ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 5, 1984 Математика

УДК 517.98

В. А. ЮРКО

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

В статье исследуются краевые задачи для дифференциального уравнения диффузии

$$-y'' + (2\lambda p(x) + q(x))\, y = \lambda^2 y,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

с краевыми условиями, полиномиально зависящими от спектрального параметра λ. В первой части работы рассматривается задача Редже для указанного уравнения. Получены необходимые и достаточные условия отсутствия спектра у задачи Редже, а также теоремы единственности восстановления дифференциального уравнения по некоторым спектральным характеристикам. Во второй части исследуется обратная задача в случае, когда краевые условия имеют вид

$$P_1(\lambda)\, y'(0) - P_0(\lambda)\, y(0) = R_1(\lambda)\, y'(\pi) + R_0(\lambda)\, y(\pi) = 0,$$

где $P_k(\lambda)$, $R_k(\lambda)$ — многочлены по λ.

Всюду считаем, что $p(x)$, $q(x)$ являются комплекснозначными функциями, а коэффициенты краевых условий — комплексными числами. Условимся, что если рассматриваются некоторые краевые задачи L и $\tilde{L}$ и если некоторый символ обозначает объект, относящийся к задаче L, то этот же символ с $\sim$ наверху обозначает аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{L}$.

1°. Рассмотрим сначала задачу Редже для уравнения Штурма — Лиувилля. Пусть λ_n — собственные значения (с.з.) краевой задачи $L = L(q(x))$

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda^2 y,\quad q(x) \in L(0, \pi), \tag{1}$$
$$y'(0) + i\lambda\, y(0) = y(\pi) = 0.$$

Отличительной особенностью задачи L является отсутствие спектра при $q(x) \equiv 0$. Пусть $\tilde{\lambda}_n$ — с.з. задачи $\tilde{L} = L(\tilde{q}(x))$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Если при всех n $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ п. в. на $[0, \pi]$. В частности, задача L не имеет с.з. тогда и только тогда, когда $q(x) = 0$, п.в. на $[0, \pi]$.*

При доказательстве для простоты ограничимся случаем $q'(x)$, $\tilde{q}'(x) \in L(0, \pi)$. Пусть функция $\varphi(x, \lambda)$ является решением уравнения (1) при условиях $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = -i\lambda$. Известно ([1], [2]), что имеет место представление

$$\varphi(x, \lambda) = \exp(-i\lambda x) + \int_{-x}^{x} K(x, t) \exp(-i\lambda t)\, dt \tag{2}$$

и, если продолжить функцию $q(x)$ некоторым способом на отрезок $[-\pi, 0]$, то

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_{-x}^{x} G(x, t)\, \varphi(t, \lambda)\, dt, \tag{3}$$

причем

$$\frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} - \tilde{q}(x)\, G(x, t) = \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial t^2} - q(t)\, G(x, t), \quad G(x, -x) = 0. \tag{4}$$

Из (2) следует, что функция $\varphi(\pi, \lambda)$, нули которой совпадают с числами λ_n, является целой аналитической по λ функцией 1-го порядка, конечного типа и при $|\lambda| \to \infty$, $\arg \lambda = \theta \in (0, \pi)$ $\varphi(\pi, \lambda) = \exp(-i\lambda\pi)\,[1]$, $[1] = 1 + O(\lambda^{-1})$. При условиях теоремы отсюда получаем, что $\varphi(\pi, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}(\pi, \lambda)$ и, следовательно

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(\pi, t)\, \varphi(t, \lambda)\, dt \equiv 0.$$

Снова используя (2), заключаем (см., например, [2], стр. 32), что функции $\varphi(x, \lambda)$ образуют полную систему в $L_2(-\pi, \pi)$, то есть $G(\pi, t) \equiv 0$, $t \in [-\pi, \pi]$.

Продолжим теперь функцию $\tilde{q}(x)$ на отрезок $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ по формуле $\tilde{q}(x) = \tilde{q}(2\pi - x)$. Ясно, что тогда $G(x, t) = -G(2\pi - x, t)$ и, следовательно, $G(x, x - 2\pi) = 0$, $x \in [\pi, 2\pi]$. Отсюда и из (4), используя единственность решения задачи Гурса, находим, в частности, что $G(x, t) \equiv 0$, $0 \leqslant |t| < x \leqslant \pi$, что приводит к тождеству $\varphi(x, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}(x, \lambda)$. Это означает, что $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $[0, \pi]$ и теорема 1 доказана.

Заметим, что задача Редже для уравнения (1) изучалась во многих работах, в частности, в [3]—[5], где в предположении $q(x) \sim C_\mu x^\mu$, $x \to +0$, $C_\mu \neq 0$ получена теорема о разложении и доказана единственность восстановления $q(x)$ по спектру и так называемым „весовым“ числам.

2°. Рассмотрим теперь задачу Редже для уравнения диффузии. Пусть λ_n—с. з. задачи $L = L(p(x), q(x))$

$$-y'' + (2\lambda p(x) + q(x))\, y = \lambda^2 y, \quad p'(x),\ q(x) \in L(0, \pi), \tag{5}$$

$$y'(0) + i\lambda y(0) = y(\pi) = 0. \tag{6}$$

Выясним сначала, когда задача L не имеет с.з. Пусть функции $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (5) при условиях $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = -i\lambda$, $\psi(\pi, \lambda) = 0$, $\psi'(\pi, \lambda) = -1$. Обозначим

$$\alpha(x)=\int_0^x p(t)\,dt,\ \Delta(\lambda)=\varphi(\pi,\lambda),\ h(x)=q(x)+p^2(x)-ip'(x).$$

Ясно, что если $p(0)=0$, $h(x)\equiv 0$, то $\varphi(x,\lambda)=\exp(-i\lambda x+i\alpha(x))$, и задача L не имеет с.з. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Если задача L не имеет с.з., то* $p(0)=0$, $h(x)=0$ *п.в. на* $[0,\pi]$.

