ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIX, № 5, 1984 Математика

УДК 517.98

М. Г. КРЕЙН, Ф. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ГАНКЕЛЕВЫ ОПЕРАТОРЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПРОБЛЕМЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ

(продолжение)*

§ 5. Свойства пар Шмидта ганкелева оператора

1. В дальнейшем, при рассмотрении *м*-функций $\Gamma \in L^1_{n\times m}(R)$ для определенности будем считать, что $m \leqslant n$. Пусть $\rho \neq 0$ есть некоторое *s*-число ганкелева оператора Γ, порожденного *м*-функцией $\Gamma(t)$ и действующего из $L^2_{m\times 1}(R)$ в $L^2_{n\times 1}(R)$. Тогда $\rho \in \sigma(\Gamma_\Delta)$. Рассмотрим собственное подпространство $\mathfrak{M}_\rho$ оператора Γ_Δ, отвечающее собственному значению $\rho \neq 0$:

$$\mathfrak{M}_\rho = \{\chi \in L^2_{(m+n)\times 1}(\mathbf{R}_+) | \mathbf{\Gamma}\chi = \rho\chi\}.$$

Согласно утверждению 1° § 2: $\mathfrak{M}_\rho \subset AC_{(m+n)\times 1}(\mathbf{R}_+) \cap L^1_{(m+n)\times 1}(\mathbf{R}_+)$, поэтому для $\chi \in \mathfrak{M}_\rho$ имеем

$$\rho \frac{d\chi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\,\chi(s)\,ds = -\Gamma_\Delta\,\chi(0) -$$

$$-\int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\frac{d\chi(s)}{ds}\,ds. \tag{5.1}$$

Лемма 5.1. *Если* $\chi \in \mathfrak{M}_\rho$, *то* $J\chi' \in \mathfrak{M}_\rho$ $(\chi' \in \mathfrak{M}_{(-\rho)})$ *в том и только том случае, когда* $\chi(0) = 0$.

Справедливость леммы непосредственно следует из равенства (5.1) с учетом соотношения $J\Gamma_\Delta(t) = -\Gamma_\Delta(t)\,J$ $\forall t \in \mathbf{R}_+$.

Лемма 5.2. *Для произвольных элементов* χ_1 *и* χ_2 *из* $\mathfrak{M}_\rho$ *справедливо соотношение*

$$F^*(\chi_1; \lambda)\,JF(\chi_2; \lambda) = 0 \;\; \forall \lambda \in R \;\; \left(F(\chi; \lambda) := \int_0^\infty \exp(\lambda t J)\,\chi(t)\,dt\right). \tag{5.2}$$

Доказательство. С помощью преобразования, аналогичного (1.5), имеем

$$F^*(\chi_1; \lambda)\,JF(\chi_2; \lambda) = \int_0^\infty \chi_1^*(t)\exp(-\lambda t J)\,dt\,J\int_0^\infty \exp(\lambda t J)\,\chi_2(t)\,dt =$$

---

* Начало см. в № 4 с. г.

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_1^*(t+s)\exp(-\lambda tJ)\,J\chi_2(s)\,ds\,dt+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_1^*(t)\exp(\lambda sJ)\,J\chi_2(t+s)\,dt\,ds.$$

С другой стороны

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_1^*(t)\exp(\lambda sJ)\,J\chi_2(t+s)\,dt\,ds=\frac{1}{\rho}\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_1^*(t)\exp(\lambda sJ)\times$$

$$\times J\left(\int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s+u)\,\chi_2(u)\,du\right)dt\,ds=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \chi_1^*(t)\,\Gamma_\Delta(t+s+u)\,dt\right)\exp(-\lambda sJ)\,J\chi_2(u)\,du\,ds=$$

$$=-\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_1^*(u+s)\exp(-\lambda sJ)\,J\chi_2(u)\,du\,ds.\ \Box$$

Соотношение (5.2) можно представить в виде

$$F_+^*(\xi_1;\lambda)\,F_+(\xi_2;\lambda)=F_-^*(\eta_1;\lambda)\,F_-(\eta_2;\lambda)(\lambda\in R). \tag{5.3}$$

Оно справедливо для пар Шмидта именно ганкелева оператора; для пар Шмидта $\{\xi_j,\eta_j\}$ ($j=1, 2$) произвольного линейного ограниченного оператора можно утверждать только, что $(\xi_1,\xi_2)=(\eta_1,\eta_2)$.

Через $\mathfrak{M}_\rho(0)(\subset C^{m+n})$ обозначим множество значений в нуле функций из $\mathfrak{M}_\rho$: $\mathfrak{M}_\rho(0)=\{\chi(0)|\chi\in\mathfrak{M}_\rho\}$.

Лемма 5.3. *Множество $\mathfrak{M}_\rho(0)$ является J-нейтральным подпространством в C^{m+n}.*

Поэтому (см. [17]), ему соответствует частично изометрический угловой оператор K: $C^m\to C^n$ такой, что значения в нуле пар Шмидта $\{\xi(0),\eta(0)\}$ связаны соотношением $\eta(0)=K\xi(0)$.

Доказательство. Легко видеть, что $F(\chi';\lambda)=-\chi(0)-$ $-\lambda JF(\chi;\lambda)$. Отсюда $\chi(0)=\lim\limits_{\lambda\to\infty}-\lambda JF(\chi;\lambda)$; $\chi^*(0)J\chi(0)=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda^2F^*(\chi_1;\lambda)=$ $=JF(\chi_2;\lambda)=0$.

Следствие. $\dim\mathfrak{M}_\rho(0)\leqslant m$.

Определение 5.1. *Упорядоченная система $\{\chi^{[1]},\chi^{[2]},\cdots,\chi^{[l]}\}$ элементов из $\mathfrak{M}_\rho$ называется D-цепочкой собственных элементов оператора Γ_Δ, если $\chi^{[1]}(0)\neq 0$, а $\chi^{[k]}(t)=-J\int_0^1\chi^{[k-1]}(s)\,ds$ $(k=\overline{2,l})$.*

Элемент $\chi^{[1]}$ называется базовым элементом D-цепочки, а число l—ее длиной.

D-цепочку с базовым элементом χ и длиной l обозначим через $D(\chi;\, l)$ $(D(\chi;\, l)=\{\chi\,(=\chi^{[1]}),\ \chi^{[2]},\cdots,\chi^{[l]}\}$.

Длина l произвольной D-цепочки $D(\chi;\, l)$ не превышает размерности подпространства $\mathfrak{M}_\rho$ $(l\leqslant \dim \mathfrak{M}_\rho)$. В самом деле, если

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha_k\, \chi^{[k]}\,(t)\equiv 0,$$

то полагая $t=0$, получим $\alpha_1=0$. Далее, дифференцируя полученное тождество и снова полагая $t=0$, получим $\alpha_2=0$, и так далее. Подобным образом, легко убедиться в том, что элементы нескольких D-цепочек в своей совокупности линейно независимы, если линейно независимы значения в нуле их базовых элементов.

В множестве всех D-цепочек введем следующее отношение эквивалентности: $D(\chi_1;\, l_1)\sim D(\chi_2;\, l_2)$, если $\chi_1(0)=\chi_2(0)$. Таким образом, каждому вектору из $\mathfrak{M}_\rho(0)$ ставится в соответствие (одно-однозначно) класс эквивалентных D-цепочек. При этом нулевому вектору соответствует пустой класс.

Определение 5.2. *D-цепочка $D(\chi;\, l)$ называется максимальной, если в классе эквивалентных ей D-цепочек нет цепочки большей длины.*

В $\mathfrak{M}_\rho(0)$ выделим подпространства $\mathfrak{M}_\rho^p(0)\subseteq \mathfrak{M}_\rho^{p-1}(0)\subseteq\cdots$ $\cdots\subseteq \mathfrak{M}_\rho^1(0)=\mathfrak{M}_\rho(0)$ по следующему признаку: $x\,(\in \mathfrak{M}_\rho(0))$ входит в $\mathfrak{M}_\rho^k(0)$, если найдется такая D-цепочка $D(\chi;\, l)$, что $x=\chi(0)$ и $l\geqslant k$.

Пусть $\{x_1,\, x_2,\cdots,\, x_r\}$ — базис в $\mathfrak{M}_\rho(0)$, полученный следующим образом. Выбираем сначала базис в $\mathfrak{M}_\rho^p(0)$, затем дополняем его до базиса в $\mathfrak{M}_\rho^{p-1}(0)$, и так далее, до получения базиса в $\mathfrak{M}_\rho(0)$.

Рассмотрим систему максимальных D-цепочек $D(\chi_k;\, l_k)$ таких, что $\chi_k(0)=x_k$ $(k=\overline{1,\, r})$. Отметим, что длины l_k $(k=\overline{1,\, r})$ этих D-цепочек не зависят от выбора базиса $\{x_k\}_{k=1}^r$ указанным методом.

Лемма 5.4. *Объединение элементов D-цепочек $D(\chi_k,\, l_k)$ $(k=\overline{1,r})$ образует базис в $\mathfrak{M}_\rho$.*

Доказательство. Как было отмечено выше, рассматриваемая система линейно независима. Пусть φ_1 — произвольный элемент из $\mathfrak{M}_\rho$. Найдется такая D-цепочка $D(\psi_1;\, q_1)$, которая содержит φ_1. Положим $\varphi_2=\psi_1-\sum_{k=1}^{r}\alpha_{1,\,k}\chi_k$, где коэффициенты $\alpha_{1,\,k}$ выбраны так, чтобы $\varphi_2(0)=\psi_1(0)-\sum_{k=1}^{r}\alpha_{1,\,k}\chi_k(0)=0$. Заметим при этом, что, поскольку $\psi_1(0)\in \mathfrak{M}_\rho^{q_1}(0)$, в разложении $\psi_1(0)=\sum\alpha_{1,\,k}\chi_k(0)$ участвуют только те $\chi_k(0)$, которые образуют базис в $\mathfrak{M}_\rho^{q_1}(0)$. Поэтому, если $D(\psi_2;\, q_2)$ есть D-цепочка, содержащая φ_2, то $q_2\geqslant q_1+1$. Далее, положим $\varphi_3=\psi_2-\sum_{k=1}^{r}\alpha_{2,\,k}\chi_k$, где $\alpha_{2,\,k}$ выбраны так, чтобы $\varphi_3(0)=0$. Тогда, если $\varphi_3\in D(\psi_3;\, l_3)$, то $q_3>q_1+1$. Поэтому ясно, что, продолжая таким образом, мы необходимо придем к $\psi_n=\sum_{k=1}^{r}\alpha_{n,\,k}\chi_k$. Отсюда φ_n получится интегрированием базового элемента ψ_n. Далее, φ_{n-1} получится интегрированием базового элемента $\psi_{n-1}=\varphi_n+\sum_{k=1}^{r}\alpha_{n-1,k}\chi_k$. Продолжая таким образом, выразим φ_1 через линейную комбинацию элементов D-цепочек $D(\chi_k, l_k)$ $(k=\overline{1, r})$. □

2. Выясним здесь некоторые свойства преобразований $F(\chi; \lambda)$ $(F_+(\xi, \lambda),\ F_-(\eta; \lambda))$ элементов $\chi\in\mathfrak{M}$, (пар Шмидта $\{\xi, \eta\}$).

