^{m-j-|\alpha|} \leqslant c \sum_{0<|\alpha|<m-1-j} N^{j+|\alpha|-m}.$$

Поэтому для любого положительного ε за счет выбора N и M получаем $\sum_{j=1}^{m} |B_j| < \varepsilon$ при всех $t \in [t_\xi, T]$, $|\xi| > M$.

Итак

$$\Delta_k(t, \xi) = \lambda(t) \lambda_k(t, \xi) + \lambda(t)|\xi| \sum_{i_1+\cdots+i_m>0} a^k_{i_1, \ldots, i_m} B_1^{i_1} \cdots B_m^{i_m}, \tag{1.18}$$

где

$$a^k_{0, \ldots, \underset{j}{1}, 0, \ldots, 0}(t, \xi) = -\frac{(j-1)!\, \mu_k^{(j-1)}(t, \xi)}{\prod_{r \neq k} (\mu_k(t, \xi) - \mu_r(t, \xi))}.$$

Следовательно

$$\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi) = \lambda(t)|\xi| \sum_{j=1}^{m} \{a^k_{0 \ldots \underset{j}{1} 0 \ldots 0}(t, \xi) \operatorname{Im} B_j + |B_j|^2 O(1)\}, \tag{1.19}$$

откуда

$$|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \leqslant \lambda(t)|\xi| \left\{ \left| \sum_{j+|\alpha|<m-2} (\lambda|\xi|)^{j-m} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \sum_{j+|\alpha|=m-1} (\lambda|\xi|)^{j-m} \operatorname{Im} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha \right| + O(1) \sum_{j=1}^{m} |B_j|^2 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{j+|\alpha|<m-2} \frac{\lambda(t) |\ln \lambda(t)|^2}{\Lambda^2(t)|\xi|} \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{|\xi| \Lambda(t)} \right)^{m-j-|\alpha|-2} + c \frac{\lambda_t}{\lambda} +$$

$$+ O(1) \lambda(t)|\xi| \sum |B_j|^2 \leqslant c \left(\frac{\lambda_t}{\lambda} + \frac{\lambda(t) |\ln \lambda(t)|^2}{\Lambda^2(t)|\xi|} \right).$$

Таким образом, для любого $k \leqslant m$ при всех $t \in [t_\xi, T]$, $|\xi| > M$ имеем

$$|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \leqslant c\left(\frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t)} + \frac{\lambda(t)\ln^2\lambda(t)}{\Lambda^2(t)|\xi|}\right). \tag{1.20}$$

Аналогично, легко убедиться в том, что при указанных t, ξ

$$|\Delta_k(t, \xi)| \leqslant c\lambda(t)|\xi|, \quad |D_t\Delta_k(t, \xi)| \leqslant c\lambda_t(t)|\xi|, \tag{1.21}$$

$$|\Delta_k(t, \xi) - \Delta_j(t, \xi)| \geqslant c\delta_{kj}\lambda(t)|\xi|. \tag{1.22}$$

Далее, пусть $N^{-1} = V(\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_m)$ есть матрица Вандермонда, диагонализирующая A, тогда при $t \in [t_\xi, T]$:

$$\|NN_t^{-1}\| \leqslant c\frac{\lambda_t}{\lambda}. \tag{1.23}$$

Вектор $V = NU$, где $U = {}^t(u, D_t u, \cdots, D_t^{m-1} u)$ удовлетворяет уравнению

$$D_t V = A_1 V + iNN_t^{-1} V + NF \text{ с } F = {}^t(0, \cdots, 0, f),$$

где $(A_1)_{kl} = \delta_{kl}\Delta_k$. Для энергии $E(t, V) = \sum_{k=1}^{m} |V_k(t, \xi)|^2$ нетрудно вывести, что

$$\left|\frac{dE}{dt}\right| \leqslant c\left(\frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t)} + \frac{\lambda(t)\ln^2\lambda(t)}{\Lambda^2(t)|\xi|}\right)E + |f(t, \xi)|^2 \tag{1.24}$$

при всех $t \in [t_\xi, T]$. Но

$$\int_{t_\xi}^{T} \frac{\lambda(\tau)\ln^2\lambda(\tau)}{\Lambda^2(\tau)}\,d\tau = -\frac{\ln^2\lambda(\tau)}{\Lambda(\tau)}\Big|_{t_\xi}^{T} + 2\int_{t_\xi}^{T} \frac{\lambda_t(\tau)\ln\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)\Lambda(\tau)}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\ln^2\lambda(t_\xi)}{\Lambda(t_\xi)} = -\frac{|\xi|}{N}\ln\lambda(t_\xi) \leqslant c\ln|\xi|,$$

поэтому с помощью леммы Гронуолла из (1.24) выводим, что для всех $s_1, s_2 \in [t_\xi, T]$, $|\xi| > M$ верно неравенство

$$E(s_1, V) \leqslant c(1 + |\xi|)^{2k}\left\{E(s_2, V) + \left|\int_{s_1}^{s_2} |f(t, \xi)|^2\,dt\right|\right\}.$$

С учетом того, что $\|N^{-1}\| < c|\xi|^{n-1}$, $\|N\| \leqslant c$, получаем оценку (1.6) для указанных s_1, s_2. Но для остальных $s_1, s_2 \in [0, T]$, $|\xi| > M$ (1.6) имеет место согласно предложению 1.

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно осуществить в (0.2), (0.3) преобразование Фурье по переменной x и воспользоваться теоремой существования и единственности задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром и уже доказанной оценкой (1.6). Существование конуса зависимости проверяется как в [16].

§ 2. Доказательство теоремы 2

Если задача (0.2), (0.3) является $C^{m,\infty}$-корректной, то с помощью теоремы о замкнутом графике устанавливается, что для любого ком-

пакта $K \subset J \times R^n$ существует постоянная C_K такая, что для любого решения (0.2), (0.3) с $f \equiv 0$

$$\sum_{j+|\alpha|<m-1} \sup_K |D_t^j D_x^\alpha u| \leqslant C_K \sum_{|\alpha|<C_K,\ l<m-1} \sup_{\Gamma_K \cap \{t=t_C\}} |D_x^\alpha \varphi_l|, \tag{2.1}$$

где Γ_K есть объединение конусов зависимости всех точек K.

В условиях теоремы 2 мы построим асимптотическое решение, для которого оценка (2.1) не может иметь места. Будем искать его в виде $u(t, \xi) \exp(ix \cdot \xi)$, где $\xi = \hat{\xi}|\xi|/|\hat{\xi}|$, $|\xi| \to \infty$, а $u(t, \xi)$ есть решение уравнения (1.5) с $f \equiv 0$.

Предварительно отметим следующее. В условиях теоремы 2 утверждение предложения 1 остается в силе для всех $\xi = \hat{\xi}|\xi|/|\hat{\xi}|$, $|\xi| > M$.