При доказательстве для простоты ограничимся случаем $h'(x)\in L(0,\pi)$. Покажем, что имеет место представление

$$\varphi(x,\lambda)=\exp(-i\lambda x+i\alpha(x))+\int_{-x}^{x}P(x,t)\exp(-i\lambda t)\,dt, \tag{7}$$

причем

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2}-q(x)P(x,t)+2ip(x)\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=0, \tag{8}$$

$$P(x,-x)=-\frac{i}{2}p(0)\exp(-i\alpha(x)),\ P(x,x)=$$

$$=\left(-\frac{i}{2}p(0)+\frac{1}{2}\int_0^x h(t)\,dt\right)\exp(i\alpha(x)). \tag{9}$$

В самом деле, пусть функция $P(x,t)$ является решением задачи Гурса (8), (9) при $0\leqslant|t|\leqslant x\leqslant\pi$. Рассмотрим функцию

$$y(x,\lambda)=\exp(-i\lambda x+i\alpha(x))+\int_{-x}^{x}P(x,t)\exp(-i\lambda t)\,dt. \tag{10}$$

Так как

$$\lambda\int_{-x}^{x}P(x,t)\exp(-i\lambda t)\,dt=iP(x,x)\exp(-i\lambda x)-iP(x,-x)\exp(i\lambda x)-$$

$$-i\int_{-x}^{x}\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\exp(-i\lambda t)\,dt,$$

$$\lambda^2\int_{-x}^{x}P(x,t)\exp(-i\lambda t)\,dt=\left(i\lambda P(x,x)+\left.\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\right|_{t=x}\right)\exp(-i\lambda x)-$$

$$-\left(i\lambda P(x,-x)+\left.\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\right|_{t=-x}\right)\exp(i\lambda x)-\int_{-x}^{x}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2}\exp(-i\lambda t)\,dt,$$

то из (8), (9), (10) получаем, что $y''(x,\lambda)+(\lambda^2-2\lambda p(x)-q(x))\,y(x,\lambda)\equiv\equiv 0$, то есть функция $y(x,\lambda)$ является решением уравнения (5). Кроме того, из (9), (10) следует, что $y(0,\lambda)=1$, $y'(0,\lambda)=-i\lambda$. В силу единственности решения задачи Коши получаем, что $y(x, \lambda) \equiv \varphi(x, \lambda)$, то есть формула (7) доказана.

Функция $\Delta(\lambda)$ по условию теоремы не имеет нулей, и из (7) следует, что при $|\lambda| \to \infty$, $\arg \lambda = \theta \in (0, \pi)$ $\Delta(\lambda) = \exp(-i\lambda\pi + i\alpha(\pi))$ [1]. Следовательно, $\Delta(\lambda) \equiv \exp(-i\lambda\pi + i\alpha(\pi))$, то есть $P(\pi, t) \equiv 0$, $t \in [-\pi, \pi]$. Кроме того, очевидно, что при условиях теоремы $p(0) = 0$, то есть $P(x, -x) = 0$. Повторяя теперь рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, получаем, что $P(x, t) \equiv 0$ при $0 \leqslant |t| \leqslant x \leqslant \pi$, откуда следует, что $\varphi(x, \lambda) = \exp(-i\lambda x + i\alpha(x))$, или $h(x) = 0$ п.в. на $[0, \pi]$. Теорема 2 доказана.

Наряду с L рассмотрим также задачу L_1 для уравнения (5) с краевыми условиями $y'(0) + i\lambda y(0) = y'(\pi) = 0$. Пусть λ_{n1} — с.з. задачи L_1, $\Delta_1(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda)$. Очевидно, что если $p(0) = 0$, $h(x) \equiv 0$, то задача L_1 имеет только одно с.з. Справедливо и обратное утверждение, которое доказывается совершенно аналогично теореме 2.

Теорема 3. *Если задача L_1 имеет только одно с.з., то $p(0) = 0$, $h(x) = 0$ п.в. на $[0, \pi]$.*

Из теорем 2, 3 следует, что уравнение (5), вообще говоря, не восстанавливается однозначно по двум спектрам задач L, L_1. Однако при некоторых ограничениях на функции $p(x)$, $q(x)$ можно получать теоремы единственности восстановления уравнения (5) по двум спектрам или по другим спектральным характеристикам. Пусть, например, $p(0) \neq 0$ или $p(0) = 0$, $h(x) \sim C_\mu x^\mu$, $x \to +0$, $C_\mu \neq 0$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если λ_n — нуль функции $\Delta(\lambda)$ кратности $\varkappa_n$, то в окрестности точки $\lambda = \lambda_n$ имеет место представление*

$$\psi(x, \lambda) = \Delta(\lambda)\, \xi_n(x, \lambda) + \sum_{\nu=1}^{\varkappa_n} \frac{c_{\nu n}\, \Delta(\lambda)}{(\lambda - \lambda_n)^\nu}\, \varphi(x, \lambda), \tag{11}$$

где $c_{\varkappa_n, n} \neq 0$, а функция $\xi_n(x, \lambda)$ регулярна в точке $\lambda = \lambda_n$.

