ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 5, 1984 Математика

УДК 517.946

В. А. ОГАНЯН

ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Введение

Пусть D — односвязная, ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ, содержащей интервал $(-\beta, \beta)$ действительной оси, и пусть $x_1, x_2, \cdots, x_p$ — точки из этого интервала.

Обозначим через $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$ класс действительных вектор-функций $u(x, y)$, первые производные которых непрерывны всюду в $\bar{D}$ кроме, быть может, граничных точек $x_1, x_2, \cdots, x_p$, а в окрестности этих точек производные удовлетворяют условиям:

$$\lim_{z\to x_k}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot|z-x_k|^{l_k+\varepsilon}=0,\ \lim_{z\to x_k}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot|z-x_k|^{l_k+\varepsilon}=0\quad (k=1, 2, \cdots, p),$$

где $z=x+iy\in D$, l_k — положительные числа, $l_k=m_k+\beta_k$, m_k — целая часть l_k, а β_k — дробная часть.

Обозначим, далее, через $N_\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$ класс действительных вектор-функций $f(z)$, $z\in\Gamma$, которые удовлетворяют условию Гельдера в окрестности любой точки, отличной от точек $x_1, x_2, \cdots, x_p$, а в окрестности точек x_k $(k=1, 2, \cdots, p)$ функции представляются в виде

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\psi_{k1}(x)}{(x_k-x)^{l_k}}, & \text{при}\quad x\in(x_k-\varepsilon, x_k)\\[2ex] \dfrac{\psi_{k2}(x)}{(x_k-x)^{l_k}}, & \text{при}\quad x\in(x_k, x_k+\varepsilon),\end{cases}$$

где $\psi_{k1}(x)$ и $\psi_{k2}(x)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем α_k $(\beta_k<\alpha_k\leqslant 1)$.

В области D рассмотрим эллиптическую систему

$$L(u)\equiv A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

где A, B, C — действительные постоянные квадратные матрицы n-го порядка, $u(x, y)=\{u_1(x, y)\cdots, u_n(x, y)\}$ — дважды непрерывно-дифференцируемая вектор-функция в области D. В дальнейшем под $(u_1(x, y)$ $u_2(x, y), \cdots, u_n(x, y))$ всегда понимается вектор-столбец.

Напомним, что система (1) называется эллиптической, если $\det C \neq 0$ и характеристическое уравнение

$$\det (A + 2B\lambda + C\lambda^2) = 0 \tag{1*}$$

не имеет действительных корней.

Ставится следующая

Задача A. *Найти в области D регулярное решение системы (1), принадлежащее классу $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p)$ и удовлетворяющее граничному условию*

$$F(u) \equiv a(z)\frac{\partial u}{\partial x} + b(z)\frac{\partial u}{\partial y} + c(z)\, u = f(z),\ z \in \Gamma,\ z \neq x_k\ (k = 1, 2, \cdots, p), \tag{2}$$

где

$$f(z) \in N_\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_p; l_1, l_2, \cdots, l_p),\ a(z),\ b(z),\ c(z)$$

— заданные на Γ квадратные матрицы n-го порядка.

Как известно, задачу (1), (2) называют нетеровой, если однородная задача (1), (2) имеет конечное число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f(z)$ удовлетворяла конечному числу условий ортогональности.

Для широкого класса эллиптических систем задача (1), (2) изучалась в работах [1—6]. В работе [7] получено достаточное условие нетеровости задачи (1), (2) (условие Я. Б. Лопатинского), которое имеет вид

$$\int_\gamma K'(z, \lambda)\, \Delta(\lambda)\, K(z, \lambda)\, d\lambda \neq 0,\ z \in \Gamma, \tag{L}$$

где $\Delta(\lambda)$ — матрица, обратная к матрице $A + 2B\lambda + C\lambda^2$, $K(z, \lambda) = \|a(z), \lambda b(z)\|$, $K'(z, \lambda)$ — транспонированная к $K(z, \lambda)$ матрица, а γ — контур в плоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$, охватывающий все корни полинома $\det (A + 2B\lambda + C\lambda^2)$, лежащие в этой полуплоскости. Если $a(z) \equiv 0$, $b(z) \equiv 0$, то $K(z, \lambda) = c(z)$.

Задачи, рассмотренные в работах [1—6], удовлетворяют условию (L).

