

УДК 517.53

Г. В. МИКАЕЛЯН

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, АССОЦИИРОВАННОЕ С ФУНКЦИЯМИ, МЕРОМОРФНЫМИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

§ 0. В в е д е н и е

0.1. В работах [1], [2], [3] Л. А. Рубела, Б. А. Тейлора и Г. Р. Маклейна важную роль играет следующая лемма*.

Лемма. Пусть функция $f(z)$ ($f(0)=1$) с последовательностью нулей $Z=\{z_n\}_1^\infty$, аналитична в круге $|z|<R\leq\infty$ и в окрестности точки $z=0$ имеет место разложение

$$\log f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k. \quad (0.1)$$

Тогда при $0 < r < R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\log |f(re^{i\theta})| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(r) e^{ik\theta}, \quad (0.2)$$

где $c_k(r)$ определяются по формулам

$$c_0(r) = \sum_{|z_n| < r} \log \frac{r}{|z_n|}, \quad (0.3)$$

$$c_k(r) = \frac{1}{2} \beta_k r^k + \frac{1}{2k} \sum_{|z_n| < r} \left[\left(\frac{r}{z_n} \right)^k - \left(\frac{z_n}{r} \right)^k \right], \quad (0.4)$$

$$c_{-k}(r) = \overline{c_k(r)}^{**} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (0.5)$$

Следуя работе Рубела и Тейлора [2] дадим следующее определение.

По произвольным двум последовательностям комплексных чисел $\beta \equiv \{\beta_k\}_1^\infty$ и $Z \equiv \{z_k\}_1^\infty$, $z_k \neq 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$, построим последовательность $\{c_k(r)\} \equiv \{c_k(r; z; \beta)\}$, $k=0, \pm 1, \dots$ по формулам (0.3), (0.4), (0.5). $\{c_k(r)\}$ назовем последовательностью коэффициентов Фурье ассоциированной с последовательностью Z .

В работе [2] была доказана следующая

Теорема. Пусть $\{c_k(r)\} \equiv \{c_k(r; Z; \beta)\}$, $k=0, \pm 1, \dots$ — последовательность коэффициентов Фурье, ассоциированная с Z , такая, что для любого $r > 0$

* Она по существу восходит к давним работам Ф. и Р. Неванлинна [4], [5], а в ясном виде формулы этой леммы впервые встречаются в статьях Н. И. Ахизера [6] и М. А. Карпрат [7].

** Здесь и всюду в этой статье черта над величиной будет означать комплексное сопряжение.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r)|^2 < +\infty. \quad (0.6)$$

Тогда существует единственная целая функция $f(z)$ ($f(0)=1$), нули которой совпадают с Z , а последовательность коэффициентов Фурье функции $\log |f(re^{i\theta})| - c |c_k(r)|$.

0.2. В § 1 настоящей статьи устанавливаются формулы для преобразования Фурье

$$\mathcal{Q}_f(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log |f(u+iv)| du \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < v < 0),$$

где $f(w) = f(u+iv)$ — мероморфная в полуплоскости $G^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < 0\}$ функция.

В § 2 по предварительно заданной функции $\mathcal{Q}(x; v: W, Z)$ строится мероморфная в полуплоскости $G^{(-)}$ функция $f(w)$ с нулями на последовательности $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$, полюсами на $Z \equiv \{z_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$, и такая, что $\mathcal{Q}_f(x, v)$ совпадает с заданной функцией.

В § 3 строится мероморфная в $G^{(-)}$ функция с заданной последовательностью нулей $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$, рост которой оценивается числовой функцией множества ее нулей W .

В заключение выражаю благодарность М. М. Джрбашяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

§ 1. Основные формулы

1.1. Пусть последовательность комплексных чисел $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ лежит в полуплоскости $G^{(-)}$, причем число точек w_k в каждой полосе $D(a, b) = \{w: -\infty < a \leq \operatorname{Im} w \leq b < 0\}$ конечно.

Для $-\infty < x < +\infty$, $x \neq 0$, $-\infty < v_0 < v < 0$ введем следующие функции:

$$S(x; v_0, v: W) \equiv \frac{1}{2x} \sum_{v_0 < v_k < v} e^{-ixu_k + xv_k} + \frac{e^{xv_0}}{4x} \sum_{v_k = v_0} e^{-ixu_k}, \quad (1.1)$$

$$S_0(x; v_0, v: W) \equiv -e^{xv} \bar{S}(-x; v_0, v: W). \quad (1.2)$$

Докажем теорему.