Лемма 5.5. *Если* $0\neq\rho\in\sigma(\Gamma_\Delta)$ *и* $a\in C^{m+n}$, *то для разрешимости уравнения*

$$\rho\varphi(t)-\int_0^\infty\Gamma_\Delta(t+s)\,\varphi(s)\,ds=\Gamma_\Delta(t)\,a\qquad(a\in C^{m+n})\tag{5.4}$$

в классе $L^1_{(m+n)\times 1}(\mathrm{R}_+)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $a\perp\mathfrak{M}_\rho(0)$.

Доказательство. Из теории Рисса—Шаудера для вполне непрерывных операторов и из включения $\mathfrak{M}_\rho\subset L^\infty_{(m+n)\times 1}(R_+)$ следует, что необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (5.4) в классе $L^1_{(m+n)\times 1}(R_+)$ является условие

$$\int_0^\infty(\Gamma_\Delta(t)\,a,\ \chi(t))\,dt=0\quad\forall\chi\in\mathfrak{M}_\rho.$$

С другой стороны

$$\int_0^\infty(\Gamma_\Delta(t)\,a,\ \chi(t))\,dt=\left(a,\ \int_0^\infty\Gamma_\Delta(t)\,\chi(t)\,dt\right)=\rho\,(a,\chi(0)).\ \square$$

Пусть заданы $\varphi\in L^1_{(m+n)\times 1}(R_+)$, $a\in C^{m+n}$ и $\lambda_0\in R$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases}J\psi'(t)-\lambda_0\psi(t)=\varphi(t)\\ \psi(0)=-Ja.\end{cases}\tag{5.5}$$

Легко видеть, что для суммируемого ψ система (5.5) эквивалентна соотношению $a+F(\varphi;\lambda)=(\lambda-\lambda_0)\,F(\psi;\lambda)$, и следовательно, равенство $a+F(\varphi;\lambda_0)=0$ есть необходимое условие разрешимости системы (5.5) в классе $L^1_{(m+n)\times 1}(R_+)$.

Лемма 5.6. *Решение системы* (5.5) *при заданных* $a\in C^{m+n}$, $\lambda_0\in R$ *и* φ, *являющемся решением уравнения* (5.4), *принадлежит* $\mathfrak{M}$, *в том и только том случае, когда* $a+F(\varphi;\lambda_0)=0$.

Доказательство. Решение ψ системы (5.5) имеет вид

$$\psi(t)=-J\exp(-\lambda_0 tJ)\left(a+\int_0^t\exp(\lambda_0 sJ)\,\varphi(s)\,ds\right).$$

При условии $a+F(\varphi;\lambda_0)=0$, ψ представляется также в виде

$$\psi(t)=J\exp(-\lambda_0 tJ)\int_t^\infty\exp(\lambda_0 sJ)\,\varphi(s)\,ds,$$

и следовательно, является, во всяком случае, ограниченной вектор-функцией. Проверим, что она принадлежит $\mathfrak{M}_\rho$. Имеем

$$(\Gamma_\Delta \psi)(t)=\int_0^\infty \Gamma_\Delta (t+s)\, \psi (s)\, ds=\int_0^\infty \Gamma_\Delta (t+s) \times$$

$$\times \left[-J\exp(-\lambda_0 sJ)\left(a+\int_0^s \exp(\lambda_0 uJ)\, \varphi (u)\, du\right)\right] ds=$$

$$=J\int_0^\infty \exp(\lambda_0 sJ)\, \Gamma_\Delta (t+s)\, ds a +$$

$$+J\int_0^\infty \Gamma_\Delta (t+s)\int_0^s \exp(-\lambda_0 uJ)\, \varphi (s-u)\, du ds =$$

$$=J\int_0^\infty \exp(\lambda_0 sJ)\, \Gamma_\Delta (t+s)\, ds\, a +$$

$$+J\int_0^\infty \exp(\lambda_0 uJ)\int_0^\infty \Gamma_\Delta (t+s+u)\, \varphi (s)\, ds du =$$

$$=J\int_0^\infty \exp(\lambda_0 sJ)\left(\Gamma_\Delta (t+s)a+\int_0^\infty \Gamma_\Delta (t+s+u)\, \varphi (u)\, du\right) ds =$$

$$=\rho J\int_0^\infty \exp(\lambda_0 sJ)\, \varphi (t+s)\, ds=\rho J\exp(-\lambda_0 tJ) \times$$

$$\times \int_t^\infty \exp(\lambda_0 sJ)\, \varphi (s)\, ds. \ \square$$

Пусть $\chi \in \mathfrak{M}_\rho$. Тогда, легко проверяется, что $J\chi'$ удовлетворяет уравнению (5.4) при $a=J\chi(0)$. Вместе с тем, $a+F(J\chi';\lambda)=\lambda F(\chi;\lambda)$. Таким образом, приходим к утверждению.

Следствие 5.1. *Если $\chi\in\mathfrak{M}_\rho$, $\lambda_0\in R$, то решение системы*

$$\begin{cases} J\psi'(t)-\lambda_0\psi(t)=J\chi'(t) \\ \quad \psi(0)=\chi(0) \end{cases} \tag{5.6}$$

принадлежит $\mathfrak{M}_\rho$ тогда и только тогда, когда $\lambda_0 F(\chi;\lambda_0)=0$.

Из леммы 5.6 при $a=0$ непосредственно получаем

Следствие 5.2. *Если $\chi\in\mathfrak{M}_\rho$, $\lambda_0\in R$, то решение системы*

$$\begin{cases} J\psi'(t)-\lambda_0\psi(t)=\chi(t) \\ \quad \psi(0)=0 \end{cases} \tag{5.7}$$

принадлежит $\mathfrak{M}_\rho$ тогда и только тогда, когда $F(\chi;\lambda_0)=0$.

При рассмотрениях этого параграфа, приведенных выше, ρ могло быть произвольным s-числом оператора Γ. Для предложения, приводимого ниже, существенно, что ρ есть наибольшее s-число оператора Γ ($\rho=\|\Gamma\|_2$).

Лемма 5.7. *Решение системы* (5.5) *при заданных*

$$a\in C^{m+n}\ (a=[a_1,\ a_2]^{\cdot};\ a_1\in C^m,\ a_2\in C^n)^*,\ \lambda_0\in C_+\ и\ \varphi=[\varphi_1,\ \varphi_2]^{\cdot},$$

являющемся решением уравнения (5.4) *при* $\rho=\|\Gamma\|_2$ *и удовлетворяющем условию*

$$|a_1+F_+(\varphi_1;\ \lambda)|>|a_2+F_-(\varphi_2;\ \lambda)|\ (\lambda\in R), \tag{5.8}$$

принадлежит $\mathfrak{M}_\rho$, *если* $a_1+F_+(\varphi_1;\ \lambda_0)=0$.

Доказательство. Решение

$$\psi_1(t)=-i\,e^{-i\lambda_0 t}\left(a+\int\limits_0^t e^{i\lambda_0 s}\,\varphi_1(s)\,ds\right)$$

системы

$$\begin{cases} i\psi_1'(t)-\lambda_0\,\psi_1(t)=\varphi_1(t)\\ \quad\psi_1(0)=-ia_1,\end{cases} \tag{5.9}$$

при условии $a_1+F_+(\varphi_1;\ \lambda_0)=0$, допускает представление

$$\psi_1(t)=ie^{-i\lambda_0 t}\int\limits_t^\infty e^{i\lambda_0 s}\,\varphi_1(s)\,ds.$$

Так как $\operatorname{Im}\lambda_0>0$, то отсюда уже следует, что $\psi_1\in L^1_{m\times1}(R_+)\cap\cap AC_{m\times1}(R_+)\subset L^2_{m\times1}(R_+)$. Это вместе с (5.9) дает $(\lambda-\lambda_0)(a_1+F_+(\varphi;\lambda))= =F_+(\psi;\ \lambda)$. С другой стороны, уравнение (5.4) приводит к соотношению (ср. с (1.10))

$$F_+(\Gamma^*;\lambda)\,(a_2+F_-(\varphi_2;\ \lambda))=\rho\,(a_1+F_+(\varphi_1;\ \lambda)+r_-(\lambda)\ \ (\lambda\in R;\ r_-\in W^-_{m\times1}).$$

Разделим обе части этого тождества на $\lambda-\lambda_0$. Так как $\lambda_0\in C_+$, то $(\lambda-\lambda_0)^{-1}\,r_-(\lambda)\in \mathring{W}^-_{m\times1}$ и $(\lambda-\lambda_0)^{-1}\,(a_2+F_-(\varphi_2;\ \lambda))=F_-(\psi_2;\ \lambda)$, где $\psi_2\in \in L^2_{n\times1}(R_+)$. Таким образом, имеет место тождество

$$F_+(\Gamma^*;\ \lambda)\,F_-(\psi_2;\ \lambda)=\rho\,F_+(\psi_1;\ \lambda)+(\lambda-\lambda_0)^{-1}\,r_-(\lambda)\ \ (\lambda\in R),$$

откуда

$$\rho\psi_1(\lambda)=\int\limits_0^\infty\Gamma^*(t+s)\,\psi_2(s)\,ds\ \ (t\in R_+).$$

В силу неравенства (5.8) имеем $|F_-(\psi_2;\ \lambda)|\leqslant|F_+(\psi_1;\ \lambda)|$ и, следовательно, по теореме Планшереля $\|\psi_2\|_2\leqslant\|\psi_1\|_2$. Поэтому $\rho^2(\psi_2,\ \psi_2)\leqslant\rho^2(\psi_1,\psi_1)= =(\Gamma^*\psi_2,\ \Gamma^*\psi_2)$ или $((\rho^2 I-\Gamma\Gamma^*)\,\psi_2,\ \psi_2)\leqslant0$, а так как $\rho=\|\Gamma\|_2$, то $(\rho^2 I-\Gamma\Gamma^*)\,\psi_2=0$. Таким образом, $\{\psi_1,\ \psi_2\}$ есть пара Шмидта оператора Γ, отвечающая s-числу $\rho=\|\Gamma\|_2$.