При более общем условии, чем условие (L), в работе [8] изучена задача (1), (2) и доказана ее нетеровость.

Во всех этих работах граничная вектор-функция на контуре области удовлетворяет условию Гельдера.

Задача Пуанкаре для эллиптических систем уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + X(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + Y(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + Z(x, y)\, u = 0,$$

где $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $Z(x, y)$ — вещественные, квадратные матрицы, элементы которых — целые функции своих аргументов в случае, когда граничная функция терпит разрыв первого порядка, исследована в монографии [9]. Эта задача приводится к системе сингулярных уравнений с разрывными правыми частями.

В настоящей работе рассматривается задача Пуанкаре при условии, что граничная функция имеет особенность в конечном числе точек, причем особенность может быть и не первого порядка.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение системы (1) имеет только простые корни. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения с положительными мнимыми частями, тогда общее решение системы (1) задается формулой (см. [10]):

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j (x + \lambda_j y), \tag{3}$$

где α_j $(j=1, 2, \cdots, n)$ — ненулевое решение системы

$$(A + 2B\lambda_j + C\lambda_j^2)\, \alpha_j = 0,$$

а $\varphi_j(x+\lambda_j y)(j=1, 2, \cdots, n)$ — произвольные аналитические функции относительно аргумента $x+\lambda_j y$. Система (1) называется слабо связанной, если векторы $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ линейно независимы (см. [10]). Мы будем рассматривать слабо связанную эллиптическую систему.

Обозначим через $A_0(z)$ и $B_0(z)$ матрицы, столбцами которых служат, соответственно, векторы

$$a_j(z) = (a(z) + \lambda_j b(z))\, \alpha_j \text{ и } b_j(z) = c(z)\, \alpha_j \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

Предположим, что в малой окрестности точки $x_1, x_2, \cdots, x_p$ элементы матриц $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ аналитические функции комплексной переменной z. Предположим, далее, что

$$\det A_0(z) \neq 0, \text{ при } z \in \Gamma. \tag{4}$$

Основное содержание работы составляет

Теорема. *Задача* (1), (2) *нетерова, индекс* $\varkappa$ *этой задачи определяется формулой*

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi} \Delta_\Gamma \arg(\det A_0(z)) + n([l_1] + [l_2] + \cdots + [l_p] + 2), \tag{2*}$$

где $\Delta_\Gamma \arg(\det A_0(z))$ — *приращение аргумента функции* $\det A_0(z)$, *когда* z *пробегает контур* Γ *один раз в положительном направлении,* $[l_1], [l_2], \cdots, [l_p]$ — *целые части чисел* $l_1, l_2, \cdots, l_p$, *а* n — *число уравнений в системе* (1).

В работе указан также конструктивный метод решения задачи (1), (2).

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения

Пусть G — односвязная область в верхней полуплоскости, γ — ее граница, содержащая интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$ действительной оси ox.

Для исследования задачи (1), (2) мы рассмотрим следующие вспомогательные задачи.

Задача В. *Найти в области* G *регулярное решение системы* (1), *принадлежащее классу* $M_0(0; l_0)$ *и удовлетворяющее граничному условию*

$$a_0(z)\frac{\partial u}{\partial x}+b_0(z)\frac{\partial u}{\partial y}+c_0(z)u=0,\ z\in(-\varepsilon,\varepsilon),\ z\neq 0, \tag{5}$$

где $a_0(z)$, $b_0(z)$ и $c_0(z)$ — квадратные матрицы n-го порядка, l_0 — положительное число.

Пусть функция $\zeta=x+\lambda_k y$ отображает область G на область G_k $(k=1, 2,\cdots, n)$ и пусть $G_0=\bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$.

Предположим, далее, что элементы матриц $a_0(z)$, $b_0(z)$ и $c_0(z)$ аналитичны в замкнутой области G_0 и $\det \widetilde{A}_0(z)\neq 0$, где $\widetilde{A}_0(z)$ — матрица, столбцами которой являются векторы

$$(a_0(z)+\lambda_j b_0(z))\,\alpha_j\ (j=1, 2,\cdots, n).$$

В области G_0 рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$F_0(\varphi)\equiv\widetilde{A}_0(z)\varphi'(z)+\widetilde{B}_0(z)\varphi(z)=\frac{i}{z^k}e_j$$

$$(k=1, 2,\cdots, m,\ j=1, 2,\cdots, n), \tag{6}$$

где $m=[l_0]$, $e_j=(0, 0,\cdots, 0, \underset{j}{1}, 0,\cdots, 0)$, $\widetilde{B}_0(z)$ — матрица, столбцами которой являются векторы $c_0(z)\alpha_j$ $(j=1, 2,\cdots, n)$, $\varphi(z)=(\varphi_1(z),\cdots$ $\cdots, \varphi_n(z))$ — искомое решение.