Теорема 1. Пусть $f(w)$ — мероморфная функция в полуплоскости $G^{(-)}$ с последовательностями нулей $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ и полюсов $Z \equiv \{z_k\}_1^\infty \equiv \{t_k + it_k\}_1^\infty$, причем число нулей и полюсов в полосах $D(a, b)$ конечно и равномерно по v в любом конечном промежутке, $v \in [a, b] \subset (-\infty, 0)$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f''(u+iv)}{f(u+iv)} = 0. \quad (1.3)$$

Тогда, если при некоторых v_0 ($-\infty < v_0 < 0$) и x ($-\infty < x < +\infty$, $x \neq 0$) существует интеграл

$$\frac{e^{xv_0}}{1 - 2\pi i x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{f(u + iv)}{f(u + iv)} du = h(x, v_0), \quad (1.4)$$

то при любом v ($-\infty < v_0 < v < 0$) справедлива формула

$$\begin{aligned} \Omega_j(x, v) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi} ix} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \operatorname{Re} \frac{f'(u + iv)}{f(u + iv)} du = \\ &= \frac{1}{2} [e^{-xv} h(x, v_0) + e^{xv} \bar{h}(-x, v_0)] - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-xv} [S(x; v_0, v; W) - S(x; v_0, v; Z)] + \\ &+ \sqrt{2\pi} [S_0(x; v_0, v; W) - S_0(x; v_0, v; Z)]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Доказательство. В полуплоскости $G^{(-)}$ рассмотрим область D , которая получается из прямоугольника с вершинами в точках $\sigma_n + iv_0$, $\sigma_n + iv$ ($v_0 < v < 0$, $n = 1, 2$) выбрасыванием из него малых полукругов с центрами в точках w_k , z_k ($\operatorname{Im} w_k = v_0, v$; $\operatorname{Im} z_k = v_0, v$).

Рассмотрим интеграл

$$I(x) \equiv \int_{\partial D} e^{-ix\zeta} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

где ∂D — граница области D , ориентированная против часовой стрелки. В силу условия (1.3)

$$\lim_{\sigma_n \rightarrow \infty} \int_{\sigma_n}^v e^{-ix(\sigma_n + it)} \frac{f'(\sigma_n + it)}{f(\sigma_n + it)} dt = 0. \quad (1.6)$$

Далее, для $\zeta \in \partial D$ и малых $r > 0$ введем функции

$$\begin{aligned} I_1(\zeta, r) &\equiv -ir \int_{\pi}^{2\pi} e^{-ix(\zeta + re^{i\varphi})} \frac{f'(\zeta + re^{i\varphi})}{f(\zeta + re^{i\varphi})} e^{i\varphi} d\varphi, \\ I_2(\zeta, r) &\equiv -ir \int_0^{\pi} e^{-ix(\zeta + re^{i\varphi})} \frac{f'(\zeta + re^{i\varphi})}{f(\zeta + re^{i\varphi})} e^{i\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Обозначим через p_k и q_k , соответственно, кратности нуля w_k и полюса z_k . Легко можно убедиться в том, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_{1,2}(w_k, r) = -ip_k e^{-ixw_k} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (1.7)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_{1,2}(z_k, r) = ip_k e^{-ixz_k} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.8)$$

Следовательно, в силу (1.6), (1.7), (1.8) и теоремы о вычетах для интеграла

$$H(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{f'(u+iv)}{f(u+iv)} du \quad (1.9)$$

справедлива формула

$$e^{xv} H(x, v) = -\sqrt{2\pi} i \sum_{v_k \sim v_0 < v} e^{-ixw_k} + \sqrt{2\pi} i \sum_{v_0 < \rho_k < v} e^{-ixz_k} - \\ - \frac{\sqrt{2\pi}}{2} i \sum_{v_k \sim v_0, v} e^{-ixw_k} + \frac{\sqrt{2\pi}}{2} i \sum_{\rho_k \sim v_0, v} e^{-ixz_k} + ixh(x, v_0). \quad (1.10)$$

В суммах (1.10) каждый нуль и полюс считаются столько раз каковы их кратности.

Замечая теперь, что

$$\Omega_f(x, v) = \frac{1}{2ix} \{H(x, v) + \bar{H}(-x, v)\}, \quad (1.11)$$

в силу (1.10) получаем формулу (1.5).

Теорема доказана.

В случае, когда функция $f(w)$ аналитична, формула (1.5) принимает следующий вид:

$$\Omega_f(x, v) = \frac{1}{2} \{e^{-xv} h(x, v_0) + e^{xv} \bar{h}(-x, v_0)\} - \\ - \sqrt{2\pi} e^{-xv} S(x; v_0, v; W) + \sqrt{2\pi} S_0(x; v_0, v; W). \quad (1.12)$$

Отметим два следствия из этой теоремы.