Более того, в силу „слабости" нарушения гиперболичности (по определению гиперболичность эквивалентна $C^{m,\infty}$-корректности задачи Коши), которое имеет место в условиях теоремы 2, оценка (1.6) может быть продолжена на зону $[t_\xi, t_3]$, где $t_3 = t_3(\xi)$ определяется из условия

$$|\xi| \Lambda(t_3) = N_3 \nu(t_3) \ln^2 \lambda(t_3), \tag{2.2}$$

за счет оставшейся интегральной гиперболичности

$$\int_{t_\xi}^{t_3} |\operatorname{Im} \Delta_k(\tau, \xi)| \, d\tau \leqslant c(1 + \ln(1 + |\xi|)), \quad k = 1, \cdots, m. \tag{2.3}$$

Здесь, конечно, $t_3 \geqslant t_\xi$, в чем нетрудно убедиться.

Действительно, рассуждая точно так же, как в § 1 при получении (1.15)—(1.24), в нашем случае $t \in [t_\xi, t_3]$ мы должны только принять во внимание, что слагаемые $(\lambda(t)|\xi|)^{1+j-m} \left| \sum_{|\alpha|=m-1-j} \operatorname{Im} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha \right|$, входящие в оценку $|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)|$ не превосходят $c\lambda(t)/(\Lambda(t)\nu(t))$, что приводит вместо (1.20) к оценке

$$|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \leqslant c\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)\nu(t)} + \frac{\lambda(t)\ln^2\lambda(t)}{\Lambda^2(t)|\xi|}\right), \quad t_\xi \leqslant t \leqslant t_3. \tag{2.4}$$

Но при этих t очевидно, что

$$\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)\nu(t)} \leqslant N_3 \frac{\lambda(t)\ln^2\lambda(t)}{\Lambda^2(t)|\xi|}, \quad t_\xi \leqslant t \leqslant t_3. \tag{2.5}$$

Поэтому, осуществляя преобразования § 1 вместо (1.24) получаем

$$\left|\frac{dE}{dt}\right| \leqslant c\left(1 + \frac{\lambda \ln^2 \lambda}{\Lambda^2 |\xi|}\right) E + |f|^2, \quad t_\xi \leqslant t \leqslant t_3. \tag{2.6}$$

Из (2.3) и (2.6) уже нетрудно получить (1.6) в зоне $[t_\xi, t_3]$.

Рассмотрим теперь зону $[t_3, T]$. Рассуждения § 1 относительно поведения корней $\{\Delta_k\}_1^m$ в зоне $[t_\xi, T]$ и, в частности, разложения (1.18), (1.19), оценки (1.21)—(1.23), сохраняют свою силу, исключая только (1.20), (2.4). Покажем, что тем не менее существует зона $[t_4, T]$, в

которой старший символ доминирует, и, как будет доказано ниже, оценка (1.6) имеет место. Действительно, пусть t_4 есть решение уравнения

$$-N_4 \ln \lambda(t_4) = \nu(t_4) \ln |\xi|.$$

Ясно, что $t_4 > t_3$. Далее, в зоне $[t_4, T]$, $|\xi| > M$, имеет место (2.4). С другой стороны, при $t \geqslant t_3$

$$\frac{\lambda(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda^2(t)|\xi|} : \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)\nu(t)} = \frac{1}{N_3},$$

так что

$$|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \leqslant c \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)\nu(t)}, \quad k=1, \cdots, m. \tag{2.7}$$

Вернемся в зону $[t_3, T]$. Исследуем функции $\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)$. Для этого перепишем (1.19) в следующем виде:

$$\frac{\Lambda(t)\nu(t)}{\lambda(t)} \operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi) \prod_{r \neq k} (\mu_k(t, \xi) - \mu_r(t, \xi)) =$$

$$= -\sum_{j=0}^{m-2} j! \, \mu_k^j(t, \xi) \, b_j(t) - \frac{(m-1)! \, \Lambda(t)\nu(t)}{\lambda(t)} \mu_k^{m-1}(t, \xi) \operatorname{Im} a_{m-1,0}(t) -$$

$$- \frac{\Lambda(t)\nu(t)}{\lambda(t)} \sum_{j=1}^{m} j! \, \mu_k^j(t, \xi) \Big[\sum_{|\alpha| \leqslant m-j-1} (\lambda(t)|\xi|)^{j-m} \operatorname{Im} a_{j-1,\alpha}(t) \xi^\alpha +$$

$$+ \lambda(t) |\xi| \, O(1) \, |B_j^\alpha| \Big], \quad k=1, \cdots, m.$$

Очевидно, что с некоторыми постоянными δ_1, δ_2, $0 < \delta_1 \leqslant \det \|(j-1)! \, \mu_k^{j-1}(t, \xi)\|_{k, j-1}^m \leqslant \delta_2$. С другой стороны,

$$\frac{\Lambda(t)\nu(t)}{\lambda(t)} (\lambda(t)|\xi|)^{j+1-m} \Big| \sum_{|\alpha| \leqslant m-j-2} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha \Big| \leqslant c \frac{\nu(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda(t)|\xi|} \leqslant \frac{c}{N_3},$$

$$\frac{\Lambda(t)\nu(t)}{\lambda(t)} (\lambda(t)|\xi|)^{1+2j-2m} \Big| \sum_{|\alpha| \leqslant m-j-1} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha \Big| \leqslant c \frac{\nu(t) \ln^2 \lambda(t)}{\Lambda(t)|\xi|} \leqslant \frac{c}{N_3}.$$

Пронумеруем теперь корни Δ_k так, чтобы числа $Z_k = -\sum_{j=0}^{m-2} j! \, \mu_k^j(0, \xi) b_j(0)$ разбились на две группы: $\{Z_k\}_1^r$ и $\{Z_k\}_{r+1}^m$, где $Z_k = 0$ при $k \leqslant r$, и $Z_k \neq 0$ при $k \geqslant r+1$. Из (0.18) следует, что вторая группа непуста, т. е. $r \leqslant m-1$. Тогда с некоторой постоянной $\delta > 0$ при достаточно малых t и достаточно больших N_3

$$|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \geqslant \delta \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)\nu(t)}, \quad t \geqslant t_3, \quad k=r+1, \cdots, m$$

и

$$|\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| \leqslant o(1) \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)\nu(t)}, \quad t \geqslant t_3, \quad k=1, \cdots, r.$$

Обозначим $\sigma_k = \operatorname{sign} \operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)$, $k = r+1, \cdots, m$. Согласно теореме Виета $\left|\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)\right| = |\operatorname{Im} a_{m-1,0}(t)| < \text{const}$, а с другой стороны $\sum_{k=1}^{m} |\operatorname{Im} \Delta_k(t, \xi)| > (m-r)\, \delta\lambda(t)/(\Lambda(t)\, \nu(t))$. Следовательно, среди σ_k есть разные, и, не ограничивая общности можно предположить что, $\sigma_m = -1$, $\sigma_{m-1} = +1$.