Доказательство. Используя метод математической индукции, покажем, что существует последовательность функций $\xi_{\nu n}(x, \lambda)$ и чисел $c_{\nu n}$ $(\nu = \overline{1, \varkappa_n})$ таких, что функции $\xi_{\nu n}(x, \lambda)$ имеют в точке $\lambda = \lambda_n$ полюс порядка $\nu - 1$ и

$$\xi_{\nu n}(x, \lambda) = \xi_{\nu+1, n}(x, \lambda) - \frac{c_{\nu n}}{(\lambda - \lambda_n)^\nu}\, \varphi(x, \lambda), \quad \xi_{\varkappa_n+1, n}(x, \lambda) = \frac{\psi(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)}. \tag{12}$$

Ясно, что отсюда сразу получаем представление (11), где $\xi_n(x, \lambda) = \xi_{1n}(x, \lambda)$.

Так как $\psi(x, \lambda_n) = \gamma_{n0}\, \varphi(x, \lambda_n)$, $\gamma_{n0} \neq 0$, то функция $\xi_{\varkappa_n, n}(x, \lambda)$, определяемая равенством (12) при $\nu = \varkappa_n$, где $c_{\varkappa_n, n} = \gamma_{n0} \cdot \varkappa_n! \, [\Delta^{(\varkappa_n)}(\lambda_n)]^{-1}$ имеет в точке $\lambda = \lambda_n$ полюс порядка $\varkappa_n - 1$.

Далее, предположим, что мы доказали существование функций $\xi_{\nu n}(x, \lambda)$ с указанными свойствами при $\nu = \varkappa_n, \varkappa_n - 1, \cdots, s+1$ $(s \geqslant 1)$. Тогда в окрестности точки $\lambda = \lambda_n$ имеет место представление

$$\xi_{s+1, n}(x, \lambda) = \frac{H_{sn}(x, \lambda)}{(\lambda - \lambda_n)^s},$$

где функция $H_{sn}(x, \lambda)$ регулярна в точке $\lambda=\lambda_n$. Очевидно, что при $\lambda=\lambda_n$ функция $H_{sn}(x, \lambda_n)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (5) и краевым условиям (6). Это означает, что $H_{sn}(x, \lambda_n)=c_{sn}\varphi(x, \lambda_n)$. Следовательно, функция $\xi_s(x, \lambda)$, определяемая равенством (12) при $\nu=s$ имеет в точке $\lambda=\lambda_n$ полюс порядка $s-1$. Лемма доказана.

Используя (11), получаем соотношения

$$\psi_\nu(x, \lambda_n)=\sum_{j=0}^{\nu}\gamma_{n,\nu-j}\varphi_j(x, \lambda_n), \quad \nu=\overline{0, \varkappa_n-1}, \quad \gamma_{n0}\neq 0, \tag{13}$$

где

$$\varphi_\nu(x, \lambda)=\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial\lambda^\nu}\varphi(x, \lambda), \quad \psi_\nu(x, \lambda)=\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial\lambda^\nu}\psi(x, \lambda),$$

$$\gamma_{n\nu}=\sum_{s=\varkappa_n}^{\varkappa_n+\nu}c_{s-\nu,n}\cdot\frac{\Delta^{(s)}(\lambda_n)}{s!}. \tag{14}$$

Совокупность чисел $\{\lambda_n, \gamma_{n\nu}\}$, $\nu=\overline{0, \varkappa_n-1}$ будем называть спектральными данными задачи L. Заметим, что при достаточно больших n $\varkappa_n=1$. Пусть $\{\tilde\lambda_n, \tilde\gamma_{n\nu}\}$ — спектральные данные задачи $\tilde L=L(\tilde p(x), \tilde q(x))$. Справедлива следующая

Теорема 4. *Если при всех* n $\lambda_n=\tilde\lambda_n$, $\gamma_{n\nu}=\tilde\gamma_{n\nu}$, $\nu=\overline{0, \varkappa_n-1}$, *то* $p(x)=\tilde p(x)$, $q(x)=\tilde q(x)$ *п.в. на* $[0, \pi]$.

Доказательство проведем для случая $p(0)\neq 0$. Тогда при фиксированном $x\in[0, \pi]$, $\mu=0, 1$ и при $|\lambda|\to\infty$ имеют место асимптотические формулы

$$\varphi^{(\mu)}(x, \lambda)=(-i\lambda)^\mu\exp(-i\lambda x+i\alpha(x))[1]+d\cdot i^\mu\cdot\lambda^{\mu-1}\exp(i\lambda x-i\alpha(x))[1], \tag{15}$$

$$\psi^{(\mu)}(x, \lambda)=-\frac{1}{2}(i\lambda)^{\mu-1}\cdot\exp(-i\lambda(\pi-x)+i\alpha(\pi)-i\alpha(x))[1]-$$
$$-\frac{1}{2}(-i\lambda)^{\mu-1}\cdot\exp(i\lambda(\pi-x)-i\alpha(\pi)+i\alpha(x))[1], \quad d=-\frac{1}{2}p(0)\neq 0. \tag{16}$$

Асимптотическая формула для функций $\varphi^{(\mu)}(x, \lambda)$ очевидно следует из (7), (9). Аналогичным образом может быть получена и формула для функций $\psi^{(\mu)}(x, \lambda)$.