Следствие 1. Пусть мероморфная в полуплоскости $G^{(-)}$ функция $f(w)$ обладает свойством (1.3) теоремы 1 и кроме того для любого v ($-\infty < v < 0$)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} |f(u+iv)| = 1, \quad (1.13)$$

причем последовательности нулей $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{\kappa_k + iv_k\}_1^\infty$ и полюсов $\{z_k\}_1^\infty \equiv \{t_k + i\rho_k\}_1^\infty$ функции удовлетворяют условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0. \quad (1.14)$$

Тогда, если при некоторых v_0 ($v_0 < v_k, v_0 < \rho_k; k=1, 2, \dots$) и x ($-\infty < x < +\infty, x \neq 0$) интеграл

$$\frac{e^{xv_0}}{\sqrt{2\pi} ix} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{f'(u+iv_0)}{f(u+iv_0)} du = h(x) \quad (1.15)$$

существует, то он не зависит от v_0 и при v ($-\infty < v < 0$) справедлива формула

$$\Omega_f(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log |f(u+iv)| du = \frac{1}{2} \{e^{-xv} h(x) + e^{xv} \bar{h}(-x)\} -$$

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{v_k < v} e^{-ixv_k} \operatorname{sh}(x(v_k - v)) + \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{\rho_k < v} e^{-ix\rho_k} \operatorname{sh}(x(\rho_k - v)). \quad (1.16)$$

Покажем, что $h(x)$ не зависит от v_0 ($v_0 < v_k$, $v_0 < \rho_k$; $k = 1, 2, \dots$). В самом деле, рассмотрим интеграл

$$\int e^{-ix\zeta} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

взятый по контуру прямоугольника с вершинами в точках $\sigma_n + iv_0$, $\sigma_n + iv$ ($n = 1, 2$; $v < v_0 < v_k$, $v_0 < \rho_k$; $k = 1, 2, \dots$) и, очевидно, тождественно равный нулю для всех x ($-\infty < x < +\infty$).

Замечая, что согласно условию (1.3)

$$\lim_{\sigma_n \rightarrow +\infty} \int_{v_0}^{v_0 + it} e^{-ix(\sigma_n + it)} \frac{f'(\sigma_n + it)}{f(\sigma_n + it)} dt = 0,$$

получаем требуемое утверждение.

Так как ввиду (1.13)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log |f(u + iv)| du = \frac{1}{ix} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \operatorname{Re} \frac{f'(u + iv)}{f(u + iv)} du,$$

то из (1.5), в силу (1.14), получаем формулу (1.16).

Следствие 2. Пусть в условиях следствия 1 для некоторого v ($-\infty < v < 0$) функция $\log |f(u + iv)|$ ($-\infty < u < \infty$) принадлежит классу $L_1(-\infty, +\infty)$ и для любого x ($-\infty < x < 0$) сходится интегралы (1.15):

Тогда справедлива формула

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \log |f(u + iv)| du &= \frac{1}{2} h(-0) - \\ &- \sqrt{2\pi} \sum_{v_k < v} (v_k - v) + \sqrt{2\pi} \sum_{\rho_k < v} (\rho_k - v), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$h(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} h(x). \quad (1.18)$$

Она следует из (1.16) путем перехода к пределу при $x \rightarrow -0$.

Разумеется следствия 1 и 2 остаются справедливыми и в том случае, когда (1.14) заменяется условием конечности числа нулей и полюсов функции $f(w)$.

Таким образом, мы пришли к следующему результату, принадлежащему Б. Я. Левину (см. [8], гл. IV, § 2).

Пусть функция $f(z)$ мероморфна в замкнутой правой полуплоскости, причем $f(0) = 1$. Тогда при условии сходимости интеграла в (1.19) и $R > 0$ справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log |f(R \cos \vartheta e^{i\vartheta})| \frac{d\vartheta}{R \cos^2 \vartheta} = \sum_m \left(\frac{\cos \varphi_m}{r_m} - \frac{1}{R} \right) -$$

$$- \sum_n \left(\frac{\cos \psi_n}{\rho_n} - \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} f'(0), \quad (1.19)$$

где $r_m e^{i\varphi_m}$ — нули, $\rho_n e^{i\psi_n}$ — полюсы функции $f(z)$, лежащие в области $\left\{ z: \left| z - \frac{R}{2} \right| < \frac{R}{2} \right\}$.

Формула (1.19) получается из (1.17) посредством преобразования $z = -\frac{i}{w}$, переводящего $G^{(-)}$ в правую полуплоскость. В самом деле, так как в окрестности точки $z=0$

$$\log |f(z)| = \operatorname{Re} [f'(0)z + \dots],$$

то для малых $R_0 > 0$

$$h(-0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log |f(R_0 \cos \vartheta e^{i\vartheta})| \frac{d\vartheta}{R_0 \cos^2 \vartheta} = \sqrt{2\pi} \operatorname{Re} f'(0).$$

1.2. Пусть последовательность $\{w_k\}_1^\infty = \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$) лежит в полуплоскости $G^{(-)}$ и при $-\infty < \rho < 0$

$$B_\rho(w) \equiv B_\rho(w; w_k) \equiv \prod_{v_k < \rho} \frac{w - w_k}{w - w_k - 2i\rho} \quad (\operatorname{Im} w < \rho). \quad (1.20)$$