---

* Через $[a_1,\ a_2]^{\cdot}$ обозначается столбец с элементами a_1 и a_2.

С другой стороны, легко проверить, что полученная вектор-функция $\psi=[\psi_1, \psi_2]^\top$ удовлетворяет системе (5.5). $\square$

Если $\chi\in\mathfrak{M}_\rho$, то $J\chi'$ удовлетворяет уравнению (5.4) при $a=-J\chi(0)$ и в соотношении (5.8) имеет место знак равенства. Поэтому из леммы 5.7 получаем

Следствие 5.3. *Если* $\chi=[\xi, \eta]^\top\in\mathfrak{M}_\rho$ *при* $\rho=\|\Gamma\|_2$ *и* $\lambda_0\in C_+$, *то решение системы* (5.6) *принадлежит* $\mathfrak{M}_\rho$ *в том и только том случае, когда* $F_+(\xi, \lambda_0)=0$.

Замечание 5.1. Подобным образом можно доказать, что при $\chi\in\mathfrak{M}_\rho$ $(\rho=\|\Gamma\|_2)$ и $\lambda_0\in C_-$, необходимым и достаточным условием разрешимости системы (5.6) в классе $\mathfrak{M}_\rho$ является условие $F_-(\eta; \lambda_0)=0$.

Пусть теперь $D(\chi; l)$—некоторая D-цепочка в $\mathfrak{M}_\rho$ длины l. Если при некотором $\lambda_0\in R\setminus\{0\}$ $F(\chi; \lambda_0)=0$, то в силу следствия 5.1 существует $\psi\in\mathfrak{M}_\rho$, являющееся решением системы (5.6) или, что одно и то же, удовлетворяющая равенству

$$\psi(t)+\lambda_0\int_0^t J\psi(s)\,ds=\chi(t).$$

Отсюда

$$\psi^{[k]}(t)-\lambda_0\psi^{[k+1]}(t)=\chi^{[k]}(t)\left(k=\overline{1, l};\ \psi^{[1]}:=\psi,\ \psi^{[k+1]}(t)=-J\int_0^t\psi^{[k]}(s)\,ds\right).$$

Это означает, что система $\{\psi^{[1]}, \psi^{[2]},\cdots, \psi^{[l+1]}\}$ образует D-цепочку в $\mathfrak{M}_\Gamma$ длины $l+1$, эквивалентную $D(\chi; l)$.

Поэтому справедливо утверждение.

1°. *Если* $\{\chi^{[1]}, \chi^{[2]},\cdots, \chi^{[l]}\}$ — *максимальная* D-*цепочка, соответствующая некоторому* s-*числу* ρ *оператора* Γ, *то* $F(\chi^{[1]}; \lambda)=0\ \forall\lambda\in R\setminus\{0\}$.

Аналогичным образом из следствия 5.3 и замечания 5.1 получаем

2°. *Если* $\{\chi^{[1]}, \chi^{[2]},\cdots, \chi^{[l]}\}$ $(\chi^{[1]}=[\xi, \eta]^\top)$— *максимальная* D-*цепочка, соответствующая наибольшему* s-*числу* ρ $(=\|\Gamma\|_2)$ *оператора* Γ, *то* $F_+(\xi; \lambda)\neq 0\ \forall\lambda\in C_+$ *и* $F_-(\eta, \lambda)\neq 0\ \forall\lambda\in C_-$.

Что касается значений $F(\chi^{[k]}; \lambda)$ при $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$, то справедливо утверждение:

3°. *Суммарная кратность нуля вектор-функций* $F(\chi^{[k]}; \lambda)$ $(k=\overline{1, l})$ *в точках* $\lambda=0$ *и* $\lambda=\infty$ *для произвольной максимальной* D-*цепочки* $\{\chi^{[1]}, \chi^{[2]},\cdots, \chi^{[l]}\}$ *постоянна и равна длине этой цепочки. При этом* $F(\chi^{[l]}; \lambda)\neq 0$ *при* $\lambda=0$.

Доказательство этого утверждения основано на следующих легко проверяемых соотношениях

$$\lambda F(\chi^{[1]}; \lambda)=J\chi^{[1]}(0)+F\left(J\frac{d\chi^{[\,]}}{dt}; \lambda\right);\ F(\chi^{[1]}; \lambda)=\lambda^{k-1}F(\chi^{[k]}; \lambda)(k=\overline{1, l}). \tag{5.10}$$

В самом деле, теперь достаточно проверить, что $F(\gamma^{[l]}; \lambda) \neq 0$ при $\lambda = 0$. Допустим противное. Тогда, в силу следствия 5.2, найдется элемент $\psi \in \mathfrak{M}_\rho$, такой, что $J\psi' = \gamma^{[l]}$ и $\psi(0) = 0$, а это противоречит максимальности D-цепочки $D(\gamma^{[l]}; l)$.

Для базового элемента $\gamma = [\xi, \eta]^\tau$ произвольной максимальной D-цепочки $D(\gamma; l)$ длины l вместе с преобразованием $F(\gamma; \lambda)$ рассмотрим „нормализованное" преобразование

$$F_{\text{н}}^{\pm}(\gamma; \lambda) := \lambda \left(\frac{\lambda \pm i}{\lambda}\right)^l F(\gamma; \lambda).$$

Из утверждений 1°—3° следует

4°. *Для базового элемента γ произвольной максимальной D-цепочки $D(\gamma; l)$, отвечающей наибольшему s-числу ρ операторв Γ, имеем*

$$F_{\text{н}}^{\pm}(\gamma; \lambda) := \lambda \left(\frac{\lambda \pm i}{\lambda}\right)^l F(\gamma; \lambda) \neq 0 \ \forall \lambda \in \widehat{R} \ (:= R \cup \{\infty\}),$$

а для компонент ξ и η базового элемента γ максимальной D-цепочки $D(\gamma; l)$, отвечающей наибольшему s-числу ρ $(= |\Gamma|_s)$ оператора Γ, имеем

$$\lambda \left(\frac{\lambda + i}{\lambda}\right)^l F_+(\xi, \lambda) \neq 0 \ \forall \lambda \in \overline{C}_+ \cup \{\infty\};$$

$$\lambda \left(\frac{\lambda - i}{\lambda}\right)^l F_-(\eta; \lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \overline{C}_- \cup \{\infty\}.$$

§ 6. S-матрица, порождаемая ганкелевым оператором Γ с $|\Gamma|=1$ (определенный случай)

1. Пусть задана м-функция $\Gamma \in L^1_{n \times m}(R_+)$ и Γ—ганкелев оператор, порождаемый этой м-функцией.

Лемма 6.1. *Если существует нерастягивающая м-функция $S(\lambda)$ $(\lambda \in R)$, допускающая представление:*

$$S(\lambda) = F_-(\Gamma; \lambda) + \Phi(\lambda) \ (\Phi \in H^{\infty}_{n \times m};\ \lambda \in R), \tag{6.1}$$

то $|\Gamma|_s \leqslant 1$.

Если $|\Gamma|_s = 1$, то для любой пары Шмидта $\{\xi, \eta\}$ оператора Γ, отвечающей наибольшему s-числу $\rho = 1$, выполняется равенство

$$S(\lambda) F_+(\xi; \lambda) = F_-(\eta; \lambda) \ (\lambda \in R). \tag{6.2}$$

Доказательство. Рассмотрим $S(\lambda) F_+(f; \lambda)$, где $f \in L^1_{m \times 1}(R_+) \cap L^2_{m \times 1}(R_+)$. Имеем

$$S(\lambda) F_+(f; \lambda) = \left(\int_0^\infty \Gamma(t) e^{-i\lambda t} dt + \Phi(\lambda)\right) \int_0^\infty f(t) e^{i\lambda t} dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \Gamma(t+s) f(s) ds\right) e^{-i\lambda t} dt +$$

$$+\int_0^\infty\left(\int_{-t}^{\infty}\Gamma(s-t)f(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}\,dt+\Phi(\lambda)F_+(f;\lambda)=F_-(\Gamma f;\lambda)+\hat{\psi}(\lambda).$$

Это означает, что элемент $S(\lambda)F_+(f;\lambda)$ пространства $L^2_{n\times 1}(R)$ разлагается на сумму двух ортогональных элементов $F_-(\Gamma f;\lambda)\in H^{2;-}_{n\times 1}$ и $\hat{\psi}(\lambda)\in H^{2;+}_{n\times 1}$. Поэтому, на основании равенства Парсеваля, имеет место неравенство:

$$\|f\|^2=\|F_+(f;\lambda)\|^2\geqslant\|S(\lambda)F_+(f;\lambda)\|^2=\|F_-(\Gamma f;\lambda)\|^2+\|\hat{\psi}\|^2\geqslant\|F_-(\Gamma f;\lambda)\|^2=\|\Gamma f\|^2,$$

которое и означает, что $\|\Gamma\|_2\leqslant 1$.

Для доказательства второго утверждения леммы рассмотрим $S(\lambda)F_+(\xi;\lambda)$. Аналогично проделанному выше, легко получаем

$$S(\lambda)F_+(\xi;\lambda)=F_-(\Gamma\xi;\lambda)+\hat{\psi}(\lambda)=F_-(\eta;\lambda)+\hat{\psi}(\lambda)\quad(\hat{\psi}\in H^{2;+}_{n\times 1}).\qquad(6.3)$$

Отсюда $\|S(\lambda)F_+(\xi;\lambda)\|^2=\|F_-(\eta;\lambda)\|^2+\|\hat{\psi}\|^2\leqslant\|F_+(\xi;\lambda)\|^2$. С другой стороны, в силу (5.3), имеем $\|F_+(\xi;\lambda)\|^2=\|F_-(\eta;\lambda)\|^2$. Это показывает, что вектор-функция $\hat{\psi}$ в соотношении (6.3) равна нулю, т. е. выполняется равенство (6.2). □

2. В дальнейшем, на протяжении этого и последующего параграфов, будем предполагать, что заданная м-функция $\Gamma\in L^1_{n\times m}(R_+)$ порождает ганкелев оператор Γ с $\|\Gamma\|_2=1$. Существенную роль в наших последующих рассмотрениях будут играть свойства линеалов $\mathfrak{M}_\rho$ и $\mathfrak{M}_\rho(0)$ при $\rho=1$. Их мы будем обозначать через $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}(0)$.