Осуществим как и в § 1 замену $V = NU$, где $N^{-1} = V(\Delta_1, \Delta_2, \cdots \cdots, \Delta_m)$ и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D_t V = A_1 V + iNN_t^{-1} V \tag{2.8}$$

с параметром ξ рассмотрим при $t \geqslant t_3$ вспомогательную задачу Коши с данными на поверхности $t = t_3$:

$$V_1(t_3, \xi) = V_2(t_3, \xi) = \cdots = V_{m-1}(t_3, \xi) = 0, \quad V_m(t_3, \xi) = 1. \tag{2.9}$$

Для её решения V введем форму $S(t, \xi) = -\sum_{k=r+1}^{m} \sigma_k |V_k(t, \xi)|^2 - \sum_{k=1}^{r} |V_k(t, \xi)|^2$. Обозначив $(NN_t^{-1})_{kl}$ через n_{kl} для этой формы легко получаем, что

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{k=r+1}^{m} 2\sigma\ (\operatorname{Im} \Delta_k)\, |V_k|^2 + \sum_{k=1}^{r} 2\, (\operatorname{Im} \Delta_k)\, |V_k|^2 +$$

$$+ \sum_{k=r+1}^{m} \sum_{l=1}^{m} 2\sigma_k \operatorname{Re}(\overline{V}_k\, n_{kl}\, V_l) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{m} 2 \operatorname{Re}(\overline{V}_k\, n_{kl}\, V_l). \tag{2.10}$$

В силу неравенства $|n_{kl}| \leqslant c\lambda_t(t)/\lambda(t)$, $t \geqslant t_3$, отсюда следует, что

$$\frac{dS}{dt} \geqslant c\, \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)\, \nu(t)} \|V\|^2 \geqslant \alpha\, \frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t)\, \nu(t)}\, S(t, \xi), \quad t > t_3, \tag{2.11}$$

с постоянной $\alpha > 0$. Так как $S(t_3, \xi) = 1$ из (2.11) выводим, что

$$S(t, \xi) > S(t_3, \xi) \exp\left(\alpha \int_{t_3}^{t} \frac{\lambda_t(\tau)}{\lambda(\tau)\, \nu(\tau)}\, d\tau\right) >$$

$$\geqslant \exp\left(k\, \frac{\ln \lambda}{\nu}\Big|_{t_3}^{t}\right) = \exp\left(k\, \frac{\ln \lambda(t)}{\nu(t)}\right) \exp\left(-k\, \frac{\ln \lambda(t_3)}{\nu(t_3)}\right)$$

с постоянной $k > 0$. Но при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем $\nu\lambda^{2-\varepsilon} \ln^2 \lambda \leqslant \Lambda$, откуда

$$-\ln \lambda > \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\nu \ln^2 \lambda}{\Lambda}\right), \quad \alpha > 0,$$

и, следовательно

$$S(t, \xi) > \exp\left(k\, \frac{\ln \lambda(t)}{\nu(t)}\right) \exp\left(\frac{k}{\alpha}\, \frac{1}{\nu(t_3)} \ln \frac{\nu(t_3) \ln^2 \lambda(t_3)}{\Lambda(t_3)}\right) =$$

$$= \exp\left(k\, \frac{\ln \lambda(t)}{\nu(t)}\right) \exp\left(\frac{k}{|\alpha|}\, \frac{1}{\nu(t_3)} \ln \frac{|\xi|}{N_0}\right) = [\lambda(t)]^{\frac{k}{\nu(t)}} \left(\frac{|\xi|}{N_3}\right)^{\frac{k}{\alpha} \frac{1}{\nu(t_3)}}, \quad t > t_3. \tag{2.12}$$

С другой стороны

$$S(t, \xi) \leqslant E(t, V(t, \xi)) \leqslant cE(t, u(t, \xi)).$$

Итак, существуют положительные постоянные c, δ, γ, M такие, что для решения $u(t, \xi)$ задачи Коши с данными, соответствующими (2.9), для всех $\xi = \widehat{\xi}|\xi|/|\widehat{\xi}|$, $|\xi| > M$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=0}^{m-1} |D_t^i u(t, \xi)|^2 \geqslant c\,[\lambda(t)]^{\frac{\delta}{\nu(t)}} (1 + |\xi|)^{\frac{\gamma}{\nu(t_3)}}, \quad t \geqslant t_3. \tag{2.13}$$

Учитывая также и оценку в зоне $[0, t_3]$ приходим к выводу, что для $u(t, \xi) \exp(ix \cdot \xi)$ при достаточно большом $|\xi|$ оценка (2.1) с $t_C = 0$ не имеет места. Итак, для $t_C = 0$ теорема доказана.

Рассмотрим случай $t_C = T$. Для этого осуществим преобразование, приводящее нас к системе уравнений (2.8), и для энергии $E(t, \xi) = \sum_{k=1}^{m} |V_k(t, \xi)|^2$ стандартным образом выведем неравенство

$$\left|\frac{dE(t, \xi)}{dt}\right| \leqslant c\,\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)\,\nu(t)}\,E(t, \xi) + |f(t, \xi)|^2, \quad t \geqslant t_4. \tag{2.14}$$

Но

$$\int_{t_4}^{T} \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)\,\nu(t)}\,dt \leqslant -c\,\frac{\ln \lambda(t_4)}{\nu(t_4)} \leqslant \frac{c}{N_4} \ln |\xi|.$$

Таким образом, (1.6) имеет место и для всех $s_1, s_2 \in [t_4, T]$, $|\xi| > \bar{M}$.

Итак, „разрушение" решения как в случае $t_C = 0$, так и в случае $t_C = T$ происходит в зоне $[t_3, t_4]$.

Рассмотрим для системы (2.8) задачу Коши с данными на поверхности $t = t_4$:

$$V_1(t_4, \xi) = \cdots = V_{m-2}(t_4, \xi) = V_m(t_4, \xi) = 0, \quad V_{m-1}(t_4, \xi) = 1, \tag{2.15}$$

и для ее решения введем форму

$$S_1 = -S = \sum_{k=r+1}^{m} \sigma_k |V_k(t, \xi)|^2 + \sum_{k=1}^{r} |V_k(t, \xi)|^2.$$

Вспомним, что $\operatorname{sign} \operatorname{Im} \Delta_{m-1} = 1$. Тогда

$$\frac{dS_1}{dt} \leqslant -\alpha\,\frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t)\,\nu(t)}\,S_1, \quad t_3 \leqslant t \leqslant t_4,$$

и так как $S_1(t_4, \xi) = 1$, отсюда получаем

$$S_1(t_3, \xi) \geqslant \exp\left(\alpha \int_{t_3}^{t_4} \frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t)\,\nu(t)}\,dt\right) \geqslant$$

$$\geqslant [\lambda(t_4)]^{\frac{\alpha}{\nu(t_4)}} \left(\frac{|\xi|}{N_3}\right)^{\frac{k}{\alpha}\frac{1}{\nu(t_3)}} \geqslant \delta\,|\xi|^{-\frac{\alpha}{N_4} + \frac{k}{\alpha}\frac{1}{\nu(t_3)}}, \quad \delta > 0. \tag{216.}$$

Дальнейшие рассуждения ничем не отличаются от проведенных для случая $t_C = 0$. Теорема доказана.