Положив для $v_0 < v_k$; $k=1, 2, \dots$

$$h_\rho(x) = \frac{e^{xv_0}}{\sqrt{2\pi}ix} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{B_\rho(u+iv_0)}{B_\rho(u+iv_0)} du \quad (-\infty < x < +\infty, x \neq 0), \quad (1.21)$$

будем иметь

$$h_\rho(x) = \frac{2e^{xv_0}}{\sqrt{2\pi}x} \sum_{v_k < \rho} (v_k - \rho) e^{-ixu_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixu}}{[u+i(v_0-v_k)][u+i(v_0+v_k-2\rho)]} du.$$

Вычислив последний интеграл, получаем

$$h_\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0 \\ 2 \frac{\sqrt{2\pi}}{x} e^{x\rho} \sum_{v_k < \rho} e^{-ixu_k} \operatorname{sh}(x(v_k - \rho)) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Далее, легко можно проверить, что равномерно по $v \in [a, b] \subset (-\infty, 0)$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{B_p(u+iv)}{B_p(u+iv)} = 0 \quad (1.23)$$

и для любого v ($-\infty < v < 0$)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} B_p(u+iv) = 1. \quad (1.24)$$

Таким образом, в силу формулы (1.16) при $-\infty < v < \rho$, $-\infty < x < +\infty$, $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \Omega_{B_p}(x, v) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log |B_p(u+iv)| du = \\ &= \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{e^{|x|(v-\rho)}}{|x|} \sum_{v < v_k < \rho} e^{-ixu_k} \operatorname{sh}(|x|(v_k - \rho)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{sh}(|x|(v-\rho))}{|x|} \sum_{v_k < v} e^{-ixu_k + |x|(v_k - \rho)} \right\}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Но так как для любого v ($-\infty < v < 0$) $\log |B_p(u+iv)| \in L_1(-\infty, +\infty)$, то справедлива также формула

$$\begin{aligned} \Omega_{B_p}(0, v) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \log |B_p(u+iv)| du = \\ &= \sqrt{2\pi} \left\{ \sum_{v < v_k < \rho} (v_k - \rho) + (v - \rho) \sum_{v_k < v} 1 \right\}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Если последовательность $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k| < +\infty \quad (1.27)$$

и

$$B_0(w) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \frac{w - \overline{w_k}}{w - v_k} \quad (\operatorname{Im} w < 0), \quad (1.28)$$

то в силу оценки (см., напр., [10])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \log \left| \frac{u+iv-\overline{w_k}}{u+iv-w_k} \right| \right| du < \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|,$$

формулы (1.25) и (1.26) справедливы и при $\rho=0^*$.

§ 2. Преобразование Фурье, ассоциированное с последовательностью комплексных чисел

Пусть последовательность комплексных чисел $w = \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{u_k + iv_k\}_{k=1}^{\infty} \subset G^{(-)}$ удовлетворяет условию

* Формулы (1.25) и (1.26) в случае $\rho=0$ прямым подсчетом установлены в работе [11].

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0, \quad (2.1)$$

и $h(x)$ ($-\infty < x < +\infty$, $x \neq 0$) — произвольная функция.

Далее, условимся для любых v ($-\infty < v < 0$) и x ($-\infty < x < +\infty$, $x \neq 0$) обозначать через

$$S(x; v; W) \equiv \frac{1}{2x} \sum_{v_k < v} e^{-ixv_k + xv_k}, \quad (2.2)$$

$$S_0(x; v; W) \equiv \frac{e^{xv}}{2x} \sum_{v_k < v} e^{-ixv_k - xv_k}. \quad (2.3)$$

Определим теперь функцию

$$\Omega(x; v; w) \equiv \frac{1}{2} [e^{-xv} h(x) + e^{xv} \bar{h}(-x) -$$

$$- \sqrt{2\pi} \{e^{-xv} S(x; v; W) - S_0(x; v; W)\}] (-\infty < x < 0), \quad (2.4)$$

$$\Omega(x; v; W) \equiv \bar{\Omega}(-x; v; W) \quad (0 < x < +\infty), \quad (2.5)$$

и назовем ее преобразованием Фурье, ассоциированным с последовательностью W .

Докажем теорему.

Теорема 2. Пусть $\Omega(x; v; W) \equiv \Omega(x, v)$ — преобразование Фурье, ассоциированное с последовательностью W , причем

- а) $h(x) = 0$ при $0 < x < +\infty$,
- б) при любом v ($-\infty < v < 0$)

$$\Omega(x, v) \in L_2(-\infty, 0), \quad (2.6)$$

в) при любом v ($-\infty < v < 0$) существует v_0 ($v_0 < v$, $v_0 < v_k$; $k=1, 2, \dots$), такое, что функция $x e^{x(v-v_0)} \Omega(x, v)$ непрерывна и ее преобразование Фурье на полуоси $(-\infty, 0)$ принадлежит классу $L_1(-\infty, +\infty)$.