Рассмотрим систему $D(\chi_k;l_k)$ ($\chi_k=[\xi_k,\ \eta_k]^\tau$, $k=\overline{1,r}$; $r=\dim\mathfrak{M}(0)$) базисных D-цепочек линеала $\mathfrak{M}$ (см. лемму 5.4). Через $H(t)=[H_{11}(t)\ H_{21}(t)]^\tau$ обозначим м-функцию, вектор-столбцами которой служат базовые элементы χ_k ($k=\overline{1,r}$) базисных D-цепочек $D(\chi_k;l_k)(k=\overline{1,r})$:

$$H_{11}(t)=[\xi_1(t),\ \xi_2(t),\cdots,\ \xi_r(t)];\quad H_{21}(t)=[\eta_1(t),\ \eta_2(t),\cdots,\ \eta_r(t)].$$

Вместе с $F_+(H_{11};\lambda)$ и $F_-(H_{21};\lambda)$ рассмотрим также „нормализованные“ преобразования:

$$F_{\text{н}}^+(H_{11};\lambda)=\lambda\left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda}\right)^{l_k}F_+(\xi_k;\lambda)\right\|_{k=1}^r=\lambda F_+(H_{11};\lambda)\,D_+(\lambda),$$

$$F_{\text{н}}^-(H_{21};\lambda)=\lambda\left\|\left(\frac{\lambda-i}{\lambda}\right)^{l_k}F_-(\eta_k;\lambda)\right\|_{k=1}^r=\lambda F_-(H_{21};\lambda)\,D_-(\lambda).$$

Здесь $D_\pm(\lambda)=\left\|\left(\frac{\lambda\pm i}{\lambda}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^r$ — суть диагональные $(r\times r)$-матрицы-функции, где l_k ($k=\overline{1,r}$) равны длинам базисных D-цепочек $D(\chi_k;l_k)$.

Лемма 6.2. *М-функции $F_{\text{н}}^+(H_{11};\lambda)(F_{\text{н}}^-(H_{21};\lambda)$ имеют полный ранг r $(=\dim\mathfrak{M}(0))$ $\forall\lambda\in\overline{C}_+\cup\{\infty\}(\forall\lambda\in\overline{C}_-\cup\{\infty\})$.*

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\operatorname{rang}F_{\text{н}}^+(H_{11};\lambda)=\operatorname{rang}F_+(H_{11},\lambda)\forall\lambda\in\overline{C}_-\cup\{\infty\})\diagdown\{0\},$$

и рассмотрим $F_+(H_{11};\lambda)a$, где $0\neq a\in C^r$. Легко видеть, что $F_+(H_{11};\lambda)a = F(\xi;\lambda)$, где $\xi=\sum_{k=1}^{r} a_k\xi_k$ есть первая компонента вектор-функции $\chi=\sum_{k=1}^{r} a_k\chi_k$, являющейся базовым элементом максимальной D-цепочки (линейная комбинация базовых элементов базисных D-цепочек есть базовый элемент максимальной D-цепочки). Поэтому при $\lambda\in\overline{C}_+\setminus\{0\}$ в силу 1° и 2° § 5, имеем $F_+(H_{11};\lambda)\,a\neq 0$ $(0\neq a\in C^r)$.

Для доказательства утверждения при $\lambda=0$, запишем $F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda)$ в виде

$$F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda)=(\lambda+i)\left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda}\right)^{l_k-1}F_+(\xi_k;\lambda)\right\|_{k=1}^{r}=(\lambda+i)\left\|\sum_{j=0}^{l_k-1}c_j\lambda^{-j}\xi_k^{[j]}\right\|_{k=1}^{r}.$$

Здесь c_j суть биномиальные коэффициенты при λ^{-j} в разложении $(1+i\lambda^{-1})^{l_k-1}$. Это, в силу соотношений (5.10), дает

$$F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda)=(\lambda+i)\,\|F_+(\varphi_k;\lambda)\|_{k=1}^{r},$$

где φ_k есть первая компонента вектор-функции $\chi_k=\sum_{j=1}^{l_k}c_{j-1}\chi_k^{[j]}$, являющейся линейной комбинацией всех членов максимальной D-цепочки $D(\chi_k^{[1]};l_k)(\overline{k=1,r})$, и следовательно, образующей D-цепочку длины $l=1$.

Поэтому для произвольного $0\neq a=[a_1,a_2,\cdots,a_r]\in C^r$ имеем

$$F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda)\,a=(\lambda+i)\,F_+(\psi;\lambda),\quad \text{где}\quad \psi_1=\sum_{k=1}^{r}a_k\varphi_k$$

есть первая компонента вектор-функции $\psi\in\mathfrak{M}$, составляющей D-цепочку длины $l=1$. Отсюда для $\lambda\in R$ можем утверждать, что $F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda)\,a\neq 0$ так как в противном случае $F(\psi;\lambda)=0$. Но это, в силу следствия 5.2, противоречит тому, что ψ образует D-цепочку длины $l=1$. Далее, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}(\lambda+i)\,F(\psi;\lambda)=J\psi(0)\neq 0$. Таким образом, утверждение леммы доказано и при $\lambda=\infty$. □

Условимся говорить, что для оператора Γ имеет место „определенный случай“, если линеал $\mathfrak{M}(0)$ имеет максимальную размерность, равную m. В этом случае система базисных D-цепочек $D(\chi_k;l_k)$ $(\overline{k=1,m})$. Поэтому, в силу леммы 6.2, вместе с $м$-функцией $F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda)$ алгебре $W_{m\times m}^{+}$ принадлежит и $м$-функция $(F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda))^{-1}$.

Теорема 6.1. *Если для оператора* Γ *имеет место определенный случай, то существует, и при том единственная, нерастягивающая м-функция* $S(\lambda)(\lambda\in R)$, *допускающая представление* (6.1).

Она определяется по формуле

$$S(\lambda):=F_{\cdot н}^{-}(H_{21};\lambda)\left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^{m}(F_{\cdot н}^{+}(H_{11};\lambda))^{-1}\qquad(6.4)$$

и является изометрической м-функцией.

Кроме того, $S(\lambda)$ допускает представление

$$S(\lambda)=S(\infty)+\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Gamma}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\quad (\widetilde{\Gamma}\in L^1_{n\times m}(R);\ \lambda\in R),\qquad (6.5)$$

где $\widetilde{\Gamma}|R_+=\Gamma$, а $S(\infty)=-K$ (K—угловой оператор линеала $\mathfrak{M}(0)$). Частные индексы $\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_m$ м-функции $S(\lambda)$ совпадают соответственно с длинами $l_1\geqslant l_2\geqslant\cdots\geqslant l_n$ базисных D-цепочек.

Доказательство. Из определения (6.4) м-функции $S(\lambda)(\lambda\in R)$ для $\lambda\neq 0$ имеем

$$S(\lambda)\,F_+(H_{11};\lambda)=F_-(H_{21};\lambda)(S(\lambda)=F_-(H_{21};\lambda)(F_+(H_{11};\lambda))^{-1}).\qquad (6.6)$$

Отсюда, в силу тождества (5.3), следует изометричность $S(\lambda)$.

Представление (6.5) также является следствием (6.4), поскольку

$$F_{\cdot\text{п}}^-(H_{21};\lambda)\in W^-_{n\times m};\ \left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^{m}\in W^-_{m\times m}\quad\text{и}$$

$$(F_{\cdot\text{п}}^+(H_{11};\lambda))^{-1}\in W^+_{m\times m}.$$

Условие $\widetilde{\Gamma}R_+=\Gamma$ следует из включения $(S(\lambda)-F_-(\Gamma;\lambda))\times F_+(H_{11};\lambda)\in W^+_{n\times m}$, которое является следствием соотношения (6.6) и нижеследующего равенства

$$F_-(\Gamma;\lambda)\,F_+(H_{11};\lambda)=\int_0^\infty\Gamma(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\cdot\int_0^\infty H_{11}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\Gamma(t+s)\,H_{11}(s)\,ds\right)e^{-i\lambda t}\,dt+\int_0^\infty\left(\int_{-t}^\infty\Gamma(s-t)\,H_{11}(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}\,dt=$$

$$=F_-(H_{21};\lambda)+\widehat{\psi}(\lambda),\ (\widehat{\psi}(\lambda)\in W^+_{n\times m}).$$

Далее, из соотношений (5.10) следует, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}F_{\cdot\text{п}}^+(H_{11};\lambda)=i\,H_{11}(0);\ \lim_{\lambda\to\infty}F_{\cdot\text{п}}^-(H_{21};\lambda)=-iH_{21}(0).$$

Отсюда $\lim\limits_{\lambda\to\infty}S(\lambda)=S(\infty)=-H_{21}(0)\,(H_{11}(0))^{-1}$. Заметим, что $H_{21}(0)\times(H_{11}(0))^{-1}$ есть матричное представление углового оператора K, поскольку соответствующие вектор-столбцы матриц $H_{11}(0)$ и $H_{21}(0)$ являются значениями в нуле пар Шмидта $\{\xi,\eta\}$. Таким образом, $S(\infty)=-K$.

Наконец, утверждение теоремы о частных индексах непосредственно следует из определения частных индексов и леммы 6.2. □

§ 7. S-матрица, порожденная ганкелевым оператором Γ с $\|\Gamma\|_2=1$ (общий случай)

В этом параграфе рассматривается ганкелев оператор $\Gamma(\|\Gamma\|_2=1)$, при условии $\dim\mathfrak{M}(0)=r<m$.

Нерастягивающая $\mathcal{M}$-функция $S(\lambda)$ $(\lambda \in R)$, допускающая представление (6.1), будет существовать и в этом случае, однако определяться она будет уже не однозначно. Здесь мы дадим полное описание множества всех таких $\mathcal{M}$-функций.

Рассмотрим частично изометрический угловой оператор K J-нейтрального подпространства $\mathfrak{M}(0)$.

Как известно, операторы $P_+ = K^*K$ и $P_- = KK^*$ суть ортопроекторы, проектирующие C^m на $R(K^*)$ и C^n на $R(K)$, соответственно. Тогда ортопроекторы P и $Q = I_{m+n} - P$, проектирующие C^{m+n} на $\mathfrak{M}(0)$ и $\mathfrak{M}(0)^{\perp}$ соответственно, будут иметь вид

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} P_+ & K^* \\ K & P_- \end{bmatrix}; \quad Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2I_m - P_+ & -K^* \\ -K & 2I_n - P_- \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем, мы будем пользоваться разложением Q на взаимно ортогональные ортопроекторы Q_1 и Q_2 $(Q_1 + Q_2 = Q;\ Q_1Q_2 = Q_2Q_1 = 0)$ вида

$$Q_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} P_+ & -K^* \\ -K & P_- \end{bmatrix}; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} I_m - P_+ & 0 \\ 0 & I_n - P_- \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Q_+ & 0 \\ 0 & Q_- \end{bmatrix}.$$

Из леммы 5.5 следует, что существует $(m+n)\times(m+n))$-матричное решение $\hat{g}$ уравнения

$$\hat{g}(t) - \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\,\hat{g}(s)\,ds = \Gamma_\Delta(t)\,Q.$$

Это решение можно представить в виде $\hat{g} = \hat{g}_1 + \hat{g}_2$, где $\hat{g}_1$ и $\hat{g}_2$ суть решения уравнений

$$\hat{g}_j(t) - \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\,g_j(s)\,ds = \Gamma_\Delta(t)\,Q_j \quad (j = 1, 2). \tag{7.1$_j$}$$

Рассмотрим $\mathcal{M}$-функции $\hat{G}_j(\lambda) = Q_j + F(\hat{g}_j; \lambda)$. При выяснении свойств этих $\mathcal{M}$-функций будут использованы следующие предложения.