Рассмотрим следующие функции:

$$A_j(x, \lambda)=\frac{1}{\tilde\Delta(\lambda)}(\psi(x, \lambda)\tilde\varphi^{(j-1)}(x, \lambda)-\varphi(x, \lambda)\tilde\psi^{(j-1)}(x, \lambda)), \quad j=1, 2. \tag{17}$$

Так как

$$\varphi(x, \lambda)=\sum_{\nu=0}^{\varkappa_n-1}\varphi_\nu(x, \lambda_n)\cdot(\lambda-\lambda_n)^\nu+(\lambda-\lambda_n)^{\varkappa_n}\Phi(x, \lambda),$$

$$\psi(x, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\varkappa_n - 1} \psi_\nu (x, \lambda_n) \cdot (\lambda - \lambda_n)^\nu + (\lambda - \lambda_n)^{\varkappa_n} \Psi (x, \lambda),$$

где функции $\Phi(x, \lambda)$, $\Psi(x, \lambda)$ регулярны в точке $\lambda = \lambda_n$, то из условий теоремы, используя (13), получаем, что $A_j(x, \lambda)$ при фиксированном $x \in [0, \pi]$ являются целыми аналитическими по λ функциями 1-го порядка конечного типа. С другой стороны, из асимптотических формул (15), (16) следует, что при фиксированном x и при $|\lambda| \to \infty$, $\arg \lambda = \theta \neq 0, \pi$ $A_1(x, \lambda) = O(\lambda^{-1})$, $A_2(x, \lambda) = O(1)$. Следовательно, $A_1(x, \lambda) \equiv 0$, $A_2(x, \lambda) \equiv A(x)$, откуда находим

$$\psi(x, \lambda)\, \tilde{\varphi}(x, \lambda) \equiv \varphi(x, \lambda)\, \tilde{\psi}(x, \lambda),$$

$$A(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) \equiv \frac{\varphi(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} (\tilde{\psi}(x, \lambda)\, \tilde{\varphi}'(x, \lambda) - \tilde{\varphi}(x, \lambda)\, \tilde{\psi}'(x, \lambda)) \equiv \varphi(x, \lambda).$$

Но тогда, используя (15), получаем, что

$$A(x) = \exp(i\alpha(x) - i\tilde{\alpha}(x)) = d \cdot \tilde{d}^{-1} (-i\alpha(x) + i\tilde{\alpha}(x)),$$

то есть $A(x) \equiv 1$. Следовательно, $\varphi(x, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}(x, \lambda)$, или $p(x) = \tilde{p}(x)$, $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $[0, \pi]$. Теорема 4 доказана.

Пусть $\tilde{\lambda}_{n1}$ — с.з. задачи $\tilde{L}_1 = L_1(\tilde{p}(x), \tilde{q}(x))$. Справедлива следующая

Лемма 2. *Если при всех n $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ $(\lambda_{n1} = \tilde{\lambda}_{n1})$, то*

$$\Delta(\lambda)[\tilde{\Delta}(\lambda)]^{-1} \equiv \exp(i\alpha(\pi) - i\tilde{\alpha}(\pi)), \ (\Delta_1(\lambda)[\tilde{\Delta}_1(\lambda)]^{-1} \equiv \exp(i\alpha(\pi) - i\tilde{\alpha}(\pi))).$$

В самом деле, пусть, например, $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ при всех n. Тогда функция $\Delta(\lambda) \cdot [\tilde{\Delta}(\lambda)]^{-1}$ является целой аналитической по λ 1-го порядка конечного типа, не имеет нулей и при $|\lambda| \to \infty$,

$$\arg \lambda = \theta \neq 0, \quad \pi \Delta(\lambda)[\tilde{\Delta}(\lambda)]^{-1} = \exp(i\alpha(\pi) - i\tilde{\alpha}(\pi)) \ [1].$$

Случай $\lambda_{n1} = \tilde{\lambda}_{n1}$ рассматривается аналогично.

Докажем теперь теорему единственности восстановления функций $p(x)$, $q(x)$ по двум спектрам задач L, L_1.

Теорема 5. *Если при всех n $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\lambda_{n1} = \tilde{\lambda}_{n1}$, то $p(x) = \tilde{p}(x)$, $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $[0, \pi]$.*

Как и при доказательстве теоремы 4, считаем, что $p(0) \neq 0$. Так как $\psi'(\pi, \lambda) = -1$, то, используя лемму 1, получаем в окрестности точки $\lambda = \lambda_n$

$$1 + \Delta(\lambda)\, \xi_n'(\pi, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa_n} \frac{c_{\nu n}}{(\lambda - \lambda_n)^\nu} \cdot \Delta(\lambda) \cdot \Delta_1(\lambda).$$

Отсюда, из условий теоремы и из леммы 2 находим, что при всех n

$$c_{\nu n}\cdot\exp(2i\alpha(\pi))=\tilde{c}_{\nu n}\cdot\exp(2i\tilde{\alpha}(\pi)),\ \nu=\overline{0,\ \varkappa_n-1}. \tag{18}$$

Из (11), (18) и леммы 2 вытекает, что при фиксированном $x\in[0,\pi]$, $j=1, 2$ функции

$$B_j(x,\lambda)=\frac{1}{\tilde{\Delta}(\lambda)}(\psi(x,\lambda)\tilde{\varphi}^{(j-1)}(x,\lambda)\cdot\exp(i\alpha(\pi)-i\tilde{\alpha}(\pi))-$$

$$-\varphi(x,\lambda)\tilde{\psi}^{(j-1)}(x,\lambda))$$

являются целыми аналитическими по λ 1-го порядка конечного типа. Кроме того, из (15), (16) следует, что при фиксированном x и при $|\lambda|\to\infty$, $\arg\lambda=\theta\neq 0,\pi$ $B_1(x,\lambda)=O(\lambda^{-1})$, $B_2(x,\lambda)=O(1)$. Следовательно, $B_1(x,\lambda)\equiv 0$, $B_2(x,\lambda)\equiv B(x)$.