Тогда существует единственная аналитическая в полуплоскости $G^{(-)}$ функция $f(w)$ со свойствами:

- 1) Равномерно по $v \in [a, b] \subset (-\infty, 0)$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f'(u + iv)}{f(u + iv)} = 0,$$

и для любого v ($-\infty < v < 0$) $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u + iv) = 1$.

- 2) при любом v ($-\infty < v < 0$)

$$\log |f(u + iv)| \in L_2(-\infty, +\infty),$$

- 3) нули $f(w)$ совпадают с w ,

- 4) $\Omega_f(x, v) = \Omega(x, v)$ ($-\infty < v < 0$).

Доказательство. Для $-\infty < v < 0$ введем следующие функции:

$$\Phi(u+ip) \equiv \text{l.i.m.}_{v \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tzu} \Omega(z, \rho) dz^*, \quad (2.7)$$

$$P_\rho(w) \equiv \exp \left\{ \frac{2i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ip}^{+\infty+ip} \frac{\Phi(z) dz}{z-w} \right\}, \quad (2.8)$$

$$f_\rho(w) \equiv B_\rho(w) P_\rho(w). \quad (2.9)$$

Функция $f_\rho(w)$ аналитична в полуплоскости $G_\rho^{(-)} = \{w: \text{Im } w < \rho\}$, и ее нули совпадают с теми w_k , которые лежат в $G_\rho^{(-)}$.

Докажем, что для любого v ($-\infty < v < \rho$)

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} f_\rho(u+iv) = 1.$$

В самом деле, во-первых, мы имеем формулу (1.24), во-вторых так как при $v \in (-\infty, \rho)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(x+ip)}{x+ip-u-iv} dx \right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Phi(x+ip)|}{|(x-u)^2 + (\rho-v)^2} dx \leq \\ &\leq \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x+ip)|^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + (\rho-v)^2} \right\}^{1/2} < +\infty, \end{aligned}$$

то для любого v ($-\infty < v < \rho$)

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} P_\rho(u+iv) = 1.$$

В силу формулы

$$\frac{P'_\rho(w)}{P_\rho(w)} = \frac{2i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty+ip}^{+\infty+ip} \frac{\Phi(z)}{(z-w)^2} dz \quad (2.10)$$

и оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(x+ip)}{(x+ip-u-iv)^2} dx \right| &\leq \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x+ip)|^2 dx \right\}^{1/2} \times \\ &\times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{[x^2 + (\rho-b)^2]^2} \right)^{1/2} \quad (-\infty < v < b < \rho) \end{aligned}$$

имеем также, что равномерно по $v \in [a, b] \subset (-\infty, 0)$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{P'_\rho(u+iv)}{P_\rho(u+iv)} = 0.$$

Отсюда, учитывая (1.23), получаем, что равномерно по $v \in [a, b]$

* l.i.m. означает предел по норме пространства $L_2(-\infty, +\infty)$.

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{f'_\rho(u+iv)}{f_\rho(u+iv)} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{P'_\rho(u+iv)}{P_\rho(u+iv)} + \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{B'_\rho(u+iv)}{B_\rho(u+iv)} = 0.$$

Замечая, что при любом $v \in (-\infty, \rho)$

$$\log |B_\rho(u+iv)| \in L_2(-\infty, +\infty),$$

а также

$$\log |P_\rho(u+iv)| = \frac{2(\rho-v)}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(x+ip)}{(x-u)^2 + (\rho-v)^2} dx \in L_2(-\infty, +\infty)$$

как свертка двух функций из $L_1(-\infty, +\infty)$ и $L_2(-\infty, +\infty)$, мы получаем, что при любом $v \in (-\infty, \rho)$

$$\log |f_\rho(u+iv)| \in L_2(-\infty, +\infty).$$

Докажем теперь, что при $v < \rho$

$$\Omega_{f_\rho}(x, v) = \Omega(x, v). \quad (2.11)$$

Для этого, в силу следствия 1 теоремы 1, достаточно показать, что при некотором v_0 ($v_0 < \rho$, $v_0 < v_k$; $k=1, 2, \dots$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{xv_0}}{ix} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{f'_\rho(u+iv_0)}{f_\rho(u+iv_0)} du = h(x) (x \neq 0). \quad (2.12)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{(z-w)^2} \in L_2(-\infty, +\infty),$$

из (2.7) и (2.10) получаем

$$\frac{P'_\rho(w)}{P_\rho(w)} = \frac{2i}{(2\pi)^{3/2}} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u+ip-w)^2} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{t-u} \Omega(\tau, \rho) d\tau du.$$

Меняя здесь порядок интегрирования и используя формулу (см. [12], стр. 323, № 9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{t-u}}{(u+ip-w)^2} du = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau > 0 \\ 2\pi e^{-\tau(\rho+lw)} & \text{при } \tau < 0 \end{cases}$$