Решая уравнение (6) методом последовательных приближений и оценивая полученное решение, мы убедимся, что $\varphi'(z)$ удовлетворяет оценке

$$|\varphi'(z)|\leqslant\frac{\text{const}}{|z|^k}. \tag{7}$$

Частное решение системы уравнений (6) обозначим через

$$\varphi_{jk}(z)=(\varphi_{jk1}(z), \varphi_{jk2}(z),\cdots, \varphi_{jkn}(z)).$$

Пусть

$$u_{jk}(z)=\operatorname{Re}\sum_{p=1}^{n}\alpha_p\varphi_{jkp}(z_p). \tag{8}$$

Легко проверить, что $u_{jk}(z)$ является частным решением задачи (1), (5).

Имеет место следующая

Лемма 1. *Общее решение задачи* (1), (5) *задается формулой*

$$u(x, y)=u_0(x, y)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}c_{jk}u_{jk}(z), \tag{9}$$

где $u_0(x, y)$ — произвольное решение задачи (1), (5), *производные которого непрерывны в замкнутой области $\overline{G}$, c_{jk} — произвольные действительные постоянные, $u_{jk}(z)$ выше построенные частные решения задачи* (1), (5).

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (1), (5). Так как оно является решением системы (1), то имеем

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(z_k), \tag{10}$$

где $\varphi_k(z_k)$ — произвольная аналитическая функция аргумента $z_k = x + \lambda_k y$, при $(x, y) \in G$. Известно, что в представлении (10) производная функции φ_k линейно выражается через производные решения $u(x, y)$, поэтому $(\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z))$ также принадлежит классу $M_G(0; l_0)$.

Подставляя (10) в граничное условие (5), получим

$$\operatorname{Re} [\widetilde{A}_0(x) \varphi'(x) + \widetilde{B}_0(x) \varphi(x)] = 0, \quad x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \ x \neq 0, \tag{11}$$

где $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ — предельные значения $\varphi(z)$ и $\varphi'(z)$, при z стремящемся к x $(z \in G)$.

Из (11) следует, что вектор-функция

$$\Phi(z) = \widetilde{A}_0(z) \varphi'(z) + \widetilde{B}_0(z) \varphi(z) \tag{12}$$

аналитична в области $\Omega_0 = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$ и аналитически продолжается через отрезок $(-\varepsilon, \varepsilon)$ в симметричную область Ω_0^* относительно оси ox по принципу симметрии:

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})}, \text{ при } z \in \Omega_0^*. \tag{13}$$

Так как $\varphi(z) \in M_G(0; l_0)$, то $\Phi(z)$ аналитична в окрестности нуля всюду, кроме точки $x = 0$ и удовлетворяет оценке

$$|\Phi(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^{l_0}}. \tag{14}$$

Поэтому функция $\Phi(z)$ в окрестности точки $z = 0$ представляется в виде

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{m} i c_k z^{-k} + \Phi_0(z), \tag{15}$$

гое c_k — постоянные векторы, m — целая часть числа l_0, а $\Phi_0(z)$ — аналитическая функция в окрестности точки $z = 0$.

Из (11) и (12) следует, что c_k — действительные векторы. Подставляя $\Phi(z)$ из (15) в (12), получим

$$\widetilde{A}_0(z) \varphi'(z) + \widetilde{B}_0(z) \varphi(z) = \sum_{k=1}^{m} i c_k z^{-k} + \Phi_0(z), \quad z \in \Omega_0. \tag{16}$$

Общее решение уравнения (16) в окрестности точки $x = 0$ представляется в виде

$$\varphi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \tag{17}$$

где $\Phi_1(z)$ — частное решение уравнения (16) при $\Phi_0(z) = 0$, а $\Phi_2(z)$ является общим решением уравнения (16) при $c_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$.

