ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 4, 1984 Математика

УДК 517.98

М. Г. КРЕЙН, Ф. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ГАНКЕЛЕВЫ ОПЕРАТОРЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПРОБЛЕМЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ

Введение

В настоящей статье дается развернутое изложение результатов первой части работы [1] и ряда примыкающих новых результатов. Что же касается утверждеиий второй части [1], относящихся к теории канонических дифференциальных операторов, то подробному изложению их обоснований мы предполагаем посвятить отдельную статью. Впрочем, частично это было проделано в кандидатской диссертации одного из авторов [2]. Следует подчеркнуть, что исследования в [1] возиикли как продолжение работ [3, 4] для акселерант и S-матриц канонических дифференциальных операторов. Лишь на последнем этапе было осознано, что часть результатов [1] можно рассматривать как матрично-континуальные аналоги исследований [5, 6], получивших дальнейшее развитие и, в некотором отношении, завершение в работах [7, 8].

В настоящей работе рассматриваются различные классы матриц-функций заданного порядка $n \times m$, где n и m- произвольно фиксированные натуральные числа. Первоначально в [1] рассматривался „квадратный" случай ($n=m$). После работы [6] стало ясно, что все результаты переносятся на „прямоугольный" случай ($n \neq m$). Между прочим, это обстоятельство отмечалось уже в [9].

Настоящая статья посвящена решению следующих задач. При их формулировке мы используем обозначения, указанные в § 1, при этом без ограничения общности принимаем $m \leqslant n$.

Задача $(\mathrm{A})_1$. *Задана матрица-функция (сокращенно м-функция) $\Gamma \in L^1_{n \times m}(R_+)$ (в дальнейшем именуемая „отправной"). Требуется найти ее продолжение $\widetilde{\Gamma} \in L^1_{n \times m}(R)(\widetilde{\Gamma}|R_+ = \Gamma)$ и постоянную $(n \times m)$-матрицу $S(\infty)$ так, чтобы м-функция $S(\lambda)$ $(\lambda \in R)$, определенная формулой*

$$S(\lambda) = S(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Gamma}(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt, \tag{0.1}$$

была бы нерастягивающей при любом $\lambda \in R$ $(|S(\lambda)| \leqslant 1 \ \forall \lambda \in R)$.

Задача $(\mathrm{A})_2$. *В случае разрешимости задачи $(\mathrm{A})_1$ дать описание всех нерастягивающих м-функций $S(\lambda)$, допускающих представление* (0.1).

Оказывается, что решения задач $(\mathrm{A})_1$ и $(\mathrm{A})_2$ естественно получаются в терминах, связанных с ганкелевым оператором Γ: $L^1_{m\times 1}(R_+)\to L^1_{n\times 1}(R_+)$, порождаемым „отправной" м-функцией Γ по формуле

$$(\Gamma f)(t)=\int\limits_0^\infty \Gamma(t+s)\,f(s)\,ds\quad (f\in L^1_{m\times 1}(R_+);\ t\in R_+). \tag{0.2}$$

Имеет место утверждение:

Задача $(\mathrm{A})_1$ разрешима в том и только в том случае, когда $\|\Gamma\|_2\leqslant 1$.

Этот результат следует рассматривать как матрично-континуальный аналог классического результата Нехари (см. [5]).

Указанное условие $\|\Gamma\|_2\leqslant 1$ является также условием разрешимости „расширенной" задачи.

Задача $(\tilde{\mathrm{A}})_1$. *Задана „отправная" м-функция* $\Gamma\in L^1_{n\times m}(R_+)$. *Требуется найти такую м-функцию* $\Phi\in H^\infty_{n\times m}$, *чтобы*

$$R(\lambda)=\int\limits_0^\infty \Gamma(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt+\Phi(\lambda)\quad (\Phi\in H^\infty_{n\times m};\lambda\in R) \tag{0.3}$$

была бы нерастягивающей м-функцией для почти всех $\lambda\in R$.

Задача $(\tilde{\mathrm{A}})_2$. *В случае, когда* $\|\Gamma\|_2\leqslant 1$, *дать описание множества* $\mathbf{S}(\Gamma)$ *всех нерастягивающих м-функций* $S(\lambda)$, *допускающих представление* (0.3).