приходим к равенству

$$\frac{P'_\rho(w)}{P_\rho(w)} = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \tau e^{-\tau\rho} e^{t-w} \Omega(\tau, \rho) d\tau.$$

А это ввиду условия в) означает, что при некотором v_0 ($v_0 < \rho$, $v_0 < v_k$; $k=1, 2, \dots$) справедлива формула обращения (см., напр., [9], теорема 1.9)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{xv_0}}{ix} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{P'_\rho(u+iv_0)}{P_\rho(u+iv_0)} du = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0 \\ 2e^{x\rho} \Omega(x, \rho) & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Из (1.21), (1.22) и (2.13) вытекает справедливость формулы (2.12).

Докажем, что при $\rho' > \rho$ $f_{\rho'}$ является аналитическим продолжением f_{ρ} .

В самом деле, рассмотрим следующую функцию:

$$F(w) = \frac{f_{\rho'}(w)}{f_{\rho}(w)} \quad (\operatorname{Im} w < \rho).$$

Ввиду (2.11) при $v < \rho$ и $x \neq 0$

$$\Omega_F(x, v) = \Omega_{f_{\rho'}}(x, v) - \Omega_{f_{\rho}}(x, v) = 0.$$

Но так как при любом $v \in (-\infty, \rho)$

$$\log |F(u + iv)| \in L_2(-\infty, +\infty),$$

то согласно теореме Планшереля преобразование Фурье функции $\log |F(u + iv)|$ в классе $L_2(-\infty, +\infty)$ почти всюду совпадает с $\Omega_F(x, v)$, и поэтому $|F(w)| \equiv 1$ при $\operatorname{Im} w < \rho$. С другой стороны

$$\lim_{u \rightarrow \infty} F(u + iv) = 1 \quad (-\infty < v < \rho).$$

Следовательно, $F(w) \equiv 1$ при $\operatorname{Im} w < \rho$.

Теперь определим функцию $f(w)$ следующим образом:

$$f(w) \equiv f_{\rho}(w) \quad \text{при } \operatorname{Im} w < \rho.$$

Легко можно проверить, что функция $f(w)$ аналитична во всей полуплоскости $G^{(-)}$ и обладает свойствами 1), 2), 3), 4).

Докажем единственность функции $f(w)$. Допустив существование двух таких функций f_1, f_2 , рассмотрим их отношение

$$\varphi(w) = \frac{f_1(w)}{f_2(w)} \quad (\operatorname{Im} w < \rho).$$

Таким же образом как и выше мы убеждаемся, что

$$\varphi(w) \equiv 1 \quad (\operatorname{Im} w < \rho).$$

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Метод доказательства этой теоремы может быть использован для построения мероморфных функций. А именно, пусть последовательности комплексных чисел $W \equiv \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $Z \equiv \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Im} w_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_k = 0,$$

а функции $h(x)$ и $\Omega(x, v) \equiv \Omega(x; v; W, Z)$, при любом v ($-\infty < v < 0$) определенная следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega(x, v) \equiv & \frac{1}{2} [e^{-xv} h(x) + e^{xv} \bar{h}(-x)] - \\ & - \sqrt{2\pi} [S(x; v; W) - S(x; v; Z)] - \end{aligned}$$

$$-V\sqrt{2\pi} |S_0(x; w: W) - S_0(x; v: Z)| \quad (-\infty < x < 0),$$

$$\Omega(x, v) \equiv \bar{\Omega}(-x, v) \quad (0 < x < +\infty),$$

удовлетворяют условиям а), б), в) теоремы 2. Тогда, определяя функцию

$$f_p(w) \equiv \frac{B_p(w; w_k) P_p(w)}{B_p(w; z_k)}$$

как при доказательстве теоремы 2, мы можем показать, что мероморфная в $G^{(-)}$ функция, определяемая следующим образом:

$$f(w) \equiv f_p(w) \quad \text{для } \operatorname{Im} w < \rho,$$

имеет нули на W , полюсы на Z и обладает свойствами 1), 2), 4) теоремы 2.

§ 3. Построение мероморфной функции с заданными нулями и заданным ростом

Пусть последовательность $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0. \quad (3.1)$$

Для любого v ($-\infty < v < 0$) введем следующие обозначения:

$$n(v, W) \equiv \sum_{v_k < v} 1, \quad (3.2)$$

$$N(v, W) \equiv \int_{-\infty}^v n(t, W) dt. \quad (3.3)$$

Заметим, что

$$N(v, W) = \int_{-\infty}^v (v - t) d n(t, W) = \sum_{v_k < v} (v - v_k). \quad (3.4)$$

При $v \in (-\infty, 0)$ справедливы следующие оценки:

$$|v| n(2v, W) \leq N(v, W) \leq c n(v, W), \quad (3.5)$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от v .