Ясно, что в качестве функции $\Phi_1(z)$ можно взять линейную комбинацию функций $\varphi_{k_j}(z)$ с действительными коэффициентами, а функция $\Phi_2(z)$ аналитически продолжается в окрестность нуля.

Обозначим через D_ϵ пересечение области D с достаточно малой ϵ-окрестностью нуля.

Подставляя полученную функцию $\varphi(z)$ из (17) в общее решение (10), получим

$$u(x, y)=u_0(x, y)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}u_{jk}(x, y), \quad (x, y)\in E_\epsilon, \tag{18}$$

где $u_0(x, y)$ бесконечно-дифференцируемая функция в $\overline{D}_\epsilon$. Если обозначим через $u_0(x, y)$ в области G функцию, определенную формулой

$$u_0(x, y)=u(x, y)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}u_{jk}(x, y), \tag{19}$$

то согласно равенству (18), $u_0(x, y)$ удовлетворяет условию, сформулированному в лемме 1. Из (19) непосредственно следует лемма 1.

Пусть $f(x)\in N_\gamma(0; l_0)$. Рассмотрим следующее граничное условие:

$$\left(a_0(z)\frac{\partial u}{\partial x}+b_0(z)\frac{\partial u}{\partial y}+c_0(z)u\right)\Big|_{z=x}=f(x), \quad x\in(-\epsilon, \epsilon), \; x\neq 0, \tag{20}$$

где область G, функция $a_0(z)$, $b_0(z)$, $c_0(z)$ удовлетворяют условиям леммы 1.

В области G_0 рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\overline{A}_0(z)\varphi'(z)+\overline{B}_0(z)\varphi(z)=\Phi(z), \tag{21}$$

где

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-2\epsilon}^{2\epsilon}\frac{t^m\alpha(t)f(t)}{z^m(t-z)}\,dt, \tag{22}$$

$(z)=(\varphi_1(z),\cdots, \varphi_n(z))$ — искомая аналитическая вектор-функция в G_0, функция f — правая часть (20), $\alpha(t)$ — финитная, бесконечно-дифференцируемая функция на действительной оси, в интервале $(-\epsilon, \epsilon)$ равная единице, с носителем, содержащимся в интервале $(-2\epsilon, 2\epsilon)$.

Лемма 2. *Производная решения $\varphi(z)$ уравнения (21) непрерывна в замкнутой области $\overline{G}_0$, кроме, быть может, точки $z=0$ и удовлетворяет оценке*

$$|\varphi'(z)|\leqslant\frac{C_\delta}{|z|^{l_0+\delta}}, \tag{23}$$

где δ — сколь угодно малое положительное число, а C_δ — постоянная.

Доказательство. При наших предположениях на $f(t)$, функция в окрестности $z=0$ удовлетворяет следующей оценке ([11]):

$$|\Phi(z)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{c}{|z|^{l_0}}, & \text{если } l_0 \text{ — нецелое},\\[2ex] \dfrac{c}{|z|^{l_0}}\cdot\ln|z|^{-1}, & \text{если } l_0 \text{ — целое}.\end{cases} \tag{24}$$

Из неравенства (24) следует, что производная решения системы (21) удовлетворяет оценке (23).

Лемма 3. *Частное решение задачи* (1), (20) *в классе* $M_G(0; l_0)$ *задается формулой*

$$v_0(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k (x + \lambda_k y), \tag{25}$$

где $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z))$ *является частным решением дифференциального уравнения* (21).

Доказательство. Применяя формулу Сохоцкого—Племеля [12], мы убедимся, что

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in G}} \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-2\iota}^{2\iota} \frac{\alpha(t)\, t^m f(t)\, dt}{z^m (t - z)} = \alpha(x) f(x). \tag{26}$$

Используя равенство (26) и оценку (23), убедимся, что функция $v_0(x, y)$, определяемая формулой (25), является решением задачи (1), (20) в классе $M_G(0; l_0)$.

Из лемм 1 и 3 вытекает

Следствие 1. Общее решение задачи (1), (20) определяется формулой

$$u(x, y) = v_0(x, y) + u_0(x, y) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} u_{jk}(x, y), \tag{27}$$

где $u_{jk}(x, y)$ и $v_0(x, y)$ — функции, определяемые формулами (8) и (25), c_{jk}— произвольные действительные постоянные, $u_0(x, y)$—произвольное решение задачи (1), (5) в классе функций, имеющих непрерывные производные в замкнутой области $\overline{G}$.