Далее, как и при доказательстве теоремы 4 убеждаемся, что $p(x)=\tilde{p}(x)$, $q(x)=\tilde{q}(x)$ п.в. на $[0,\pi]$. Теорема 5 доказана.

В случае простого спектра тем же методом можно доказать теорему единственности восстановления функций $p(x)$, $q(x)$ по спектру и так называемым „весовым“ числам. „Весовыми“ числами задачи L будем называть числа

$$\alpha_n=\lambda_n\int_0^\pi\varphi^2(x,\lambda_n)\,dx-\int_0^\pi p(x)\varphi^2(x,\lambda_n)\,dx.$$

Теорема 6. *Если при всех* n $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$, $\alpha_n=\tilde{\alpha}_n$, *то* $p(x)=\tilde{p}(x)$, $q(x)=\tilde{q}(x)$ *п.в. на* $[0,\pi]$.

Как и ранее считаем, что $p(0)\neq 0$. Так как функции $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (5), то

$$(\lambda+\mu)\int_0^\pi\psi(x,\lambda)\,\varphi(x,\mu)\,dx-2\int_0^\pi p(x)\,\psi(x,\lambda)\,\varphi(x,\mu)\,dx=$$

$$=\frac{\Delta(\mu)-\Delta(\lambda)}{\lambda-\mu}-i\psi(0,\lambda). \tag{19}$$

Далее, так как все с.з. простые, то $\varkappa_n=1$ и, используя (13), (14), находим

$$\psi(x,\lambda_n)=c_{1n}\dot{\Delta}(\lambda_n)\,\varphi(x,\lambda_n),\ c_{1n}\neq 0.$$

Отсюда и из (19) получаем, что $c_{1n}(2\alpha_n+i)=-1$ и, следовательно, при условиях теоремы $c_{1n}=\tilde{c}_{1n}$. Но тогда функции

$$D_j(x,\lambda)=\frac{1}{\tilde{\Delta}(\lambda)}(\psi(x,\lambda)\,\tilde{\varphi}^{(j-1)}(x,\lambda)\exp(-i\alpha(\pi)+i\tilde{\alpha}(\pi))-$$

$$-\varphi(x,\lambda)\,\tilde{\psi}^{(j-1)}(x,\lambda)),\ j=1,2$$

при фиксированном $x\in[0,\pi]$ являются целыми аналитическими по λ функциями 1-го порядка конечного типа. Далее, как и при доказательстве теорем 4, 5 находим, что $D_1(x,\lambda)\equiv 0$, $D_2(x,\lambda)\equiv D(x)$, $D(x)\times\times\tilde{\varphi}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)$. Следовательно, как и ранее, получаем, что $p(x)=\tilde{p}(x)$, $q(x)=\tilde{q}(x)$ п.в. на $[0,\pi]$.

Теорема 6 доказана.

3°. Рассмотрим краевую задачу $L=L(p(x), q(x), U, V)$

$$-y''+(2\lambda p(x)+q(x))\,y=\lambda^2 y,\quad p'(x),\ q(x)\in L(0,\pi), \tag{20}$$

$$U(y)=P_1(\lambda)\,y'(0)-P_0(\lambda)\,y(0)=0,$$
$$V(y)=R_1(\lambda)\,y'(\pi)+R_0(\lambda)\,y(\pi)=0, \tag{21}$$

где

$$P_k(\lambda)=\sum_{j=0}^{\sigma_k}p_{kj}\lambda^j,\quad R_k(\lambda)=\sum_{j=0}^{\tau_k}r_{kj}\lambda^j,\quad p_{k,\sigma_k}\neq 0,\ r_{k,\tau_k}\neq 0.$$

При этом считаем, что многочлены $P_1(\lambda)$ и $P_0(\lambda)$, а также $R_1(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$ не имеют общих корней: кроме того, считаем, что $p_{1,\sigma_1}=1$ (если $\sigma_1+1\geqslant\sigma_0$), $p_{0,\sigma_0}=1$ ($\sigma_1+1<\sigma_0$), $r_{1,\tau_1}=1$ ($\tau_1+1>\tau_0$), $r_{0,\tau_0}=1$ ($\tau_1+1<\tau_0$) и, если $P_1(\lambda)\equiv 0$ ($P_0(\lambda)\equiv 0$), то $\sigma_1=-1$, $p_0(\lambda)\equiv 1$ ($\sigma_0=-1$, $P_1(\lambda)\equiv 1$). Аналогично, если $R_1(\lambda)\equiv 0$ ($R_0(\lambda)\equiv 0$), то $\tau_1=-1$, $R_0(\lambda)\equiv 1$ ($\tau_0=-1$, $R_1(\lambda)\equiv 1$). Обозначим $\sigma=\max(\sigma_1+1,\sigma_0)$, $\tau=\max(\tau_1+1,\tau_0)$. Пусть λ_n — с.з. задачи L. Для этой задачи можно провести исследования, аналогичные вышеизложенным. Приведем некоторые результаты. Для простоты ограничимся случаем, когда

$$a_k=p_{0,\sigma_0}+(-1)^k\cdot i\cdot p_{1,\sigma_1}\neq 0,\quad b_k=r_{0,\tau_0}+(-1)^k\cdot i\cdot r_{1,\tau_1}\neq 0.$$

Это условие можно заменить более общим, но при получении теорем единственности совсем отказаться от него нельзя, что показывают вышеизложенные результаты.