Далее, для мероморфной в полуплоскости $G^{(-)}$ функции $f(w)$ обозначим

$$E(v, f) \equiv \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\log |f(u + iv)||^2 du \right)^{1/2}. \quad (3.6)$$

Теорема 3. Пусть последовательность $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ удовлетворяет условию (3.1). Тогда существует мероморфная в полуплоскости $G^{(-)}$ функция $f(w)$ с нулями на W , для которой при $v \rightarrow -0$ справедлива оценка

$$E(v, f) \leq A |v|^{-1} N(Bv, W), \quad (3.7)$$

где $A, B > 0$ — постоянные, не зависящие от v .

Доказательство. Определим последовательность $Z \equiv \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом: $z_k = u_k + iv_k$, причем так, чтобы $u_k < u_{k+1} < u_k + \pi$, все числа w_k, z_m были разными и для некоторого $v_0 \in (-\infty, 0)$ выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} |e^{-iu_k} - e^{-iu_{k+1}}| < \sum_{k=1}^{\infty} |u_k - u_{k+1}| < N(v_0, W). \quad (3.8)$$

Таким образом, $N(v, Z) = N(v, W)$.

Из (2.3) и (3.5) вытекает справедливость оценок

$$|S_0(x; v; W)| \leq \frac{N(v/2, W)}{|x| |v|} \quad (-\infty < x < 0, -\infty < v < 0). \quad (3.9)$$

$$|S_0(x; v; W)| \leq \frac{N(v/2, W)}{|x| |v|} \quad (3.10)$$

Положим

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0 \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-ixu_k} - e^{-ixu_{k+1}}) e^{xv_k} & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Тогда в силу неравенства

$$|e^{-ixu_k} - e^{-ixu_{k+1}}| \leq c |x| |e^{-iu_k} - e^{-iu_{k+1}}|, \quad (3.12)$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от x , справедлива оценка

$$\begin{aligned} e^{-xv} \left| \frac{1}{2} h(x) - \sqrt{2\pi} S(x; v; W) + \sqrt{2\pi} S(x; v; Z) \right| &\leq \\ &\leq c \sqrt{2\pi} \sum_{v_k > v} |e^{-iu_k} - e^{-iu_{k+1}}| \leq c \sqrt{2\pi} N(v_0, W) \leq \\ &\leq c \sqrt{2\pi} N(v, W) \quad (-\infty < v_0 < v < 0, -\infty < x < 0). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Далее, при $-\infty < v < v' < 0$ и $-\infty < x < 0$

$$\begin{aligned} |S(x; v'; W) - S(x; v; W)| &\leq \frac{1}{2|x|} \int_v^{v'} e^{xt} dt \leq \\ &\leq \frac{e^{xv'} N(v', W)}{2|x|} \leq \frac{e^{xv'} N(v'/2, W)}{|x| |v'|}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подставив в (3.13) вместо v величину $v' = \log(e^v |xv|^{1/|x|})$ и заметив, что $v' < v(1 - e^{-1})$, в силу (3.14) при $-\infty < x < \frac{1}{v}$ будем иметь

$$e^{-xv} \left| \frac{1}{2} h(x) - \sqrt{2\pi} S(x; v; W) + \sqrt{2\pi} S(x; v; Z) \right| \leq$$

$$\leq \frac{A' N(B' v, W)}{|x| |v|} \quad (-\infty < v_0 < v < 0), \quad (3.15)$$

где $A', B' > 0$ — постоянные, не зависящие от x и v .

Нетрудно убедиться, что при любом v ($-\infty < v < 0$) функции

$$e^{-ix} \left\{ \frac{1}{2} h(x) - \sqrt{2\pi} S(x; v; W) + \sqrt{2\pi} S(x; v; Z) \right\},$$

$$S_0(x; v; W) - S_0(x; v; Z),$$

и, следовательно, функция $\Omega(x; v; W, z) = \Omega(x, v)$ входят в класс $L_2(-\infty, 0)$.

Теперь установим, что функция $\Omega(x, v)$ удовлетворяет условию в) теоремы 2. Из неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^0 e^{-ixu} x e^{x(v-v_0)} \Omega(x, v) dx \right| \leq \\ & \leq \sqrt{2\pi} \sum_{v_k > v} \frac{|u_k - u'_k|}{|v_k - v_0 - i(u + u_k)| |v_k - v_0 - i(u + u'_k)|} + \\ & + \sqrt{2\pi} \sum_{v_k < v} \frac{|u_k - u'_k|}{|2v - v_k - v_0 - i(u + u_k)| |2v - v_k - i(u + u'_k)|}, \end{aligned}$$

в силу оценки

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \frac{du}{[a^2 + (u + u_k)^2]^{1/2} [a^2 + (u + u'_k)^2]^{1/2}} = \\ & = \int_{-\infty}^0 \frac{du}{[a^2 + (u + u_k - u'_k)^2]^{1/2} [a^2 + u^2]^{1/2}} \leq \frac{\pi}{2a} \quad (a > 0; k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

получаем, что при любых v ($-\infty < v < 0$) и v_0 ($v_0 < v$, $v_0 < v_k$; $k = 1, 2, \dots$) преобразование Фурье функции $x e^{x(v-v_0)} \Omega(x, v)$ на полуоси $(-\infty, 0)$ принадлежит классу $L_1(-\infty, +\infty)$. Непрерывность этой функции проверяется без труда.