Лемма 4. *Если линейная комбинация вектор-функций* $u_{jk}(x, y)$

$$l(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} u_{jk}(x, y) \tag{28}$$

имеет непрерывные производные в $\overline{G}$, *то* $c_{jk} = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n, k = 1, 2, \cdots, m)$.

Доказательство. Подставляя значение $u_{jk}(x, y)$ из (8) в (28), получим

$$l(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{\rho=1}^{n} \alpha_\rho \omega_\rho (x + \lambda_\rho y), \tag{29}$$

где

$$\omega_\rho (x + \lambda_\rho y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} \varphi_{jk\rho}(x + \lambda_\rho y). \tag{30}$$

Как указано выше в (29) производные функций $\omega_\rho(x + \lambda_\rho y)$ линейно выражаются через $\dfrac{\partial l(x, y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial l(x,y)}{\partial y}$, поэтому $\omega_\rho(x + \lambda_\rho y)$ принадлежит классу $C^1(\overline{D})$.

Применяя к обеим частям равенства (30) оператор F_0 и имея в виду, что вектор φ_{jk} является решением (6), получим

$$F_0\left(\omega_p\left(x+\lambda_p y\right)\right)\Big|_{y=0}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\frac{i}{x^k}e_j. \tag{31}$$

Ясно, что левая часть в (31) является непрерывной функцией по x. Умножая обе части равенства (31) на x^m и переходя к пределу при $x\to 0$, получим

$$c_{jm}=0 \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

Аналогично получим, что все коэффициенты $c_{jk}=0$. Лемма 4 доказана.

§ 2. Исследование задачи (1), (2)

Для простоты докажем теорему 1 в случае $p=1$, $x_1=0$. Задачу (1), (2) рассмотрим в классе функций $M_D(0;\, l)$, вектор-функция $f(t)$ в условии (2) берется из класса $N_\Gamma(0;\, l)$.

Пусть m—целая часть числа l, а $\alpha(x, y)$—бесконечно-дифференцируемая функция, носитель которой содержится в малой окрестности нуля, и в некоторой окрестности этой точки равна единице.

В качестве области G, удовлетворяющей условиям леммы 1, можно взять пересечение области D с малой окрестностью нуля. Если в качестве области G берем пересечение малой окрестности нуля с областью D, то матрицы $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ будут удовлетворять всем условиям леммы 1, поэтому согласно следствию 1 решение задачи (1), (2) естественно искать в виде

$$u(x, y)=\alpha(x, y)\, v_0(x, y)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\, \alpha(x, y)\, u_{jk}(x, y)+v(x, y), \tag{32}$$

где c_{jk} — действительные постоянные, а $v(x, y)$—дважды непрерывно-дифференцируемая вектор-функция в D, производные которой непрерывны в $\overline{D}$.

Подставляя $u(x, y)$ из (32) в уравнение (1) и граничное условие (2), получим

$$L\left(v(x, y)\right)=h_0(x, y)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\, h_{jk}(x, y),\quad (x, y)\in D, \tag{33}$$

$$a(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}+c(x, y)\, v=f(x, y)-f_0(x, y)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\, f_{jk}(x, y),\quad (x, y)\in\Gamma, \tag{34}$$

где

$$h_0(x, y)=L\left(\alpha(x, y)\, v_0(x, y)\right),\quad h_{jk}(x, y)=L\left(\alpha(x, y)\, u_{jk}(x, y)\right),$$

$$f_0(x, y)=F\left(\alpha(x, y)\, v_0(x, y)\right),\quad f_{jk}(x, y)=F\left(\alpha(x, y)\cdot u_{jk}(x, y)\right).$$

Так как функции $v_0(x, y)$ являются решениями задач (1), (20) и (1), (5), соответственно, а $\beta(x, y)$ равна единице в окрестности нуля, то функции $h_0(x, y)$, $h_{jk}(x, y)$, $f_{jk}(x, y)$ и $f(x, y)-f_0(x, y)$ равны нулю в окрестности нуля.