Пусть функции $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (20) при условиях $\varphi(0,\lambda)=P_1(\lambda)$, $\varphi'(0,\lambda)=P_0(\lambda)$, $\psi(\pi,\lambda)=R_1(\lambda)$, $\psi'(\pi,\lambda)=-R_0(\lambda)$, и пусть $\Delta(\lambda)=R_1(\lambda)\,\varphi'(\pi,\lambda)+R_0(\lambda)\,\varphi(\pi,\lambda)$.

Отметим, что для краевой задачи (20), (21), как легко видеть, остается справедливой лемма 1 и соотношения (13), (14). Как и ранее, совокупность чисел $\{\lambda_n,\gamma_n\}$ будем называть спектральными данными задачи L. Справедлива следующая

Лемма 3. 1) *При фиксированном* $x\in[0,\pi]$, $\mu=0,1$ *и при* $|\lambda|\to\infty$ *имеют место асимптотические формулы*

$$\varphi^{(\mu)}(x,\lambda)=\frac{1}{2}\lambda^{\sigma+\mu-1}\left(a_1(-i)^{\mu-1}\exp(-i\lambda x+i\alpha(x))[1]+\right.$$
$$\left.+a_2 i^{\mu-1}\exp(i\lambda x-i\alpha(x))[1]\right),$$

$$\psi^{(\mu)}(x,\lambda)=-\frac{1}{2}\lambda^{\tau+\mu-1}\left(b_1 i^{\mu-1}\exp(-i\lambda(\pi-x)+i\alpha(\pi)-i\alpha(x))[1]+\right.$$
$$\left.+b_2(-i)^{\mu-1}\exp(i\lambda(\pi-x)-i\alpha(\pi)+i\alpha(x))[1]\right),$$

$$\Delta(\lambda)=\frac{1}{2i}\lambda^{\sigma+\tau-1}(-a_1b_1\exp(-i\lambda\pi+i\alpha(\pi))[1]+$$
$$+a_2b_2\exp(i\lambda\pi-i\alpha(\pi))[1]).$$

2) *При $n\to\pm\infty$ справедливы формулы*

$$\lambda_n=n+\chi_1+o(1),\ \gamma_{n0}=(-1)^n\cdot n^{\tau-\sigma}\cdot\chi_2[1+o(1)],$$

причем при достаточно больших n все с.з. являются простыми нулями функции $\Delta(\lambda)$.

В самом деле, известно ([6]), что в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im}\lambda<0$, $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ существует фундаментальная система решений $y_k(x,\lambda)$, $k=1, 2$ уравнения (20) такая, что при $|\lambda|\to\infty$

$$y_k^{(\mu)}(x,\lambda)=(-1)^{k\mu}\cdot(i\lambda)^{\mu}\cdot\exp((-1)^k(i\lambda x-i\alpha(x)))[1],\ \mu=0,1.$$

Тогда $\varphi(x,\lambda)=C_1(\lambda)y_1(x,\lambda)+C_2(\lambda)y_2(x,\lambda)$, где коэффициенты $C_k(\lambda)$ находятся из системы

$$C_1(\lambda)y_1^{(\mu)}(0,\lambda)+C_2(\lambda)y_2^{(\mu)}(0,\lambda)=P_{1-\mu}(\lambda),\ \mu=0,1,$$

то есть $C_1(\lambda)=\frac{1}{2}ia_1\lambda^{\sigma-1}[1]$, $C_2(\lambda)=-\frac{1}{2}ia_2\lambda^{\sigma-1}[1]$. Отсюда получаем асимптотическую формулу для функций $\varphi^{(\mu)}(x,\lambda)$. Аналогично находим асимптотическую формулу для функций $\psi^{(\mu)}(x,\lambda)$. Формула для $\Delta(\lambda)$ теперь становится очевидной. Используя полученную для функции $\Delta(\lambda)$ асимптотическую формулу, известными методами (см., например, [7]) получаем асимптотическую формулу для с.з. λ_n. Наконец, формула для чисел γ_{n0} очевидно следует из асимпотических формул для $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ и для с.з. λ_n.

Наряду с L рассмотрим задачу $\tilde L=L(\tilde p(x),\tilde q(x),\tilde U,\tilde V)$, где

$$\tilde U(y)=\tilde P_1(\lambda)y'(0)-\tilde P_0(\lambda)y(0),\ \tilde V(y)=\tilde R_1(\lambda)y'(\pi)+\tilde R_0(\lambda)y(\pi),$$

$$\tilde P_k(\lambda)=\sum_{j=0}^{\tilde\sigma_k}\tilde p_{kj}\lambda^j,\ \tilde R_k(\lambda)=\sum_{j=0}^{\tilde\tau_k}\tilde r_{kj}\lambda^j,\ \tilde p_{k,\tilde\sigma_k}\neq 0,\ \tilde r_{k,\tilde\tau_k}\neq 0.$$