Лемма 7.1. *Пусть $\Gamma \in L^1_{n\times m}(R_+)$ и $\hat{g}_j \in L^1_{(m+n)\times(m+n)}(R_+)$ $(j=1.2)$ — $\mathcal{M}$-функции, удовлетворяющие соотношениям* (7.1$_j$). *Тогда имеют место тождества*

$$\hat{G}_j^*(\lambda)\,J\,\hat{G}_k(\lambda) = Q_jJQ_k \quad (\lambda \in R;\ j, k = 1, 2). \tag{7.2}$$

Лемма 7.2. *В условиях леммы 7.1 имеет место тождество*

$$[I_{m+n} - F(\Gamma_\Delta; \lambda)]\ \hat{G}_j(\lambda) = Q_j - \int_0^\infty \exp(-\lambda tJ)\hat{R}_j(t)\,dt \quad (j = 1, 2), \tag{7.3}$$

где

$$\hat{R}_j(t) = \int_0^\infty \Gamma_\Delta(s)\,\hat{g}_j(t+s)\,ds.$$

Доказываются эти леммы аналогично тому, как доказывались леммы 1.1 и 1.2.

Запись тождеств (7.3) в блочно-матричном представлении $\mathcal{M}$-функций $F(\Gamma_\Delta; \lambda)$ и $\widehat{G}_j(\lambda)$ ($j=1, 2$) приводит к совокупности тождеств, аналогичных тождествам (1.10):

$$F_+(\Gamma^*; \lambda)\,\widehat{G}_{21}^{(j)}(\lambda)=\widehat{G}_{11}^{(j)}(\lambda)-\widehat{Q}_{11}^{(j)}+F_-(\widehat{R}_{11}^{(j)}, \lambda);$$

$$F_+(\Gamma^*; \lambda)\,\widehat{G}_{22}^{(j)}(\lambda)=\widehat{G}_{12}^{(j)}(\lambda)-Q_{12}^{(j)}+F_-(\widehat{R}_{12}^{(j)}; \lambda), \tag{7.4}$$

$$F_-(\Gamma; \lambda)\,\widehat{G}_{11}^{(j)}(\lambda)=\widehat{G}_{21}^{(j)}(\lambda)-Q_{21}^{(j)}+F_+(\widehat{R}_{21}^{(j)}; \lambda);$$

$$F_-(\Gamma; \lambda)\,\widehat{G}_{12}^{(j)}(\lambda)=\widehat{G}_{22}^{(j)}(\lambda)-Q_{22}^{(j)}+F_+(\widehat{R}_{22}^{(j)}; \lambda).$$

В тождествах (7.2), подставляя значение матриц Q_j ($j=1, 2$), получим

$$1)\ \widehat{G}_1^*(\lambda)\,J\,\widehat{G}_1(\lambda)=0,\quad 2)\ \widehat{G}_1^*(\lambda)\,J\,\widehat{G}_2(\lambda)=\widehat{G}_2^*(\lambda)\,J\widehat{G}_1(\lambda)=0,$$

$$3)\ \widehat{G}_2^*(\lambda)\,J\,\widehat{G}_2(\lambda)=J_1,\ \text{где}\quad J_1:=\begin{bmatrix} Q_+ & 0 \\ 0 & -Q_- \end{bmatrix}. \tag{7.5}$$

Заметим теперь, что уравнения (7.1$_j$) ($j=1, 2$) определяют $\widehat{g}_j$ неоднозначно. Для дальнейшего зафиксируем некоторое решение уравнения (7.1$_2$), удовлетворяющее условию $\widehat{g}_2(t)Q_2\equiv\widehat{g}_2(t)$ ($t\in R_+$). Для определения решения $\widehat{g}_1$ уравнения (7.1$_1$) воспользуемся следующим фактом. Если $\mathcal{M}$-функция H есть $((m+n)\times(m+n))$-матричное решение уравнения

$$H(t)-\int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\,H(s)\,ds=0, \tag{7.6}$$

удовлетворяющая условию $H(0)=-JQ_1$, то $\mathcal{M}$-функция $\widehat{g}_1(t)=JH'(t)$ удовлетворяет уравнению (7.1$_1$). Что касается решения $H(t)$ уравнения (7.6), удовлетворяющего условию $H(0)=-JQ_1$, то оно существует, поскольку $P(-JQ_1)=-JQ_1$.

В дальнейшем, говоря о решении уравнения (7.6), мы будем подразумевать решение $H(t)=\|H_{jk}(t)\|_{jk=1}^2$, выбранное следующим образом. Каждый столбец $h_k(0)$ ($k=\overline{1, m+n}$) матрицы $H(0)=-JQ_1$ принадлежит линеалу $\mathfrak{M}(0)$, и следовательно, представляется в виде $h_k(0)=\sum_{j=1}^{r}\alpha_{kj}\chi_j(0)$, где $\chi_j=\chi_j^{[1]}$ суть базовые элементы системы базисных D-цепочек $D(\chi_j; l_j)$ ($j=\overline{1, r}$) линеала $\mathfrak{M}$. В качестве „k"-ого столбца $h_k(t)$($k=\overline{1, m+n}$) $\mathcal{M}$-функции $H(t)$ возьмем $\sum_{j=1}^{r}\alpha_{kj}\chi_j(t)$.

Легко видеть, что так выбранная $\mathcal{M}$-функция $H(t)$ удовлетворяет условиям: 1) $H(t)\,Q_1\equiv H(t)$ ($t\in R$); 2) вектор-функция $H(t)\,a$

для любого $a \in C^{m+n}$ является базовым элементом максимальной D-цепочки.

В качестве решения $\hat{g}_1$ уравнения (7.1_1) будем рассматривать решение $\hat{g}_1(t) = JH'(t)$. Тогда $м$-функция $\hat{g}_1$ удовлетворяет условию $\hat{g}_1(t) Q_1 \equiv \hat{g}_1(t)$, и кроме того, F-преобразования $\hat{g}_1$ и H связаны соотношением $G_1(\lambda) = \lambda F(H; \lambda)$ $(\lambda \in R)$.

Для выбранных $м$-функций $\hat{G}_j(\lambda)$ $(j = 1, 2)$ тождества (7.5) вместе с соотношениями $\hat{G}_j(\lambda) Q_j = G_j(\lambda)(j = 1,2)$ приводят к следущим группам тождеств:

$$\hat{G}_{12}^{(1)}(\lambda) = -\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda) K^*$$

$$\hat{G}_{21}^{(1)}(\lambda) = -\hat{G}_{22}^{(1)}(\lambda) K$$

$$1) \qquad (\hat{G}_{12}^{(1)}(\lambda))^* \hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda) - \hat{G}_{22}^{(1)}(\lambda))^* \hat{G}_{21}^{(1)}(\lambda) = 0.$$

$$(\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{12}^{(1)}(\lambda) - (\hat{G}_{21}^{(1)}(\lambda))^* \hat{G}_{22}^{(1)}(\lambda) = 0$$

$$(\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda) - (\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{21}^{(1)}(\lambda) = 0$$

$$2) \qquad (\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)) - (\hat{G}_{21}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{21}^{(1)}(\lambda) = 0$$

$$(\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{12}^{(1)}(\lambda) - (\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{22}^{(1)}(\lambda) = 0. \tag{7.7}$$

$$(\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{21}^{(2)}(\lambda) - (\hat{G}_{21}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{21}^{(2)}(\lambda) = Q_-$$

$$3) \qquad (\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda) - (\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda) = Q_-$$

$$(\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda) = (\hat{G}_{21}^{(2)}(\lambda))^* \hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda) = 0.$$

Отметим некоторые свойства матриц $\hat{G}_1(\lambda), \hat{G}(\lambda) (\lambda \in R)$ и отображений, задаваемых ими.

Лемма 7.3. *Для любого* $\lambda \in R \setminus \{0\}$ *имеем:*

1) $\hat{G}_1(\lambda) a \neq 0$ $\forall 0 \neq a \in QC^{m+n}$ *и подпространство* $\hat{G}_1(\lambda) Q_1 C^{m+n}$ $(\subset C^{m+n})$ *является* J*-нейтральным.*

2) $\hat{G}(\lambda) a \neq 0$ $\forall 0 \neq a \in QC^{m+n}$ *и выполяется равенство*

$$(J\hat{G}(\lambda) a, J\hat{G}(\lambda) a) = (Ja, a)(= J_1 a, a)). \tag{7.8}$$

3) $\hat{G}(\lambda) QC^{m+n} \oplus J\hat{G}_1(\lambda) Q_1 C^{m+n} = C^{m+n}.$

Доказательство. 1) В силу равенства $G_1(\lambda) = \lambda F(H; \lambda)$ достаточно проверить, что $F(H; \lambda) a \neq 0$ $\forall 0 \neq a \in Q_1 C^{m+n}$. Последнее следует из 1° § 5, так как $F(H; \lambda) a = F(\chi; \lambda)$, где χ есть базовый элемент максимальной D-цепочки. J-нейтральность подпространства $G_1 Q_1 C^{m+n}$ следует из тождества (1); 7.5).

2) Поскольку $G(\lambda)a=G_1(\lambda)a$ при $Q_2a=0$, докажем неравенство $G(\lambda)a\neq 0$ в предположении $Q_2a\neq 0$. Допустим противное: $G(\lambda)a_0=0$ $(a_0\in QC^{m+n}, Q_2a_0\neq 0)$. Тогда, в силу леммы 5.6, существует элемент $\psi\in\mathfrak{M}$, удовлетворяющий условию $\psi(0)=-Ja_0\in\mathfrak{M}(0)$. Это противоречит тому, что $Q_2a\neq 0$.

Тождество (7.8) легко следует из соотношений (7.5).