Таким образом, в силу замечания из § 2, существует мероморфная в $G^{(-)}$ функция $f(w)$ с нулями на W , полюсами на Z и такая что при любом v ($-\infty < v < 0$) $E(v, f) < \infty$ и $\Omega_f(x, v) = \Omega(x, v)$.

Наконец, в силу тождества

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega_f(x, v)|^2 dx = 2 \int_{-\infty}^{1/v} |\Omega_f(x, v)|^2 dx + 2 \int_{1/v}^0 |\Omega_f(x, v)|^2 dx,$$

равенства Парсеваля и неравенств (3.9), (3.10), (3.13), (3.15), справедлива оценка (3.7).

Теорема доказана.

Կ. Վ. ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ. Կիսահարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիաների հետ զուգորդված փուլերի նեափախություն (ամփոփում):

Հոդվածում ցանկացած $v \in (-\infty, 0)$ համար ուսումնասիրվում է $\log |f(u+iv)|$ ֆունկցիայի ֆուրյեի ձևափոխությունը

$$\Omega_f(x, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log |f(v+iu)| du \quad (-\infty < x < +\infty),$$

որտեղ $f(w) \equiv f(u+iv)$ ՝ $G^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < 0\}$ կիսահարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիա է:

Ստացվում են բանաձևեր $\Omega_f(x, v)$ ֆունկցիայի համար, որոնցում զիջավոր դեր են խաղում $f(w)$ -ի զրոները և բևեռները:

Այնուհետև նախորդ տրված $\Omega(x; v; W, Z)$ ֆունկցիայի միջոցով կառուցվում է $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ զրոներով, $Z \equiv \{z_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ բևեռներով $G^{(-)}$ կիսահարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիա, որի համար $\Omega_f(x, v)$ -ն համընկնում է առաջին ֆունկցիայի հետ:

Վերլուծվում է զրոների տրված $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ հաջորդականությունն անեցող մերոմորֆ ֆունկցիա, որի աճը զնահատվում է նրա զրոների W բազմության թվային ֆունկցիայով:

G. V. MIKHAELIAN. A Fourier transform associated with functions meromorphic in the half-plane (summary)

The Fourier transform

$$\Omega_f(x, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log |f(u+iv)| du$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

of $\log |f(u+iv)|$ for arbitrary $v \in (-\infty, 0)$ is investigated, where $f(w) \equiv f(u+iv)$ is a meromorphic function in the half-plane $G^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < 0\}$.

Formulae for $\Omega_f(x, v)$ are obtained in which the zeros and poles of $f(w)$ are playing the main role.

Further, by means of a given function $\Omega(x; v; W; Z)$ a function meromorphic in the $G^{(-)}$ half-plane is constructed with zeros in $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ and poles in $Z \equiv \{z_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$, for which $\Omega_f(x, v)$ coincides with the first function.

In the end a meromorphic function is constructed with a prescribed sequence $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ of zeros and its growth is estimated by the number function of the set w of its zeros.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. A. Rubel. A Fourier series method for entire functions, Duke. Math. J., 33, 1963, 437—442.
2. L. A. Rubel, B. A. Taylor. A Fourier series method for meromorphic and entire functions, Bull. Soc. Math. France, 96, 1968, 53—96.
3. G. R. MacLane, L. A. Rubel. On the growth of Blaschke product, Canadian J. of Math., XXI, № 3, 1969, 595—601.
4. F. Nevanlinna. Bemerkungen zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung, Soc. sci. fenn., Comment. Phys. Math., 2, № 4, 1923.
5. R. Nevanlinna. Zur Theorie der meromorphen Funktionen, Acta math., 46, 1925.
6. H. H. Ахуезер. Зап. физ.-мат. отд. АН УССР, 1927, 2, № 3, 29—33.

7. *M. L. Cartwright*. Proc. London Math. Soc., 33, 1931, 209—224.
8. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, М., 1956.
9. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
10. *А. М. Джрбашян*. Факторизация, параметрические представления и граничные свойства некоторых общих классов мероморфных в полуплоскости функций, канд. диссертация, Харьков, 1983.
11. *Г. В. Микаелян*. Исследование роста произведений типа Бляшке—Неванлинны методом преобразований Фурье, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 3, 1983, 216—229.
12. *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев*. Интегралы и ряды, М., «Наука», 1981.