Отсюда, в частности, следует, что

$$h_0(x, y)=\beta(x, y)\, h_0(x, y),\quad h_{jk}(x, y)=\beta(x, y)\, h_{jk}(x, y),$$

где $\beta(x, y)$ — бесконечно дифференцируемая функция равная единице в объединении носителей функций $h_0(x, y)$ и $h_{jk}(x, y)$ и равная нулю в окрестности нуля. Следовательно, уравнение (33) можно записать в виде

$$L(v)=\beta(x, y)\, h_0(x, y)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\,\beta(x, y)\, h_{jk}(x, y). \tag{35}$$

В работе [13] получено фундаментальное решение уравнения $L(v)=0$. Если корни характеристического уравнения (I^*) простые, то фундаментальное решение имеет вид:

$$w(x, y)=\operatorname{Re}\,(a_1 l_n(x+\lambda_1 y)+\cdots+a_n l_n(x+\lambda_n y)),$$

где a_j ($j=1, 2,\cdots, n$) — некоторые постоянные квадратные матрицы n-го порядка, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Im}\,(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0.$$

Если $w(x, y)$ является фундаментальным решением уравнения $L(v)=0$, то частное решение уравнения (35) определяется формулой

$$v_1(x, y)=\tilde{h}_0(x, y)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\,\tilde{h}_{jk}(x, y), \tag{36}$$

где

$$\tilde{h}_0(x, y)=\iint\limits_{(D)} w(\xi-x, \eta-y)\,\beta(\xi, \eta)\, h_0(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{37}$$

$$\tilde{h}_{jk}(x, y)=\iint\limits_{(D)} w(\xi-x, \eta-y)\,\beta(\xi, \eta)\, h_{jk}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \tag{38}$$

В работе [14] рассматривается оператор

$$T_D=\iint\limits_{(D)}\frac{g(\xi, \eta)}{\zeta-z}\, d\xi d\eta,$$

где $z\in D$, $\zeta=\xi+i\eta$ и доказано, что если $g(\xi, \eta)$ бесконечно дифференцируема в области D и удовлетворяет условию Гельдера в $\overline{D}$, то функция $T_D(x, y)$ также бесконечно дифференцируема в области D и ее первые производные удовлетворяют условию Гельдера в $\overline{D}$.

В работе [12] показано, что если функция $\mu'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ, то интеграл типа Коши с плотностью $\mu(t)$ и контуром интегрирования Γ принадлежит классу $C^1_\alpha(\overline{D})$, где α — показатель Гельдера первых производных.

Применяя один раз формулу Грина для (37) и (38) и используя указанные выше результаты, мы убедимся, что функции $\tilde{h}_0(x, y)$ и

$\widetilde{h}_{jk}(x, y)$ бесконечно дифференцируемы в области D и принадлежат классу $C^1_*(\overline{D})$.

Общее решение уравнения (35) в классе $c^1_*(\overline{D})$ будет определяться формулой

$$v(x, y) = v_1(x, y) + \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j (x + \lambda_j y), \tag{39}$$

где $v_1(x, y)$ определяется формулой (36), $\psi_j(x + \lambda_j y)$—произвольная аналитическая функция аргумента $x + \lambda_j y$, при $(x, y) \in D$, принадлежащая классу $C^1(\overline{D})$.

Фуккцию $\psi_j(x + \lambda_j y)$ мы всегда можем представить в виде

$$\psi_j(x + \lambda_j y) = (x + \lambda_j y - x_0 - \lambda_j y_0)\, \omega_j(x + \lambda_j y) + c_j, \tag{40}$$

где c_j— комплексная постоянная, $\omega_j(x + \lambda_j y)$ аналитична по аргументу $x + \lambda_j y$ при $(x, y) \in D$ и принадлежит классу $C_1(\overline{D})$, а (x_0, y_0)— фиксированная точка в области D.

Подставляя (40) в (39) получим общее решение уравнения (35) в виде

$$v(x, y) = v_1(x, y) + \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} a_j (x - x_0 + \lambda_j (y - y_0))\, \omega_j (x + \lambda_j y) + d, \tag{41}$$

где $d = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$— произвольный постоянный вектор. В представлении (41) функция $\omega_j(x + \lambda_j y)$ и d единственным образом определяются через решение уравнения (33).