3) Ортогональность подпространств $\widehat{G}(\lambda)QC^{m+n}$ и $J\widehat{G}_1(\lambda)Q_1C^{m+n}$ есть следствие тождеств (7.5). С другой стороны,

$$\dim\widehat{G}(\lambda)QC^{m+n}=\dim QC^{m+n}=m+n-r,$$

а

$$\dim J\widehat{G}_1(\lambda)Q_1C^{m+n}=\dim Q_1C^{m+n}=r. \ \square$$

Следствие 7.1. *Отображение* $\widehat{G}(\lambda)$: $QC^{m+n}\to\widehat{G}(\lambda)QC^{m+n}$ $(\lambda\in R\setminus\{0\})$ *устанавливает одновначное соответствие между множествами J-неотрицательных (J-нейтральных) подпространств из* $\widehat{G}(\lambda)QC^{m+n}$ *и* QC^{m+n} *соответственно.*

При этом максимальное J-неотрицательное подпространство в C^{m+n} входит в $\widehat{G}(\lambda)QC^{m+n}$ тогда и только тогда, когда оно является образом максимального J-неотрицательного расширения J-нейтрального подпространства $J\mathfrak{M}(0)$.

Доказательство. Первое утверждение есть непосредственное следствие соотношения (7.8).

Для доказательства второго утверждения заметим сначала, что, если $\widetilde{N}$ есть максимальное J-неотрицатльное, а N—J-нейтральное подпространства в некотором пространстве с J-метрикой, то условие $\widetilde{N}\supset N$ эквивалентно условию $\widetilde{N}\perp JN$. Теперь, требуемое утверждение в силу леммы 7.3, следует из равенств $\widehat{G}_1(\lambda)Q_1C^{m+n}=\widehat{G}_1(\lambda)J\mathfrak{M}(0)$.

Как известно (см. [17]) понятие углового оператора устанавливает одно-однозначное соответствие между множеством J-неотрицательных (J-нейтральных) подпространств и множеством нерастягивающих (изометрических) операторов. Таким образом, каждому максимальному J-неотрицательному подпространству $\widetilde{N}\subset QC^{m+n}$, содержащему подпространство $J\mathfrak{M}(0)$, соответствует угловой оператор B: $C^m\to C^n$, являющийся расширением оператора $-K$ ($-K$ есть угловой оператор $J\mathfrak{M}(0)$).

С другой стороны, произвольное максимальное J-неотрицательное подпространство в $\widehat{G}(\lambda)Q^{m+n}$ есть образ вышеуказанного подпространства $\widetilde{N}$ при отображении $G(\lambda)$. Угловой оператор S_B такого подпространства может быть найден с помощью дробно-линейного преобразования, ассоциированного с отображением $\widehat{G}(\lambda)$ (см. [15]):

$$S_B=(\widehat{G}_{21}(\lambda)+\widehat{G}_{22}(\lambda)B)(\widehat{G}_{11}(\lambda)+\widehat{G}_{12}(\lambda)B)^{-1}(\lambda\in R\setminus\{0\}). \tag{7.9}$$

Лемма 7.4. *Пусть заданы гильбертовы пространства H_1, H_2 и частично изометрический оператор $K: H_1 \to H_2$. Тогда произвольный нерастягивающий оператор $B: H_1 \to H_2$, являющийся расширением оператора K, имеет вид $B = K \oplus \hat{B}$, где $\hat{B}: H_1 \ominus R(K)^* \to H_2 \ominus \ominus R(K)$.*

Доказательство. По условию для любых $x \in R(K^*)$ и $y \in H_2$ имеем $(Kx, y) = (Bx, y)$, и следовательно, $B^* y - K^* y \perp R(K^*)$ $\forall y H_2$. Отсюда, в частности, для $y \in R(K)$ получаем $B^* y = K^* y + z$, где $z \perp R(K^*)$. Это, в силу неравенства $\|y\|^2 \geq \|B^* y\|^2 = \|K^* y\|^2 + \|z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, означает, что $z = 0$. Следовательно, $B^* y = K^* y$ $\forall y \in R(K)$, т. е. $B^*: R(K) \to \to R(K^*)$, что эквивалентно утверждению леммы. □

Теорема 7.1. *Произвольная нерастягивающая м-функция $S(\lambda)(\lambda \in R)$, допускающая представление (6.1), допускает также для каждого $\lambda \in R \setminus \{0\}$ представление в виде дробно-линейного преобразования (7.9) с некоторым нерастягивающим оператором $B = B(\lambda)$ вида*

$$B(\lambda) = -K \oplus \hat{B}(\lambda), \text{ где } \hat{B}(\lambda): Q_+ C^m \to Q_- C^n.$$

Доказательство. Для каждого $\lambda \in R \setminus \{0\}$ произвольный элемент J-нейтрального подпространства $\hat{G}_1(\lambda) Q_1 C^{m+n} = \hat{G}_1(\lambda) J \mathfrak{M}(0)$ имеет вид $G_1(\lambda) Q_1 a = \lambda F(H; \lambda) a = \lambda F(Ha; \lambda) = \lambda F(\chi; \lambda)$, где $\chi \in \mathfrak{M}$. Следовательно, в силу леммы 6.1, матрица $S(\lambda)(\lambda \in R \setminus \{0\})$ является расширением углового оператора подпространства $G_1(\lambda) J \mathfrak{M}(0)$. Поэтому $S(\lambda)$ является угловым оператором некоторого максимального J-неотрицательного подпространства, входящего в $G(\lambda) Q C^{m+n}$. Таким образом, в силу вышеуказанного, $S(\lambda)$ допускает представление (7.9). Указанный в теореме вид оператора B обусловлен леммой 7.4. □

Определение 7.1. Через $\mathbf{B}_{m \times n}(K)$ обозначим подмножество из $\mathbf{B}_{m \times n}$ (нерастягивающих м-функций из $H^\infty_{n \times m}$), элементы $B(\lambda)$ которого при каждом $\lambda \in R$ являются расширениями оператора $-K$, и следовательно, имеют вид:

$$B(\lambda) = -K \oplus \hat{B}(\lambda), \text{ где } \hat{B}(\lambda): Q_+ C^m \to Q_- C^n \ (\lambda \in R).$$

Отметим, что, если для оператора Γ имеет место определенный случай ($\dim \mathfrak{M}(0) = m$), то множество $\mathbf{B}_{n \times m}(K)$ состоит из одного элемента $-K$ ($\mathbf{B}_{n \times m}(K) = \{-K\}$).

Введем $(m \times m)$-матрицу-функцию $D_\pm(\lambda) = \left\| \left(\frac{\lambda \pm i}{\lambda} \right)^{l_k} \delta_{jk} \right\|_{j,k=1}^m$, где l_k — длины максимальных D-цепочек, образованных первыми m-столбцами $\chi_k(t)(k = \overline{1, m})$ м-функции $H(t)$ (при $\chi_k(t) \equiv 0$ полагаем $l_k = 0$).

Легко проверить, что так определенная м-функция $D_\pm(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$P_+ D_\pm(\lambda) = D_\pm(\lambda) P_+, \quad Q_+ D_\pm(\lambda) = D_\pm(\lambda) Q_+ = Q_+ \ (\lambda \in R).$$

Лемма 7.5. *Для произвольного* $B \in \mathrm{B}_{n\times m}(K)$ *отображение* $(\hat{G}_{11}(\lambda) + \hat{G}_{12}(\lambda) B(\lambda)) D_{-}(\lambda) : C^m \to C^m$ *обратимо при каждом* $\lambda \in \overline{C}_{+} \cup \{\infty\}$.

Доказательство. Ясно, что при $\lambda \neq 0$ достаточно доказать обратимость отображения $\hat{G}_{11}(\lambda) + \hat{G}_{12}(\lambda) B(\lambda)$. Рассмотрим вектор-функцию

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \begin{bmatrix} (\hat{G}_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) \hat{B}(\lambda))\, a \\ (G_{21}(\lambda) + G_{22}(\lambda) B(\lambda))\, a \end{bmatrix} = G_1(\lambda) \begin{bmatrix} P_{+} a \\ -KP_{+} a \end{bmatrix} +$$

$$+ G_2(\lambda) \begin{bmatrix} Q_{-} a \\ \hat{B}(\lambda)\, Q_{+} a \end{bmatrix} \quad (a \in C^m).$$

Легко видеть, что $\hat{\varphi}(\lambda)$ представляется в виде

$$\hat{\varphi}(\lambda) = [a, B(\lambda)\, a]^{\tau} + F(\varphi; \lambda), \text{ где } \varphi(t) = \hat{g}_1(t)[P_{+} a, -KP_{+} a]^{\tau} +$$

$$+ \hat{g}_2(t)\, [Q_1 a, \hat{B}(\lambda)\, Q_1 a]^{\tau}$$

является решением уравнения

$$\varphi(t) + \int_0^{\infty} \Gamma_{\Delta}(t+s)\, \varphi(s)\, ds = \Gamma_{\Delta}(t) \begin{bmatrix} a \\ B(\lambda)\, a \end{bmatrix}. \tag{7.10}$$

При этом $\hat{\varphi}(\lambda)$ принадлежит J-неотрицательному подпространству $G(\lambda)\, \mathfrak{M}_B$, где $\mathfrak{M}_B \subset QC^{m+n}$ является J-неотрицательным подпространством, отвечающем угловому оператору $B(\lambda)$. Поэтому для $\varphi(t)$ выполняется условие (5.8). Теперь, если допустить, что $(\hat{G}_{11}(\lambda) + \hat{G}_{12}(\lambda) B(\lambda))\, a = 0$ $(a \in C^m)$ при $\lambda \in C_{+}$, то в силу леммы 5.7, существовал бы элемент $\psi \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющий системе (5.6). Однако при $Q_{+} a \neq 0$ это противоречит условию $\hat{\psi}(0) = [a, B(\lambda) a]^{\tau} \in \mathfrak{M}(0)$. Если же $Q_{+} a = 0$, то имеем

$$\varphi(t) = g_1(t) \begin{bmatrix} P_{+} a \\ -KP_{+} a \end{bmatrix} = J \frac{d}{dt} \left(H(t) \begin{bmatrix} P_{+} a \\ -KP_{+} a \end{bmatrix} \right) =$$

$$= 2J \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} H_{11}(t)\, a \\ H_{21}(t)\, a \end{bmatrix} = J X'(t),$$

и противоречие получается с тем, что $X(t)$ есть базовый элемент максимальной D-цепочки.