Следствие из теоремы 2. Пусть выполнены (0.12) и условия на главный символ, фигурирующие в теореме 1. Тогда условие (0.13) эквивалентно условию гиперболичности (1.1), которое, в свою очередь, эквивалентно $C^{m,\infty}$-корректности задачи Коши (0.2), (0.3).

Что касается условий (0.12), то, на наш взгляд, они, вообще говоря, являются необходимыми условиями *локальной разрешимости* (0.2) в окрестности точки $t=0$, $x=0$.

Замечание. Как видно из доказательства, можно несколько усилить теорему 2, отказавшись от условия непрерывности в точке $t=0$ функций $b_0, \cdots, b_{m-2}$, и заменив его условием на функции

$$Z_k(t) = -\sum_{j=0}^{m-2} j!\, \lambda_k^j(t, \hat{\xi})\, b_j(t), \quad k=1, \cdots, m.$$

Потребуем, чтобы для каждого k либо $\lim\limits_{t\to 0} Z_k(t) = 0$, либо с некоторой постоянной δ $0 < \delta < |Z_k(t)| < \delta^{-1}$ при всех $t \in J^0$. Тогда если среди $Z_k(t)$ есть отрицательная, то задача (0.2), (0.3) с $t_C = 0$ не является $C^{m,\infty}$-корректной. Если же есть положительная функция, то задача (0.2), (0.3) с $t_C = T$ не является $C^{m,\infty}$-корректной.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Как и в § 2 мы построим решение, для которого (2.1) не выполнено. Пусть снова $u(t, \xi)$ есть решение (1.5) с $f \equiv 0$, $\xi = \hat{\xi}|\xi|/|\hat{\xi}|$. Исследуем поведение по (t, ξ) его энергии. Несколько отходя от обозначений § 1 обозначим через t_1 следующий минимум:

$$t_1 = t_1(\xi) = \min \{a, b\, |\xi|^{m-\hat{k}-\hat{j}} \lambda^{m-\hat{j}-1}(a)\, |\ln \lambda(a)|^{\hat{k}-1} = N_1 \nu(a) \Lambda^{\hat{k}-1}(a),$$
$$|\xi|\, \lambda^{m-1}(b)\, |\ln \lambda(b)|^{m-2} = N_1 \Lambda^{m-2}(b)\} \tag{3.1}$$

и рассмотрим зону $[0, t_1]$. Вспомним доказательства оценок (1.7), (1.8). Совершенно аналогично получаем

$$\int_0^t \left| \sum_{|\alpha|=m-j-k} a_{j,\alpha}(\tau)\, \xi^\alpha \right| d\tau \leqslant -c \ln \lambda(t_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad (j, k) \neq (\hat{j}, \hat{k}), \tag{3.2}$$

для всех $|\xi| > M$, $k=0, \cdots, m$. Поэтому остается только заметить, что

$$\int_0^t \left| \sum_{|\alpha|=m-\hat{j}-\hat{k}} a_{\hat{j},\alpha}(\tau)\, \xi^\alpha \right| d\tau \leqslant -c \ln \lambda(t_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{3.3}$$

Из условий теоремы выводим, что $-\ln \lambda(t_1) \leqslant c \ln |\xi|$. Оценивая $\left|\dfrac{dE(t, u)}{dt}\right|$ и применяя лемму Гронуолла получаем (1.6) для всех $s_1, s_2 \in [0, t_1]$, $|\xi| > M$.

Покажем, что оценка (1.6) может быть продолжена на зону $[t_1, t_2]$, где t_2 есть решение уравнения

$$|\xi|\,\Lambda(t_2) = -N_2\,\nu^{\frac{1}{m-\hat{k}-\hat{j}}}(t_2)\ln\lambda(t_2), \tag{3.4}$$

Нетрудно проверить, что $t_2 > t_1$. Обозначим через $\rho_1 = \rho_1(t, \xi)$, $\rho = \rho(t, \xi)$ положительные корни

$$\rho = \sqrt[m]{|\xi|\,\lambda^m(t)\left(\frac{|\ln\lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{m-1}},\quad \rho_1 = \sqrt[m-\hat{j}]{|\xi|^{m-\hat{k}-\hat{j}}\,\lambda^{m-\hat{j}}(t)\left(\frac{|\ln\lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{\hat{k}}\frac{|b(t)|}{\nu(t)}}$$

и воспользуемся диагональной матрицей N, $(N)_{kl} = \delta_{kl}(\rho+\rho_1)^{-k+1}$ для перехода к новой неизвестной вектор-функции $V = NU$, где $U = {}^t(u, D_t u, \cdots, D_t^{m-1}u)$. Запишем уравнение (1.5) в виде системы первого порядка ($f \equiv 0$): $D_t U = AU$. Тогда $D_t V = BV + iNN_t^{-1}V$, где $B = NAN^{-1}$, и как нетрудно убедиться, $\|NN_t^{-1}\| \leqslant c\lambda_t/\lambda$. Ясно, что $B_{ml} = (\rho+\rho_1)^{l-m}A_{ml}$, поэтому, как и при выводе (1.13) в доказательстве теоремы 1 $\|B(t, \xi)\| \leqslant$ $\leqslant c(\rho_1(t, \xi) + \rho(t, \xi))$. С другой стороны

$$\int_{t_1}^{t_2}(\rho(\tau, \xi) + \rho_1(\tau, \xi))\,d\tau \leqslant c\ln|\xi|. \tag{3.5}$$

Поэтому для энергии $E(t, V) = \sum_{k=1}^{m}|V_k(t, \xi)|^2$ теперь уже нетрудно получить оценку $E(s_1, V) < c(1+|\xi|)^{2k}E(s_2, V)$ для всех $s_1, s_2 \in [t_1, t_2]$. Учитывая еще и очевидные оценки $\|N^{-1}\| \leqslant c|\xi|$, $\|N\| \leqslant c$ получаем неравенство (1.6) ($f \equiv 0$) в зоне $[t_1, t_2]$.