Подставляя (41) в граничное условие (34) и используя (36), для определения функции $\omega_j(x + \lambda_j y)$, действительного вектора d и действительных чисел c_{jk} получим следующую задачу сопряжения:

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} [a(x, y) + \lambda_j b(x, y))\, a_j\, \omega_j'(x + \lambda_j y)(x - x_0 + \lambda_j (y - y_0)) + (a(x, y) +$$
$$+ \lambda_j b(x, y) + c(x, y))\, a_j\, \omega_j] = \overline{f}(x, y) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} \overline{f}_{jk}(x, y) - c(x, y)\, d,$$
$$(x, y) \in \Gamma, \tag{42}$$

где

$$\overline{f}(x, y) = f(x, y) - f_0(x, y) - F(h_0(x, y)), \tag{43}$$

$$\overline{f}_{jk}(x, y) = F(\widetilde{h}_{jk}(x, y)) - f_{jk}(x, y). \tag{44}$$

Под решением (42) мы понимаем вектор ψ с компонентами

$$\omega_1(x + \lambda_1 y), \cdots, \omega_n(x + \lambda_n y),\ d_1, d_2, \cdots, d_n,$$
$$c_{kj}\ (k = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n).$$

Линейная независимость рассматривается относительно поля действительных чисел.

Если $\overline{f}(x, y) \equiv 0$, то задачу (42) будем называть однородной задачей.

Задача вида (42) является краевой задачей Римана со сдвигом, которая хорошо исследована в монографиях [9], [12], [15].

Эта краевая задача, содержащая также неизвестные постоянные, исследована в работе [8]. Применяя результаты работы [8], для краевой задачи (42) получим: если $\det A_0(z) \neq 0$, $z \in \Gamma$, то

1) однородная задача (42) имеет конечное число линейно-независимых решений (это число обозначим через k);

2) для разрешимости неоднородной задачи (42) необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $\tilde{f}(x, y)$ удовлетворяла конечному числу условий вида

$$\int\limits_{\Gamma} \Theta_j(x, y)\, \tilde{f}(x, y)\, ds = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, k'), \tag{45}$$

где $\Theta_1(x, y), \cdots, \Theta_{k'}(x, y)$ — n-мерные линейно-независимые вектор-строки на Γ;

3) индекс задачи: $k - k' = \varkappa$, где $\varkappa$ определяется формулой (2*).

Ясно, что задача (1), (2) и задача (42) эквивалентны. Условие (45) является необходимым и достаточным также и для разрешимости задачи (1), (2). Решение же задачи (1), (2) получается из решения однородной задачи (42) по формуле

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} \left(u_{jk}(x, y) - \tilde{h}_{jk}(x, y)\right) +$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x - x_0 + \lambda_j (y - y_0))\, \omega_j (x + \lambda_j y) + d, \tag{46}$$

где вектор-функции $u_{jk}(x, y)$ и $\tilde{h}_{jk}(x, y)$ определены выше, причем $\tilde{h}_{jk}(x, y) \in C^1(\bar{D})$.

В формуле (46) аналитические функции $\omega_j(x + \lambda_j y)$ и постоянные c_{jk}, d_j ($k = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$) определяются по $u(x, y)$ единственным образом. Действительно, если $u(x, y) \equiv 0$, то в силу (46) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} u_{jk}(x, y)$ будет принадлежать классу $C^1(\bar{D})$ и согласно лемме 4 $c_{jk} = 0$, следовательно

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x + \lambda_j y - x_0 - \lambda_j y_0)\, \omega_j (x + \lambda_j y) + d \equiv 0 \text{ в } D. \tag{47}$$

Отсюда и получим, что $\omega_j(x + \lambda_j y) \equiv 0$ и $d = 0$. Поэтому числу линейно независимых решений однородной задачи (1), (2) равно числу линейно независимых решений однородной задачи (42).

Подставляя $\tilde{f}(x, y)$ из (43) в (45), получим

$$L_j(f) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, k'), \tag{48}$$

где $L_j(f)$ — линейные функционалы от f. Докажем, что эти линейные функционалы также линейно независимы.