Пусть теперь $\lambda \in R$. Рассмотрим вектор-функцию

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \begin{bmatrix} (\hat{G}_{11}(\lambda) + \hat{G}_{12}(\lambda)\, B(\lambda)\, D_{+}(\lambda)\, a \\ (\hat{G}_{21}(\lambda) + \hat{G}_{22}(\lambda)\, B(\lambda))\, D_{-}(\lambda)\, a \end{bmatrix} = \hat{G}_1(\lambda) \begin{bmatrix} D_{+}(\lambda)\, P_{+} a \\ -KD_{+}(\lambda)\, P_{+} a \end{bmatrix} +$$

$$+ \hat{G}_2(\lambda) \begin{bmatrix} Q_{+} a \\ \hat{B}(\lambda) Q_{+} a \end{bmatrix} \quad (a \in C^m).$$

Так как $\widehat{G}_1(\lambda)=\lambda F(H;\lambda)\ \forall\lambda\in R$, то $\widehat{G}_1(\lambda)[D_+(\lambda)P_+a, -KD_+(\lambda)P_+a]^\tau=$ $=\lambda F([2H_{11}, 2H_{21}]^\tau D_+(\lambda)P_+a, \lambda)$. Отсюда, как и при доказательстве леммы 6.2, получаем $\widehat{G}_1(\lambda)[D_+(\lambda)P_+a, -KD_+(\lambda)P_+a]^\tau=(\lambda+i)F(\chi;\lambda)$, где $\chi\in\mathfrak{M}$ образует D-цепочку длины $l=1$, а $\chi(0)=[P_+a, -KP_+a]^\tau$.

Поэтому для $\widehat{\varphi}(\lambda)$ имеем представление

$$\widehat{\varphi}(\lambda)=[a, B(\lambda)a]^\tau+F(\varphi;\lambda),\ \text{где}\ \varphi(t)=J\chi'(t)+i\chi(t)+$$

$$+\widehat{g}_2(t)[Q_+a, \widehat{B}(\lambda)Q_+a]^\tau,$$

и, следовательно, является решением уравнения (7.10).

Допустим теперь, что $(\widehat{G}_{11}(\lambda)+\widehat{G}_{12}(\lambda)\ B(\lambda))D_+(\lambda)a=0$ ($\lambda\in R$; $a\in C^m$). Тогда и $\widehat{\varphi}(\lambda)=0$, что, в силу леммы 5.6, влечет опять существование элемента $\psi\in\mathfrak{M}$, удовлетворяющего системе (5.6) При $Q_+a\neq0$ это противоречие. Если же $Q_+a=0$, то $\widehat{\varphi}(\lambda)=(\lambda+i)F(\chi;\lambda)=0$. Это в силу следствия 5.2, противоречит тому, что $\chi\in\mathfrak{M}$ есть базовый элемент D-цепочки длины $l=1$.

Наконец, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}(\widehat{G}_{11}(\lambda)+\widehat{G}_{12}(\lambda)\ B(\lambda))\ D_+(\lambda)=I_m$. □

Замечание 7.1. Рассмотрим класс $\mathbf{B}_{m\times n}(-K^*)$ нерастягивающих м-функций из $H^\infty_{m\times n}$, имеющих вид $B_1(\lambda)=-K^*\oplus\widehat{B}_1(\lambda)$, где $\widehat{B}_1(\lambda): Q_-C^n\to Q_+C^m$. Введем м-функции

$$D^{(1)}_\pm(\lambda)=\left\|\left(\frac{\lambda\pm i}{\lambda}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|^n_{j,k=1},$$

где l_k—длины максимальных D-цепочек с базовыми элементами $\chi_k(t)$ ($k=\overline{1,n}$), являющимися последними n вектор-столбцами м-функции $H(t)$. Тогда, аналогично лемме 7.5 можно доказать, что отображение $(\widehat{G}_{21}(\lambda)B_1(\lambda)+\widehat{G}_{22}(\lambda))D^{(1)}_-(\lambda): C^n\to C^n$ обратимо при каждом $\lambda\in$ $\in\overline{C}_-\cup\{\infty\}$.

Теорема 7.2. *Пусть* $\Gamma\in L^1_{n\times m}(R_+)$ *и* $\|\Gamma\|=1$. *Тогда формулой*

$$S_B(\lambda)=[(\widehat{G}_{21}(\lambda)+\widehat{G}_{22}(\lambda)\ B(\lambda))\ D_-(\lambda)]\ D^{-1}_-(\lambda)\ D_+(\lambda)[(\widehat{G}_{11}(\lambda)+$$

$$+\widehat{G}_{12}(\lambda)\ B(\lambda))\ D_+(\lambda)]^{-1}, \tag{7.11}$$

где $B(\lambda)$ *пробегает все множество* $\mathbf{B}_{n\times m}(K)$, *дается описание всех нерастягивающих м-функций* $S(\lambda)$, *допускающих представление* (6.1).

Доказательство. Формула (7.11) при $\lambda\neq0$ совпадает с формулой (7.9), и следовательно, $|S_B(\lambda)|\leqslant1$.

Для доказательства представления (6.1) рассмотрим сначала м-функцию $S_0(\lambda)$, соответствующую м-функции $B(\lambda)\equiv-K$. Для $S_0(\lambda)$ формула (7.11) имеет вид

$$S_0(\lambda)=[(2\widehat{G}_{21}^{(1)}(\lambda)+\widehat{G}_{21}^{(2)}(\lambda))D_-(\lambda)]D_-^{-1}(\lambda)D_-(\lambda)[(2\widehat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+$$
$$+\widehat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))D_+(\lambda)]^{-1}.$$

Имеем

$$D_-^{-1}(\lambda)D_+(\lambda)=\left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^m\in W_{m\times m}^-;(2\widehat{G}_{21}^{(1)}(\lambda)+\widehat{G}_{21}^{(2)}(\lambda))D_-(\lambda)\in W_{n\times m}^-$$

и $[(2\widehat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\widehat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))D_+(\lambda)]^{-1}\in W_{m\times m}^+$. Таким образом, $S_0\in W_{n\times m}$, т. е.

$$S_0(\lambda)=S_0(\infty)+\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Gamma}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\ (\widetilde{\Gamma}\in L_{n\times m}^1(R)).$$

При этом из сравнения тождеств (см. (7.4))

$$S_0(\lambda)(2\widehat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\widehat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))=2\widehat{G}_{21}^{(1)}(\lambda)+\widehat{G}_{21}^{(2)}(\lambda),$$

$$F_-(\Gamma;\lambda)(2\widehat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\widehat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))=2\widehat{G}_{21}^{(1)}(\lambda)+\widehat{G}_{21}^{(2)}(\lambda)+F_+(\widehat{R};\lambda)$$

получаем, что $\widetilde{\Gamma}\,|R_+=\Gamma$.

Далее, рассмотрим $S_B(\lambda)-S_0(\lambda)$. С помощью тождеств (7.7) легко проверить соотношение

$$S_0(\lambda)=(2\widehat{G}_{22}^{(1)}(\lambda)+\widehat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^{*-1}(2\widehat{G}_{12}^{(1)}(\lambda)+\widehat{G}_{12}^{(2)}(\lambda))^*.$$

Отсюда, используя опять соотношения (7.7), получаем

$$S_B(\lambda)-S_0(\lambda)=(2\widehat{G}_{22}^{(1)}(\lambda)+\widehat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^{*-1}\widehat{B}(\lambda)(\overset{\blacktriangle}{G}_{11}(\lambda)+\overset{\blacktriangle}{G}_{12}(\lambda)B(\lambda))^{-1}=$$

$$=[(2\widehat{G}_{22}^{(1)}(\lambda)+\overset{\blacktriangle}{G}{}_{22}^{(2)}(\lambda))D_-^{(1)}(\lambda)]^{*-1}D_+^{(1)}(\lambda)\widehat{B}(\lambda)[\overset{\blacktriangle}{G}_{11}(\lambda)+\overset{\blacktriangle}{G}_{12}(\lambda)(-K\oplus\widehat{B}(\lambda)]^{-1}.$$

В силу замечания 7.1 имеем $[(2\widehat{G}_{22}^{(1)}(\lambda)+\overset{\blacktriangle}{G}{}_{22}^{(2)}(\lambda))D_-^{(1)}(\lambda)]^{*-1}\in W_{n\times n}^+\subset$ $\subset H_{n\times n}^-$. Для завершения доказательства, поскольку $D_+^{(1)}(\lambda)\overset{\blacktriangle}{B}(\lambda)=$ $=\widehat{B}(\lambda)D_+(\lambda)=\overset{\blacktriangle}{B}(\lambda)$, достаточно проверить включение

$$D_+^{-1}(\lambda)[\overset{\blacktriangle}{G}_{11}(\lambda)+\overset{\blacktriangle}{G}_{12}(\lambda)(-K\oplus\overset{\blacktriangle}{B}(\lambda)]^{-1}\in H_{m\times m}^{\infty}. \tag{7.12}$$

Имеем

$$D_+^{-1}(\lambda)[\widehat{G}_{11}(\lambda)+\widehat{G}_{12}(\lambda)(-K\oplus\overset{\blacktriangle}{B}(\lambda))]^{-1}=(I_m+[(2\overset{\blacktriangle}{G}{}_{11}^{(1)}(\lambda)+$$

$$+\widehat{G}_{11}^{(2)})D_+(\lambda)]^{-1}\overset{\blacktriangle}{G}{}_{12}^{(2)}(\lambda)\overset{\blacktriangle}{B}(\lambda))^{-1}[(2\overset{\blacktriangle}{G}{}_{11}^{(1)}(\lambda)+\overset{\blacktriangle}{G}{}_{11}^{(2)}(\lambda))D_+(\lambda)]^{-1}.$$

Заметим, что $\mathcal{M}$-функция $\overset{\blacktriangle}{G}(\lambda)+\overset{\blacktriangle}{G}_1(\lambda)J$, блочно-матричное представление, которой имеет вид

$$\begin{bmatrix}2\overset{\blacktriangle}{G}{}_{11}^{(1)}(\lambda)+\overset{\blacktriangle}{G}{}_{11}^{(2)}(\lambda) & \overset{\blacktriangle}{G}{}_{12}^{(2)}(\lambda)\\ 2\widehat{G}_{21}^{(1)}(\lambda)+\overset{\blacktriangle}{G}{}_{21}^{(2)}(\lambda) & \widehat{G}_{22}^{(2)}(\lambda)\end{bmatrix},$$

является J-изометрической. Отсюда уже следует, что $\|[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+$ $+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))D_-(\lambda)]^{-1}G_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)\|\leqslant q<1$. Это влечет за собой требуемое включение (7.12), а следовательно и включение $S_B(\lambda)-S_0(\lambda)\in H^-_{n\times m}$.

Таким образом, представление (6.1) для $S_B(\lambda)$ доказано.

Обратно, пусть $S(\lambda)$—некоторая нерастягивающая м-функция, допускающая представление (6.1). Согласно теореме 7.1 она имеет также представление (7.9). Нужно доказать, что в этом представлении $B(\lambda)=-K\ominus\hat{B}(\lambda)\in\mathrm{B}_{n\times m}(K)$.