Рассмотрим теперь зону $[t_2, t_3]$, где t_3 определена в § 1. Здесь доминирует коэффициент, для которого условие корректности нарушено. Действительно, так как $m(m-j-k) - m + j \geqslant 0$, то для любого положительного ε при достаточно малом T

$$\frac{\rho^{m(m-\hat{j})}}{\rho_1^{m(m-\hat{j})}} \leqslant c\left(\frac{|\ln\lambda(t)|\,\nu^{\frac{1}{m-\hat{k}-\hat{j}}}(t)}{|\xi|\,\Lambda(t)}\right)^{m(m-\hat{j}-\hat{k})-m+\hat{j}}\nu^{\frac{m-\hat{j}}{m-\hat{k}-\hat{j}}}(t) \leqslant$$

$$< c\left(\frac{|\ln\lambda(t_2)|\,\nu^{\frac{1}{m-\hat{k}-\hat{j}}}(t_2)}{|\xi|\,\Lambda(t_2)}\right)^{m(m-\hat{j}-\hat{k})-m+\hat{j}}\nu^{\frac{m-\hat{j}}{m-\hat{k}-\hat{j}}}(t_2) \leqslant \varepsilon.$$

Итак, будем считать его главной частью оператора и строить диагонализатор. Обозначим через $\Delta_k = \Delta_k(t, \xi)$, $k = 1, \cdots, m-\hat{j}$, решения уравнения

$$\Delta^{m-\hat{j}} + B(t, \xi) = 0, \tag{3.6}$$

где

$$B(t, \xi) = |\xi|^{m-\hat{k}-\hat{j}}\lambda^{m-\hat{j}}(t)\left(\frac{|\ln\lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{\hat{k}}\frac{b(t)}{\nu(t)} = -\rho_1^{m-\hat{j}}e^{i\varphi}.$$

Тогда $\Delta_k = \rho_1 e^{i\varphi_k}$, $\varphi_k = \arg \Delta_k$, $k=1, \cdots, m-\hat{j}$. Запишем уравнение в виде системы первого порядка $D_t U = AU$ и построим частичный диагонализатор матрицы A:

$$N_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & \\ & (1+\rho) & & & \\ & & \cdot & & 0 \\ & & \cdot & & \\ 0 & & (1+\rho)^{\hat{j}-1} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & & (1+\rho)^{\hat{j}} & V(\Delta_1, \cdots, \Delta_{m-\hat{j}}) \end{bmatrix},$$

где $V(\Delta_1, \cdots, \Delta_{m-\hat{j}})$ — матрица Вандермонда системы $\{\Delta_l\}_1^{m-\hat{j}}$. Нетрудно проверить, что матрица $N_1 A N_1^{-1}$ представима в виде $B_1 + B_2$, где B_1 — диагональная матрица с элементами $(B_1)_{kk} = 0$, если $k \leqslant \hat{j}$, и $(B_1)_{kk} = \Delta_{k-\hat{j}}$, если $k > \hat{j}$, а матрица B_2 такова, что $\|B_2(t, \xi)\| \leqslant c(1 + \rho(t, \xi))$ при всех $t \in [t_2, \xi]$, $|\xi| > M$. Действительно

$$\rho_1^{m-\hat{k}-\hat{j}}(t_2) > N_2 |b(t_2)| \left| \frac{\lambda(t_2) \ln \lambda(t_2)}{\Lambda(t_2)} \right|^{m-\hat{j}},$$

и с другой стороны, если $(j, k) \neq (\hat{j}, \hat{k})$, $j \leqslant \hat{j}$, $m-j-k > 0$, то

$$\left| \sum_{|\alpha|=m-j-k} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha \right| (1+\rho)^{j-\hat{j}} \rho_1^{-m+\hat{j}+1} \leqslant$$

$$\leqslant c \left| \sum_{|\alpha|=m-j-k} a_{j,\alpha}(t) \xi^\alpha \right| (1+\rho)^{j-m+1} \leqslant c \cdot \mathrm{V}^{m-k-j-\frac{m-j}{m}} (1+\rho(t, \xi)).$$

Если же $(j, k) \neq (\hat{j}, \hat{k})$, $m-j-k=0$, то $|a_{j,0}(t)| (1+\rho)^{j-\hat{j}} \rho_1^{\hat{j}-m+1} \leqslant c(1+\rho)$.

Итак, после частично диагонализирующей замены $V = N_1 U$ получаем систему

$$D_t V = B_1 V + B_2 V + i N_1 N_{1t}^{-1} V, \tag{3.7}$$

для которой рассмотрим задачу Коши с данными на границе $t = t_2$ зоны „микрокорректности“:

$$V_l(t_2, \xi) = \delta_{lm}, \quad l=1, \cdots, m. \tag{3.8}$$

Введем обозначение $\sigma_l = -\operatorname{sign} \operatorname{Im} \Delta_l$, $l = r+1, \cdots, m-\hat{j}$, и для решения задачи (3.7), (3.8) рассмотрим форму

$$S(t, \xi) = -\sum_{l=1}^{\hat{j}+r} |V_l|^2 + \sum_{l=\hat{j}+r+1}^{m} \sigma_{l-\hat{j}} |V_l|^2. \tag{3.9}$$

Тогда

$$\frac{dS}{dt}=2\sum_{l=1}^{\widehat{j}+r}\operatorname{Im}(\overline{V}_l D_l V_l)-2\sum_{l=\widehat{j}+r+1}^{m}\sigma_{l-\widehat{j}}\operatorname{Im}(\overline{V}_l D_l V_l). \tag{3.10}$$

Но

$$2\sum_{l=1}^{\widehat{j}+r}\operatorname{Im}(\overline{V}_l D_l V_l)\geqslant 2\sum_{l=\widehat{j}+1}^{\widehat{j}+r}(\operatorname{Im}\Delta_{l-\widehat{j}})|V_l|^2-c\left(1+\rho+\frac{\lambda_t}{\lambda}\right)\sum_{l=1}^{m}|V_l|^2 \tag{3.11}$$

(при $r=0$ первое слагаемое справа в (3.11) отсутствует), и

$$-2\sum_{l=\widehat{j}+r+1}^{m}\sigma_{l-\widehat{j}}\operatorname{Im}(\overline{V}_l D_l V_l)\geqslant 2\sum_{l=\widehat{j}+r+1}^{m}|\operatorname{Im}\Delta_{l-\widehat{j}}|\,|V_l|^2-$$

$$-c\left(1+\rho+\frac{\lambda_t}{\lambda}\right)\sum_{l=1}^{m}|V_l|^2.$$

Следовательно

$$\frac{dS}{dt}\geqslant 2\rho_1(\min_{r+1<l<m-\widehat{j}}|\operatorname{Im}Z_l(t)|)\sum_{l=\widehat{j}+r+1}^{m}|V_l|^2+2\rho_1(\min_{1<l<r}\operatorname{Im}Z_l(t))\sum_{l=\widehat{j}+1}^{\widehat{j}+r}|V_l|^2-$$

$$-c\left(1+\rho+\frac{\lambda_t}{\lambda}\right)\sum_{l=1}^{m}|V_l|^2>2\rho_1(\min_{r+1<l<m-\widehat{j}}|\operatorname{Im}Z_l(t)|)\left\{\sum_{l=\widehat{j}+r+1}^{m}|V_l|^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1+\delta_1}\sum_{l=\widehat{j}+1}^{\widehat{j}+r}|V_l|^2\right\}-c\left(1+\rho+\frac{\lambda_t}{\lambda}\right)\sum_{l=1}^{m}|V_l|^2. \tag{3.12}$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon>0$ при $t\geqslant t_2$

$$\left(\frac{\lambda_t(t)}{\lambda(t)\rho_1(t,\xi)}\right)^{m-\widehat{j}}\leqslant c\left(\frac{\nu^{\frac{1}{m-\widehat{k}-\widehat{j}}}(t_2)|\ln\lambda(t_2)|}{\Lambda(t_2)|\xi|}\right)^{m-\widehat{k}-\widehat{j}}\frac{1}{|\ln\lambda(t)|^{m-\widehat{j}}}\leqslant\varepsilon N_2^{\widehat{k}+\widehat{j}-m}.$$