Теорема 7. *Если при всех n $\lambda_n=\tilde\lambda_n$, $\gamma_{n\nu}=\tilde\gamma_{n\nu}(\nu=\overline{0,\varkappa_n-1})$, то $p(x)=\tilde p(x)$, $q(x)=\tilde q(x)$ п.в. на $[0,\pi]$, $P_k(\lambda)\equiv\tilde P_k(\lambda)$, $R_k(\lambda)\equiv\tilde R_k(\lambda)$, $k=0,1$.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 4, строим функции $A_j(x,\lambda)$ по формулам (17) и убеждаемся, что при условиях теоремы $A_j(x,\lambda)$ при фиксированном $x\in[0,\pi]$ являются целыми аналитическими по λ функциями 1-го порядка конечного типа. Далее, используя лемму 3, получаем, что $\sigma=\tilde\sigma$, $\tau=\tilde\tau$ и при фиксированном $x\in[0,\pi]$, $|\lambda|\to\infty$, $\arg\lambda=\theta\neq 0,\pi$, $A_1(x,\lambda)=O(\lambda^{-1})$, $A_2(x,\lambda)=O(1)$ и, следовательно, $A_1(x,\lambda)\equiv 0$, $A_2(x,\lambda)\equiv A(x)$. Как и в теореме 4, отсюда получаем, что

$$A(x)\tilde\varphi(x,\lambda)\equiv\varphi(x,\lambda),\ A(x)\tilde\psi(x,\lambda)\equiv\psi(x,\lambda)$$

и, используя лемму 3, находим, что

$$A(x)=a_1\tilde{a}_1^{-1}\exp\,(i\alpha(x)-i\tilde{\alpha}(x))=a_2\tilde{a}_2^{-1}\exp\,(-i\alpha(x)+i\tilde{\alpha}(x))$$

и, следовательно, $A(x)\equiv A$ — const, то есть

$$A\tilde{\varphi}(x,\lambda)\equiv\varphi(x,\lambda),\ A\tilde{\psi}(x,\lambda)\equiv\psi(x,\lambda),\ A\tilde{P}_k(\lambda)\equiv P_k(\lambda),$$

$$A\tilde{R}_k(\lambda)\equiv R_k(\lambda).$$

В силу нормировки коэффициентов многочленов получаем, что $A=1$ и, следовательно, $p(x)=\tilde{p}(x)$, $q(x)=\tilde{q}(x)$ п.в. на $[0,\pi]$, $P_k(\lambda)\equiv\tilde{P}_k(\lambda)$ $R_k(\lambda)\equiv\tilde{R}_k(\lambda)$, Теорема 7 доказана.

Как и в п. 2, здесь также можно получать теоремы единственности восстановления функций $p(x)$, $q(x)$ и коэффициентов краевых условий по двум спектрам или в случае простого спектра—по с.з. и некоторым „весовым" числам. Приведем, например, теорему единственности по двум спектрам. Пусть λ_{n1}— с.з. задачи $L_1=L(p(x),\ q(x),\ U,\ V_1)$, где

$$V_1(y)=R_1^1(\lambda)\,y'(\pi)+R_0^1(\lambda)\,y(\pi),\ R_k^1(\lambda)=\sum_{j=0}^{\sigma_k^1}r_{kj}^1\lambda^j,\ r_{k,\sigma_k^1}^1\neq 0.$$

Обозначим

$$S(\lambda)=R_0^1(\lambda)\,R_1(\lambda)-R_1^1(\lambda)\,R_0(\lambda)=\sum_{j=0}^{m}\beta_j\lambda^j,\ m=\tau+\tau^1-1,$$

$$\tau^1=\max\,(\sigma_1^1+1,\ \sigma_0^1)$$

и предположим, что у задач L, L_1 нет общих с.з. Пусть $\tilde{\lambda}_{n1}$— с.з. задачи $\tilde{L}_1=L(\tilde{p}(x),\ \tilde{q}(x),\ \tilde{U},\ \tilde{V}_1)$, где

$$\tilde{V}_1(y)=\tilde{R}_1^1(\lambda)\,y'(\pi)+\tilde{R}_0^1(\lambda)\,y(\pi),\ \tilde{R}_k^1(\lambda)=\sum_{j=0}^{\tilde{\sigma}_k^1}\tilde{r}_{kj}^1\lambda^j,\ \tilde{r}_{k,\tilde{\sigma}_k^1}^1\neq 0.$$

Т е о р е м а 8. *Если при всех n $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$, $\lambda_{n1}=\tilde{\lambda}_{n1}$, $\beta_j=\tilde{\beta}_j$ $(j=\overline{0,m})$, то $p(x)=\tilde{p}(x)$, $q(x)=\tilde{q}(x)$ п.в. на $[0,\pi]$, $P_k(\lambda)\equiv\tilde{P}_k(\lambda)$, $R_k(\lambda)\equiv\tilde{R}_k(\lambda)$, $R_k^1(\lambda)\equiv\tilde{R}_k^1(\lambda)$, $k=0,\ 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\Delta_1(\lambda)=R_1^1(\lambda)\,\varphi'(\pi,\lambda)+R_0^1(\lambda)\times\times\varphi(\pi,\lambda)$. Учитывая (11), получаем, что в окрестности точки $\lambda=\lambda_n$

$$S(\lambda)=\Delta(\lambda)\,V_1(\xi_n(x,\lambda))+\sum_{\nu=1}^{\varkappa_n}\frac{c_{\nu n}}{(\lambda-\lambda_n)^\nu}\,\Delta(\lambda)\,\Delta_1(\lambda),\tag{22}$$

причем $S(\lambda_n)\neq 0$. Из условий теоремы следует, что

$$\Delta(\lambda)\,\Delta_1(\lambda)\cdot[\tilde{\Delta}(\lambda)\,\tilde{\Delta}_1(\lambda)]^{-1}\equiv Q-\text{const}.$$