Имеем для $\hat{R}(\lambda):=S(\lambda)-S_0(\lambda)=(2\hat{G}_{22}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^{*-1}\hat{B}(\lambda)(\hat{G}_{11}(\lambda)+$ $+G_{12}(\lambda)\hat{B}(\lambda))^{-1}$. Отсюда

$$\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)(2\hat{G}_{22}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{22}^{(2)}(\lambda))^{*}\hat{R}(\lambda)=\hat{G}_{12}^{(2)}\hat{B}(\lambda)[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))+$$
$$+\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)]^{-1}=I_m-(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))[2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))+$$
$$+\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)]^{-1}.$$

Положим $\hat{X}(\lambda)=(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))^{-1}\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)$ и введем

$$\hat{\Phi}(\lambda):=(I_m+\hat{X}(\lambda)\hat{B}(\lambda))^{-1}(I_m-\hat{X}(\lambda)\hat{B}(\lambda))=$$
$$=[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))+\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)]^{-1}[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))-\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)]=$$
$$=2[(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))+\hat{G}_{12}^{(2)}(\lambda)\hat{B}(\lambda)]^{-1}(2\hat{G}_{11}^{(1)}(\lambda)+\hat{G}_{11}^{(2)}(\lambda))-I_m\in H^{\infty}_{n\times m}.$$

Далее, рассуждая так же как и в теореме 3.1, приходим к выводу: $B(\lambda)=-K\ominus\hat{B}(\lambda)\in\mathrm{B}_{n\times m}(K)$. □

Теорема 7.3. *Формулой* (7.11), *где* $B(\lambda)\in\mathrm{B}_{n\times m}(K)\cap W^{+}_{n\times m}$, *дается описание всех нерастягивающих м-функций* $S(\lambda)$, *допускающих представление* (6.4):

$$S(\lambda)=S(\infty)+\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Gamma}(t)e^{-i\lambda t}dt,$$

где $\tilde{\Gamma}\in L^1_{n\times m}(R)$ *является продолжением* Γ $(\tilde{\Gamma}|R_+=\Gamma)$. *При этом всегда* $S(\infty)=B(\infty)=-K\ominus\hat{B}(\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим выражение (7.11). Так как $B\in W^{+}_{n\times m}$, то ясно, что все множители правой части (7.11) принадлежат соответствующим винеровским классам. Поэтому $S\in W_{n\times m}$ и, следовательно, допускает представление (6.4). Условие $\tilde{\Gamma}|R_+=\Gamma$ выполняется, поскольку представление (6.4) есть частный случай (6.1).

Обратно, пусть нерастягивающая м-функция $S(\lambda)$ допускает представление (6.4). Тогда она подавно допускает представление (6.1) и, следовательно, в силу теоремы 7.2, определяется формулой (7.11) при некотором $B\in\mathrm{B}_{n\times m}(K)$. Докажем, что $B\in W^{+}_{n\times m}$. Имеем

$$(S(\lambda)\widehat{G}^{(2)}_{12}(\lambda)-\widehat{G}^{(2)}_{22}(\lambda))\,\widehat{B}(\lambda)=(2G^{(1)}_{21}(\lambda)+\widehat{G}^{(2)}_{21}(\lambda))-S(\lambda)(2\widehat{G}^{(1)}_{11}(\lambda)+\widehat{G}^{(2)}_{11}(\lambda)). \tag{7.13}$$

Заметим теперь, что при каждом $\lambda\in R$ существует в силу неравенства $|\widehat{G}^{(2)}_{12}(\lambda)\,(\widehat{G}^{(2)}_{22}(\lambda))^{-1}|\leqslant q<1$, и следовательно, принадлежит классу $W_{n\times m}$, *м*-функция $(S(\lambda)\,\widehat{G}^{(2)}_{12}(\lambda)-\widehat{G}^{(2)}_{22}(\lambda))^{-1}$. С другой стороны, правая часть равенства (7.13) принадлежит $W_{n\times m}$. Таким образом, $B\in W_{n\times m}$, а следовательно, и $W^{+}_{n\times m}$.

Для доказательства равенства $S(\infty)=B(\infty)$ в соотношении $S(\lambda)(\mathring{G}_{11}(\lambda)+\mathring{G}_{12}(\lambda)\,B(\lambda))=(\mathring{G}_{21}(\lambda)+\mathring{G}_{22}(\lambda)\,B(\lambda))$ перейдем к пределу при $\lambda\to\infty$. Получим требуемое. □

Следствие 7.2. *Пусть* $\widetilde{\Gamma}\in L^1_{n\times m}(R)$ *и для всех* $\lambda\in R$

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Gamma}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\right|\leqslant 1. \tag{7.14}$$

Тогда для оператора Γ, *порождённого м-функцией* $\Gamma:=\widetilde{\Gamma}|R_{+}$, *имеет место оценка* $\|\Gamma\|<1$.

Доказательство. Согласно лемме 6.1 имеем $\|\Gamma\|\leqslant 1$. Однако знак равенства здесь исключается. В самом деле, если $\|\Gamma\|=1$, то, согласно теореме 7.3, каждая нерастягивающая *м*-функция $S(\lambda)$, допускающая представление (6.4), удовлетворяет условию $S(\infty)=-K^{\ominus}\oplus\mathring{B}(\infty)\neq 0$, а выражение, стоящее под знаком нормы в (7.14), не удовлетворяет указанному условию.

Физико-химический институт АН УССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 23.VI.1983

Մ. Դ. ԿՐԵՅՆ, Ֆ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ. Ինտեգրալ հանկելյան օպերատորները և նրանց հետ կապված շարունակության խնդիրները *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկված են հետևյալ խնդիրները.

Խնդիր A_1. *Տրված է* $(0,\infty)$ *կիսաառանցքի վրա որոշված հանրագումարելի* $\Gamma(t)(n\times m)$*—մատրից-ֆունկցիան։ Պահանջվում է գտնել նրա այնպիսի* $\widetilde{\Gamma}(t)$ *հանրագումարելի շարունակություն, որոշված ամբողջ առանցքի վրա, և այնպիսի* $S(\infty)$ *հաստատուն* $(n\times m)$*—մատրից, որ* $S(\lambda)$ *մատրից-ֆունկցիան, (0,1) բանաձևով որոշված, լինի չձգող* ($|S(\lambda)|<1$ *կամայական իրական* λ*-ի համար։*

Խնդիր A_2. A_1 *խնդրի լուծելիության դեպքում տալ (0.1) ներկայացում թույլատրող բոլոր չձգող* $S(\lambda)$ *մատրից-ֆունկցիաների նկարագրումը։*

Ապացուցվում է, որ A_1 *խնդիրն ունի լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ* $\|\Gamma\|_2<1$ *որտեղ* Γ *-ն ինտեգրալ հանկելյան օպերատոր է, ծնված (0.2) բանաձևով։ Նշված* $\|\Gamma\|_2<1$ *պայմանի առկայության դեպքում տրվում է* A_2 *խնդրի լրիվ լուծումը։*

Դիտարկվում է նաև A_1 *և* A_2 *խնդիրների ընդլայնված տարբերակները, որտեղ դիտարկվում են (0.3) ներկայացում թույլատրող* $S(\lambda)$ *չձգող մատրից-ֆունկցիաները։*

M. G. KREIN, F. E. MELIK-ADAMIAN. *Integral Hankelian operators and associated continuation* (summary)

In the paper the following problems are considered.

Problem A_1. Let $\Gamma(t)$ be an $(n \times m)$ matrix-function integrable on $(0, \infty)$

Construct a $\tilde{\Gamma}(t)$ continuation of $\Gamma(t)$ integrable on the real axes as well as a $S(\infty)$ constant $(n \times m)$-matrix, such that the matrix-function $S(\lambda)$ given by (0.1) would be nonstretching ($|S(\lambda)| \leq 1$) for any real λ.

Problem A_2. Provided A_1 is solvable, give the description of all nonstretching $S(\lambda)$ matrix-function, for which (0.1) is valid.

It is proved that the problem A_1 is solvable if and only if $\|\Gamma\|_2 \leq 1$, where Γ—is an integral Hankelian operator, given by (0.2). The complete solution of the problem is given under the condition $\|\Gamma\|_2 < 1$.

Certain "generalization" of the problems A_1 and A_2, are also considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*. Некоторые приложения теоремы о факторизации унитарной матрицы, Функц. анализ и его прилож., 4, вып, 1970, 73—75.
2. *Ф. Э. Мелик-Адамян*. О некоторых прямых и обратных задачах канонических дифференциальных уравнений, Кандидатская диссертация, Ереван, 1968.
3. *М. Г. Крейн*. К теория акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем, ДАН СССР, III, № 6, 1956, 1167—1170.
4. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*. К теории s-матриц канонических дифференциальных уравнений с суммируемым потенциалом, ДАН Арм. ССР, XVI, № 4, 1968, 150—154.
5. *В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн*. Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори-Феера и Шура, Функц. анализ и его прилож., 2, вып. 4, 1968, 1—17.
6. *В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн*. Свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура—Такаги, Мат. сборник, 86 (128), 1971, 34—75.
7. *В. М. Адамян Д. З. Аров, М. Г. Крейн*. Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем. VI, № 2, 1971, 181—206.
8. *В. М. Адамян*. Невыражденные унитраные сцепления полуунитарных операторов. Функц. анализ и его прилож., 7, вып. 4, 1973, 1—16.
9. *Д. З. Аров, М. Г. Крейн*. О вычислении энтропийных функционалов и их минимумов в неопредеелнных проблеемах продолжений, Acta SCI Mathem., 45, 1983, 33—50.
10. *М. Г. Крейн*. Континуальные аналоги предложений о многочленах ортогональных на единичной окружности, ДАН СССР, 105, № 4, 1955, 637—640.
11. *Ф. Э. Мелик-Адамян*. К теории матричных акселерант и спектральных матриц-функций канонических дифференциальных систем, ДАН Арм.ССР, XV, № 4, 1967, 145—151.
12. *М. Г. Крейн, Г. К. Лангер*. Континулальные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности по индефинитному весу и связанные с ним проблемы продолжения, ДАН СССР, 258, № 3, 1981.
13. *H. Dym, J. Gohberg*. Hankel integrel operators and isometric interpolants on the line, Journ. of Funct. Anal , 54, № 3, 1983.
14. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 2 (80), 1958, 3—71.
15. *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмильян*. О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами, Мат. исследов., т. II, вып. 3, 1967, 64—96.
16. *В. П. Потпов*. Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Тр. ММО, т. 4, 1955, 125—236.
17. *М. Г. Крейн*. Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теория операторов в этих пространствах, Вторая летняя мат. школа, чсть 1, «Наукова думка», Киев, 1956, 15—93.