Поэтому из (3.12) получаем, что с постоянной $\alpha=\delta(2+\delta_1)/(1+\delta_1)$

$$\frac{dS(t,\xi)}{dt}>\alpha\rho_1(t,\xi)S(t,\xi),\quad t\in[t_2,t_\xi]. \tag{3.13}$$

Так как $S(t_2,\xi)=1$ из (3.13) следует, что

$$S(t_\xi,\xi)>\exp\left(\alpha\int_{t_2}^{t_\xi}\rho_1(\tau,\xi)\,d\tau\right). \tag{3.14}$$

Но

$$\int_{t_2}^{t_\xi}\lambda(t)\Lambda^{-\frac{\widehat{k}}{m-\widehat{j}}}(t)\left\{\frac{|\ln\lambda(t)|^{\widehat{k}}}{\nu(\lambda)}-\right\}^{\frac{1}{m-\widehat{j}}}dt\geqslant\frac{m-\widehat{j}}{m-\widehat{j}-\widehat{k}}\times$$

$$\times\left(\Lambda^{\frac{m-\widehat{J}-\widehat{k}}{m-\widehat{J}}}(t)\left\{\frac{|\ln\lambda(t)|^{\widehat{k}}}{\nu(t)}\right\}^{\frac{1}{m-\widehat{J}}}\right)\Bigg|_{t_2}^{t_\xi}.$$

Далее

$$\frac{|\xi|^{m-\widehat{k}-\widehat{J}}\ \Lambda^{m-\widehat{k}-\widehat{J}}(t_2)\,|\ln\lambda(t_2)|^{\widehat{k}}}{\nu(t_2)}=N_2^{m-\widehat{k}-\widehat{J}}\,|\ln\lambda(t_2)|^{m-\widehat{J}},$$

$$\frac{|\xi|^{m-\widehat{k}-\widehat{J}}\ \Lambda^{m-\widehat{k}-\widehat{J}}(t_\xi)\,|\ln\lambda(t_\xi)|^{\widehat{k}}}{\nu(t_\xi)}=\frac{N^{m-\widehat{k}-\widehat{J}}}{\nu(t_\xi)}\,|\ln\lambda(t_\xi)|^{m-\widehat{J}}.$$

Поэтому с некоторыми положительными постоянными α, c

$$S(t_\xi,\ \xi)\geqslant[\lambda(t_\xi)]^{-\frac{\alpha}{\nu^{\frac{1}{m-\widehat{J}}}(t_\xi)}}\lambda^{c}(t_2). \tag{3.15}$$

Из условий теоремы нетрудно вывести, что $\lambda^{R}(t_\xi)\,N\,|\ln\lambda(t_\xi)|\leqslant\Lambda(t_\xi)$ с постоянной $R>0$, а следовательно $\lambda^{-R}(t_\xi)\geqslant|\xi|$. С другой стороны, $\lambda(t_2)\geqslant\lambda(t_1)\geqslant|\xi|^{-\beta}$, $\beta>0$, поэтому с постоянной $\gamma>0$

$$S(t_\xi,\ \xi)\geqslant|\xi|^{-\frac{\beta}{c}+2\gamma\nu^{\frac{1}{\widehat{J}-m}}(t_\xi)}\geqslant|\xi|^{\gamma\nu^{\frac{1}{\widehat{J}-m}}(t_\xi)}. \tag{3.16}$$

Принимая во внимание, что $\|N_1(t,\ \xi)\|\leqslant\mathrm{const}$, получаем, что $S(t_\xi,\ \xi)\leqslant\leqslant cE(t_\xi,\ u(t_\xi,\ \xi))$. Таким образом

$$E(t_\xi,\ u(t_\xi,\ \xi))\geqslant c\,|\xi|^{\gamma\nu^{\frac{1}{\widehat{J}-m}}(t_\xi)},\quad c>0. \tag{3.17}$$

Вместе с оценкой (1.6) ($f=0$) в зоне $[0,\ t_2]$ неравенство (3.17) при достаточно больших $|\xi|$ противоречит (2.1). Этим завершается доказательство теоремы.

§ 4. Обобщения. Примеры

Предложенный выше метод доказательств позволяет исследовать более общие гиперболические операторы с кратными характеристиками. Опишем некоторые типичные ситуации.

1°. *Разные скорости слипания.*

Теорема 4. *Предположим, что характеристические корни представимы в виде*

$$\tau_i(t,\ \xi)=\lambda_i(t)\,\lambda_i(t,\ \xi),\ i=1,\cdots,m,$$

где $\lambda_i(t)\in C^1(\mathrm{J})$, $\lambda_i(0)=\lambda_i'(0)=0$, $\lambda_i(t)>0$, $t>0$, *и с некоторой постоянной* $c_1>(m-1)/m$ *для всех* $i=1,\cdots,m$, $k=1,\cdots,m-1$,

$$c_1 \frac{\lambda_l(t)}{\Lambda_l(t)} \leqslant \frac{\lambda_l'(t)}{\lambda_l(t)} \leqslant \frac{\lambda_l(t)}{\Lambda_l(t)}, \quad \Lambda_l(t) = \int_0^t \lambda_l(s)\,ds, \quad t \in J^0, \tag{4.1}$$

$$\frac{\lambda_k'(t)}{\lambda_k(t)} \leqslant \frac{\lambda_{k+1}'(t)}{\lambda_{k+1}(t)}, \quad \lambda_{k+1}'(t) \leqslant \text{const}\ \lambda_k'(t), \quad t \in J^0. \tag{4.2}$$