Тогда, используя соотношение (22), получаем, что при всех n, $\nu=\overline{1,\varkappa_n}$

$$c_{\nu n}\cdot\tilde{c}_{\nu n}^{-1}=Q.\tag{23}$$

Отсюда, учитывая (14), следует, в частности, что $\gamma_{n0}\cdot\tilde{\gamma}_{n0}^{-1}\equiv\mathrm{const}$ и, следовательно, $\sigma=\tilde{\sigma}$, $\tau=\tilde{\tau}$. Из соотношений (11), (23) вытекает, что при фиксированном $x\in[0,\pi]$ функции

$$W_j(x,\lambda)=\frac{1}{\tilde{\Delta}(\lambda)}\Big(\psi(x,\lambda)\,\tilde{\varphi}^{(j-1)}(x,\lambda)\times$$

$$\times\frac{\Delta_1(\lambda)}{\tilde{\Delta}_1(\lambda)}-\varphi(x,\lambda)\,\tilde{\psi}^{(j-1)}(x,\lambda)\Big),\ j=1,\ 2$$

являются целыми аналитическими по λ 1-го порядка конечного типа. Используя лемму 3, получаем, что при фиксированном $x\in[0,\pi]$ и при $|\lambda|\to\infty$, $\arg\lambda=\theta\neq 0,\ \pi\ W_1(x,\lambda)=O(\lambda^{-1})$, $W_2(x,\lambda)=O(1)$ и, следовательно, $W_1(x,\lambda)\equiv 0$, $W_2(x,\lambda)\equiv W(x)$. Далее, как и при доказательстве теоремы 7, получаем, что $p(x)=\tilde{p}(x)$, $q(x)=\tilde{q}(x)$ п.в. на $[0,\pi]$, $P_k(\lambda)\equiv\tilde{P}_k(\lambda)$, $R_k(\lambda)\equiv\tilde{R}_k(\lambda)$, $R_k^1(\lambda)\equiv\tilde{R}_k^1(\lambda)$, $k=0,\ 1$. Теорема 8 доказана.

Заметим, что теоремы 7, 8 являются обобщением известных результатов для классической задачи Штурма—Лиувилля (см., например, [1], [8]). В заключение укажем еще на две работы.

В работе [9] исследуется обратная задача для уравнения (20) с краевыми условиями, не зависящими от параметра λ, а в [10] рассматривается краевая задача (1), (21) для случая, когда $P_k(\lambda)=g_{k1}$, $R_k(\lambda)=g_{k2}\cdot\lambda^2+g_{k3}$.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступила 28.IV.1982

Վ. Ա. ՅՈՒՐԿՈ. Պարամետրով եզրային պայմաններում եզրային խնդիրների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է հետևյալ եզրային խնդիրները

$$-y''+(2\lambda p(x)+q(x))\,y=\lambda^3 y,\ 0\leqslant x\leqslant\pi,$$

$$P_1(\lambda)\,y'(0)-P_0(\lambda)\,y(0)=R_1(\lambda)\,y'(\pi)+R_0(\lambda)\,y(\pi)=0,$$

որտեղ $P_k(\lambda)$, $R_k(\lambda)$*-ն բազմանդամներ են։ Ստացված են* $p(x)$ *և* $q(x)$ *ֆունկցիաների վերականգնման միակության թեորեմներ։ Ռեջեի խնդրի համար ստացված են սպեկտրի բացակայության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։*

V. A. JOURKO. *About boundary value problems with a parameter in boundary conditions* (summary)

The article deals with boundary value problems of the following form

$$-y''+(2\lambda p(x)+q(x))\,y=\lambda^2 y,\ 0\leqslant x\leqslant\pi,$$

$$P_1(\lambda)\,y'(0)-P_0(\lambda)\,y(0)=R_1(\lambda)\,y'(\pi)+R_0(\lambda)\,y(\pi)=0,$$

where $P_k(\lambda)$, $R_k(\lambda)$ are polynomials of λ. We obtain theorems concerning the existence and uniqueness of the functions $p(x)$, $q(x)$ and of boundary conditions coefficients

when some spectral data is given. For Regges problem necessary and sufficient conditions to have no spectrum are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Марченко.* Некоторые вопросы теории линейных дифференциальных операторов второго порядка, 1, Труды ММО, 1, 1952, 327—420.
2. *В. А. Марченко.* Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, К., «Наукова думка», 1972.
3. *Т. Редже.* Восстановление потенциала по резонансным параметрам, «Математика», 7, № 4, 1963, 91—100.
4. *А. О. Кравицкий.* О двукратном разложении в ряд по собственным функциям одной краевой задачи, Диф. уравнения, 4, № 1, 1968, 165—177.
5. *Е. А. Баранова,* Об обратной задаче спектрального анализа для одного класса задач с парамстром в краевых условиях, Диф. уравнения, 8, № 12, 1972, 2130—2139.
6. *Я. Д. Тамаркин.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917.
7. *М. А. Наймарк.* Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.
8. *G. Borg.* Eie Umkehrung der Sturm - Liouvilleschen Eigenwertaufgabe Bestimmung der Differential Gleichung durch die Eigenwerte, Acta Math., 78, 1946, 1—96-
9. *М. Г. Гасымов, Г. Ш. Гусейнов.* Определение оператора диффузии по спектральным данным, ДАН Аз.ССР, 37, № 2, 1981, 19—23.
10. *A. Benedek, R. Panzone.* On inverse eigenvalue problems for a second-order dfferential equations with parameter contained in the boundary conditions, Notas algebra y anal, № 9, 1980, 13 pp.