Действительно, пусть

$$c_1 L_1(f) + c_2 L_2(f) + \cdots + c_{k'} L_{k'}(f) = 0. \tag{49}$$

Возьмем в качестве f произвольную функцию, равную нулю в окрестности нуля, тогда $\bar{f} = f$ и

$$L_j(f) = \int_\Gamma \Theta_j(x, y) f(x, y)\, ds. \tag{50}$$

Подставляя (50) в (49), получим

$$\int_\Gamma (c_1\Theta_1 + c_2\Theta_2 + \cdots + c_{k'}\Theta_{k'}) f\, ds = 0.$$

Отсюда в силу произвольности f, имеем

$$c_1\Theta_1 + c_2\Theta_2 + \cdots + c_{k'}\Theta_{k'} = 0.$$

Но тзк как $\Theta_1, \cdots, \Theta_{k'}$ линейно независимы, то $c_1 = c_2 = \cdots = c_{k'} = 0$. Следовательно, эти функционалы линейно независимы, то есть число условий разрешимости задачи (1), (2) равно числу условий разрешимости задачи (42).

Таким образом, индексы этих двух задач совпадают и индекс задачи (1), (2) также определяется формулой (2*).

Если в окрестности точки разрыва граничной функции $f(z)$ контур Γ является аналитической дугой, то при помощи конформного отображения области D, задачу (1), (2) можно привести к исследованному случаю и доказать справедливость теоремы 1 и в этом случае.

Аналогичным образом можно решить эту задачу и в случае, когда корни характеристического уравнения (1) кратные.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Н. Е. Товмасяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный
университет

Поступила 16.IX.1983

Վ. Հ. ՕՀԱՆՅԱՆ. Խզվող եզրային պայմաններով երկրորդ կարգի էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի համար Պուանկարեի խնդիրը (*ամփոփում*)

Հարթ, միակապ, սահմանափակ ողորկ եզրով D տիրույթում դիտարկվում է Պուանկարեի խնդիրը էլիպտական համակարգի համար։ Ենթադրվում է, որ եզրային ֆունկցիան D-ի եզրի ցանկացած կետի շրջակայքում բավարարում է Հյոլդերի պայմանին, բացի վերջավոր թվով կետերից, որոնցում կարող է ունենալ խզում։

Լուծումը փնտրվում է այնպիսի ֆունկցիաների դասում, որոնք անընդհատ են և ունեն անընդհատ առաջին կարգի ածանցյալներ $\bar{D}$-ում, բացառությամբ թերևս նշված կետերից, որոնց շրջակայքում ածանցյալները բավարարում են որոշ պայմանների։

Ապացուցված է, որ որոշակի պայմանների առկայության դեպքում խնդիրը նյոթերյան է։ Գտնված է խնդրի ինդեքսը։

V. H. OHANIAN. *The Poincare problem for the elliptic system of differential equations with discontinuous boundary conditions* (summary)

For the elliptic system the Poincare problem is considered in a planar simple-connected bounded domain D with a smooth boundary. It is assumed that the boundary function satisfies Holder condition except a finite number of points where the continuity may fail.

We look for the solution among continuous functions, having first derivatives in $\overline{D}$, except the points mentioned, in a vincinity of which the derivatives satisfy certain conditions.

It is proved that then the problem is noetherian. The index of the problem is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Граничные задачи для систем линейных уравнений эллиптического типа, Сообщ. АН Груз. ССР, 5, № 3, 1944, 761—770.
2. *И. Н. Векуа.* Новые методы решения эллиптических уравнений, М., 1948.
3. *М. И. Вишик.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Мат. сб., 29(71), № 3, 1951, 615—676.
4. *Б. В. Боярский.* Некоторые граничные задачи для системы 2-уравнений эллиптического типа на плоскости, ДАН СССР, 124, № 1, 1959, 15—18.
5. *А. И. Вольперт.* Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, Труды ММО, 10, 1961, 41—87.
6. *А. Джураев.* К вопросу об индексе и нормальной разрешимости задач Дирихле и Пуанкаре для общей эллиптической системы второго порядка с двумя независимыми переменными, ДАН Таджикской ССР, т. 7, 1964, 3—6.
7. *Я. Б. Лопатинский.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, Укр. матем. ж., 5, № 2, 1953, 123—151.
8. *Н. Е. Товмасян.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифференциальные уравнения, 11, № 1, 2, 1966, 3—23, 163—171.
9. *Н. П. Векуа.* Системы сингулярных интегральных уравнений, М., 1970.
10. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966.
11. *В. А. Оганян.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными граничными условиями, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XVI, № 6, 1981, 465—477.
12. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968.
13. *Н. Е. Товмасян.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка, не удовлетворяющих условию Я. Б. Лопатинского, Сиб. матем. журн., VII, № 4, 1966, 920—938.
14. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, М., 1959.
15. *Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., 1977.