При $\lim\limits_{t\to 0} \lambda_{k+1}(t)/\lambda_k(t) \neq 0$ *мы без ограничения общности будем считать, что* $\lambda_{k+1}(t) \equiv \lambda_k(t)$. *Пусть, далее,*

$$\lambda_i(t, \xi) \neq \lambda_j(t, \xi), \quad i \neq j, \tag{4.3}$$

при всех $t \in J$, $\xi \in R^n \setminus 0$ *если* $\lambda_i(t) \not\equiv \lambda_j(t)$, *а для всех* $l = 1, \cdots, m-1$, $r = 1, \cdots, l-1$, $j = 1, \cdots, l-r$, *при всех* $t \in J^0$ *выполнены условия*

$$\lambda_l(t)\left(\prod_{l=r}^{l} \lambda_l(t)\right)\left(\prod_{k=r+j}^{l} \frac{|\ln \lambda_k(t)|}{\Lambda_k(t)}\right) < \text{const}\ \lambda_r^{l-r+2}(t)\left(\frac{|\ln \lambda_r(t)|}{\Lambda_r(t)}\right)^{l-r+1-j}. \tag{4.4}$$

Тогда достаточными для корректности задачи Коши (0.2), (0.3) *в смысле теоремы* 1 *являются следующие условия:*

$$|D_t^k a_{j,\alpha}(t)| \leqslant c\lambda_{m-j-1}(t)\left(\prod_{i=1}^{m-j-1} \lambda_i(t)\right)\left(\prod_{l=|\alpha|}^{m-j-1} \frac{|\ln \lambda_l(t)|}{\Lambda_l(t)}\right)\left(\frac{\lambda_{m-j-1}(t)}{\Lambda_{m-j-1}(t)}\right)^k, \tag{4.5}$$

$$|D_t^k \operatorname{Im} a_{m-1-|\alpha|,\alpha}(t)| \leqslant c\left(\prod_{l=1}^{|\alpha|} \lambda_l(t)\right)\left(\frac{\lambda_{|\alpha|}(t)}{\Lambda_{|\alpha|}(t)}\right)^{k+1}, \quad k = 0, 1. \tag{4.6}$$

2°. *Интегральные условия.* Можно несколько усилить теоремы 1—4, придав условиям на символ оператора интегральный вид. Сделаем это, например, в случае, соответствующем описанному теоремой 1.

Теорема 5. *Пусть функция* $\lambda(t)$ *удовлетворяет условиям* (0.10), *а точки* $t_1(\xi)$, t_2 *определены выше в* (1.3) *и* (1.4), *соответственно. Предположим, что с некоторыми постоянными* N, N_1, M, c *для всех* j, α, *и всех* $|\xi| > M$

$$\int_0^{t_1(\xi)} |a_{j,\alpha}(t)|\,dt \leqslant c\,|\xi|^{-|\alpha|} \ln |\xi|, \tag{4.7}$$

$$\int_{t_1(\xi)}^{t_2} \lambda^{j+1-m}(t)\left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{\frac{(m-1)(j+1-m)}{m}} |a_{j,\alpha}(t)|\,dt \leqslant c\,|\xi|^{\frac{m-1-j-m|\alpha|}{m}} \ln |\xi|, \tag{4.8}$$

а корни $\{\tilde{\Delta}_k(t, \xi)\}_1^m$ *уравнения*

$$\tilde{\Delta}^m + \sum_{m-1 \leqslant j+|\alpha| \leqslant m,\ j < m} \tilde{\Delta}^j \operatorname{Re} a_{j,\alpha}(t)\,\xi^\alpha = 0 \tag{4.9}$$

вещественны при $t \geqslant t_\xi$, $|\xi| > M$. *Обозначим через* $N^{-1}(t, \xi)$ *матрицу Вандермонда* $V(\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \cdots, \tilde{\Delta}_m)$, *а через* $\tilde{A}(t, \xi)$—*матрицу с элементами*

$$\tilde{A}_{jk}(t, \xi) = \delta_{mj}\left(\sum_{|\alpha| < m-k-1} a_{k-1, \alpha}(t)\xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = m-k} \operatorname{Im} a_{k-1, \alpha}(t)\xi^\alpha\right).$$

Тогда, если при $|\xi| \geqslant M$

$$\int_{t_\xi}^{T} \|N(t, \xi)\ \tilde{A}(t, \xi)\ N^{-1}(t, \xi)\| + \|N(t, \xi)\ N_t^{-1}(t, \xi)\|\ dt \leqslant c \ln |\xi|, \tag{4.10}$$

и

$$\|N(t, \xi)\| + \|N^{-1}(t, \xi)\| \leqslant c\,|\xi|^c,\ t \geqslant t_\xi, \tag{4.11}$$

то справедливо утверждение теоремы 1.

Аналогичным образом можно сформулировать теоремы, обобщающие теоремы 2, 3, 4.

3°. *Факторизация оператора.* Пусть $a_{j,\alpha} \in C^\infty(J)$. Если только часть характеристических корней оператора P представима в виде

$$\tau_i(t, \xi) = \lambda(t)\ \lambda_i(t, \xi),\ i = 1, \cdots, r,\ r < m,$$

и при всех $t \in J$, $\xi \neq 0$

$$\tau_i(t, \xi) \neq \tau_j(t, \xi),\ i = 1, \cdots, m,\ j = r+1, \cdots, m\ i \neq j,$$

то оператор P допускает факторизацию

$$P(t, D_t, D_x) = P_1(t, D_t, D_x)\ P_2(t, D_t, D_x) + \sum_{j=0}^{m-1} R_j(t, x, D_x) D_t^j, \tag{4.12}$$

где P_1, P_2—п. д. операторы по x, дифференциальные по t, $\operatorname{ord} P_1 = r$, $\operatorname{ord} P_2 = m-r$, $\operatorname{ord} R_j = -\infty$ и P_2—строго гиперболический. При этом условия на полный символ оператора P достаточные или необходимые (в смысле теорем 1—5) для $C^{m,\infty}$-корректности задачи Коши выполняются одновременно с соответствующими условиями на полный символ оператора P_1. Последние имеют либо вид (0.12), (0.13), либо (0.16), (0.19), либо (0.20), (0.22), либо (4.7)—(4.11). Вычисления в ситуации, соответствующей теореме 1, приводят к следующим условиям:

$$|D_t^k a_{j,\alpha}(t)| \leqslant c\lambda^{r-j}(t)\left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{m-j-|\alpha|}\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k,\ k = 0, 1, \tag{4.13}$$

$$|D_t^k \operatorname{Im} a_{m-1-|\alpha|,\alpha}(t)| \leqslant c\lambda^{|\alpha|+r-m}(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{1+k},\ k = 0, 1, \tag{4.14}$$

$|\alpha| \geqslant m-r$, которые являются достаточными в смысле теоремы 1 для корректности задачи Коши (0.2), (0.3). Аналогичные обобщения допускают теоремы 2, 3, 4, 5.

4°. Пример 1. Пусть

$$\lambda(t) = \exp(-t^{-r}),\ r = \text{const} > 0,\ \Lambda(t) = \int_0^t \exp(-s^{-r}), ds,$$

и рассмотрим уравнение

$$u_{ttt} - A^2\lambda^2(t)\, u_{txx} + B(t)\,\frac{\lambda^3(t)}{\Lambda(t)}\, u_{xx} + C(t)\,\frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)}\, u_{tx} +$$

$$+ D(t)\,\frac{\lambda^3(t)\ln^2\lambda(t)}{\Lambda^2(t)}\, u_x = f. \tag{4.15}$$

(a) Если

$$A \in \mathbf{R},\ A > 0,\ |D_t^k B(t)| + |D_t^k C(t)| \leqslant c\,|\ln\lambda(t)|\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k,\ k = 0,\ 1,$$

$$|\mathrm{Re}\, B(t)| + |\mathrm{Re}\, C(t)| + |D(t)| \leqslant c,$$

то выполнены условия теоремы 1; (в) Пусть

$$B(t) = [id\ln\lambda(t) + b/\nu(t)],\ d \in \mathbf{C},\ \nu(t) = (\underbrace{\ln\ln\cdots\ln}_{m}|\ln t|)^{-l},$$

$$C(t) = D(t) \equiv 0.$$

Если $A > 0$, $l > 0$, $b \in R \setminus 0$, то, согласно теореме 2, задача (0.2), (0.3) не является $C^{3,\infty}$-корректной ни при каких $m \geqslant 1$, $d \in \mathbf{C}$, $t_C \in [0,\ T]$; (c) Пусть $B(t) = b(\ln\lambda(t))/\nu(t)$, $A \in \mathbf{C}$, $b \in \mathbf{C}$, $D(t) = C(t) = 0$. Если $\nu(t)$ как в (в), $l > 0$, $m > 0$, то задача не является $C^{3,\infty}$-корректной с $t_C = 0$. Пусть теперь $\nu(t) = \lambda^\alpha(t)$. Если $\alpha \geqslant 1$, $b \neq 0$, то коэффициент уравнения имеет особенность в $t = 0$. Такие уравнения в настоящей работе не рассматриваются. Если $\alpha < 0$, то выполнены условия теоремы 1. Если $\alpha = 0$ и $\mathrm{Re}\, b \neq 0$, то задача с $t_C = 0$ не является корректной. Если $0 < \alpha < 1$, $b \in \mathbf{C} \setminus 0$, то, согласно теореме 3, задача с $t_C = 0$ не корректна; (d) Пусть $D(t) = C(t) = 0$, $B(t) = bt^l\Lambda(t)/\lambda^3(t)$. Если $b \in \mathbf{C} \setminus 0$, то, при любом $l > 0$ выполнены условия теоремы 3. Аналогично рассматриваются случаи $D(t) \neq 0$, $C(t) \neq 0$; (e) Пусть

$$\lambda(t) = \exp(-\exp t^{-r}),\ \Lambda(t) = \int_0^t \exp(-\exp s^{-r})\, ds.$$

Тогда справедливы утверждения пунктов (a) — (c). Если же $D(t) = C(t) = 0$, $B(t) = b\exp(-t^{-r_1})\,\Lambda(t)/\lambda^3(t)$, $b \in \mathbf{C} \setminus 0$ и $r_1 > 0$, то выполнены условия теоремы 3 (ср. с теоремой 4.1 [2]).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14.XII. 1983

Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Կոշու խնդրի կոռեկտության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները բազմապատիկ բնութագրիչներով օպերատորների համար *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է փոփոխական պատիկությամբ խարակտերիստիկ արմատներով բարձր կարգի հիպերբոլական տիպի հավասարման համար Կոշու խնդրի C^∞-կորեկտությունը։ Ենթադրվում է, որ օպերատորի գործակիցները կախված են միայն t-ից։ Նշված են պայմաններ ցածր կարգի անդամների գործակիցների վրա, որոնք բավարար են Կոշու խնդրի կորեկտության համար, երբ սկզբնական պայմանները տրվում են ինչպես t=0 հիպերհարթության վրա, այնպես նաև նրանից դուրս։ Բավականին ընդհանուր դասերի հավասարումների համար ապացուցված է, որ նշված բավարար պայմանները հանդիսանում են C^∞-կորեկտության համար նաև անհրաժեշտ պայմաններ։

K. H. YAGDJIAN. *Necessary and sufficient conditions for well-posed Cauchy problem for operators with multiple characteristics* (summary)

The paper deals with the operators with multiple characteristic roots. It is assumed that the coefficients depend on time variable only. For a wide class of such operators a necessary and sufficient conditions of the well-posedness of the Cauchy problem is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Гординг.* Задача Коши для гиперболических уравнений, М., ИЛ, 1961.
2. *В. Я. Иврий, В. М. Петков.* Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 29, вып. 5, 1974, 3—70.
3. *E. E. Levi.* Caracteristiche multiple e problema di Cauchy, Ann. di Matem.. Ser. a, 1909, v. 16, 161—201.
4. *O. A. Oleinik.* On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations. Comm. Pure Appl, Math., 1970, v. 23, n. 6, 359—389.
5. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 1971, 196, № 2, 289—292.
6. *А. Б. Нерсесян, А. О. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», VIII, № 3, 1973, 255—273.
7. *T. Nishitani.* A necessary and sufficient condition for the hyperbolicity of second order equations with two independent variables, Jour. Math. Kyoto Univ., 1984, v. 24, n. 1, 91—104.
8. *Ф. О. Мамиконян, А. Б. Нерсесян.* Об устойчивости решения задачи Коши для гиперболического уравнения с данными на линии параболичности, Ученые записки ЕГУ, 1972, № 1, 3—14.
9. *И. С. Березин.* О задаче Коши для линейного уравнения второго порядка с начальными данными на линии параболичности, Мат. сб., 24, № 2, 1949, 301—320.
10. *F. Colombini, S. Spagnolo.* An example of weakly hyperbolic Cauchy problem not well posed in C^∞, Acta Math., 1982, 148, 243—253.
11. *S. Tarama.* On exemple dans le probleme de Cauchy pour le equations faiblement byperboliques, Publ RIMS, Kyoto Univ., 1979, v. 15, n. 2, 455—468.
12. *К. А. Ягджян.* Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических операторов, «Материалы VII советско-чехословацкого семинара», Ереван, 1981.
13. *К. А. Ягджян.* О корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 15, № 6, 1980, 475—487. (Engl. transl.: Soviet J. of Contemporary Math. Anal., 1980, v. 15, № 6, 54—65).
14. *S. Tarama* Sur le probleme de Cauchy pour une class des operateurs differentieles du type faiblement hyperbolique, Jour. Math. Kyoto Univ., 1982, v. 22, n. 2, 333—368.
15. *С. Мизохата.* Теория уравнений с частными производными, М., «Мир», 1977.
16. *Г. Р. Александрян, К. А. Ягджян.* Условия корректности задачи Коши и распространение особенностей решений уравнений с кратными характеристиками, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 18, № 2, 1983, 134—149. (Engl. transl.: Soviet J, of Contemporary Math. Anal., 1983, v. 18, № 2, 53—68).