Задачи $(\mathrm{A})_2$ и $(\tilde{A})_2$ получают сравнительно простое решение, когда имеет место так называемый вполне неопределенный случай: $\|\Gamma\|_2<1$. Это решение было получено в [1] (при $n=m$). В этом случае имеют смысл операторы $(\mathrm{I}-\Gamma^*\Gamma)^{-1}$ и $(\mathrm{I}-\Gamma\Gamma^*)^{-1}$, действующие в пространствах $L^p_{m\times m}(R_+)$ и $L^p_{n\times n}(R_+)$ соответственно $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, что позволяет ввести в рассмотрение м-функции $G_{jk}(j,\ k=1,\ 2)$ порядка $m_j\times m_k(j,\ k=1,\ 2;\ m_1=m,\ m_2=n)$ по формулам

$$G_{11}(\lambda)=I_m+F_+((\mathrm{I}-\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^*\Gamma;\ \lambda);\quad G_{12}(\lambda)=F_+((\mathrm{I}-\Gamma^*\Gamma)^{-1})\,\Gamma;\ \lambda),$$

$$G_{21}(\lambda)=F_-((\mathrm{I}-\Gamma\Gamma^*)^{-1}\Gamma^*;\ \lambda);\quad G_{22}(\lambda)=I_n+F_-(\mathrm{I}-\Gamma\Gamma^*)^{-1}\Gamma\Gamma^*;\ \lambda).$$

С помощью этой четверки формулой

$$S(\lambda)=(G_{21}(\lambda)+G_{22}(\lambda)\,B(\lambda))\,(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)\,B(\lambda))^{-1} \tag{0.4}$$

устанавливается одно однозначное соответствие между множеством всех $B\in\mathbf{B}_{n\times m}$ и множеством всех $S\in\mathbf{S}(\Gamma)$. Через $\mathbf{B}_{n\times m}$ обозначается множество всех нерастягивающих м-функций из класса $H^\infty_{n\times m}$. Более того, описание м-функций $S(\lambda)$, требуемое в задаче (A_2), получается той же формулой (0.4), когда м-функция B пробегает все множество $\mathbf{B}_{n\times m}\cap W^+_{n\times m}$ нерастягивающих м-функций из винеровского класса $W^+_{n\times m}$.

В настоящей работе получено полное решение задач $(\mathrm{A})_2$ и $(\tilde{\mathrm{A}})_2$ и в случае, когда $\|\Gamma\|_2=1$.

Для исследования этого случая пришлось предварительно изучить свойства пар Шмидта $\{\xi, \eta\}$ оператора Γ, отвечающих какому-либо s-числу ρ, т. е. решение $\{\xi, \eta\}$ системы уравнений

$$\rho\xi(t) = \int_0^\infty \Gamma^*(t+s)\,\eta(s)\,ds;\ \rho\eta(t) = \int_0^\infty \Gamma(t+s)\,\xi(s)\,ds.$$

Поясним, что так как $\Gamma \in L^1_{n\times m}(R_+)$, то оператор Γ вполне непрерывен и, следовательно, можно говорить о его s-числах. В частности, при $\|\Gamma\|_2 = 1$ число $\rho = 1$ $(=\|\Gamma\|_2)$ всегда является (наибольшим) s-числом оператора Γ. Отметим, что в скалярном случае $(n=m=1)$ пары Шмидта были исследованы еще в [6], так что полученные нами результаты следует рассматривать как некоторое развитие результатов [6]. Впрочем в этом направлении мы не исчерпали всех возможностей.

В настоящей статье выясняется, что если $\|\Gamma\|_2 = 1$, то при решении поставленных задач существенную роль играет подпространство $\mathfrak{M}(0) \subset C^{m+n}$ векторов $[\xi(0), \eta(0)]$, составленных из значений в нуле пар Шмидта $\{\xi, \eta\}$, отвечающих s-числу $\rho = 1$, а также понятия D-цепочек, образованных парами Шмидта, и базовых элементов этих D цепочек.

Оказывается, что если $\dim \mathfrak{M}(0) = m$, то в этом и только в этом) случае задача $(\bar{A})_1$ (и подавно $(A)_1$) имеет единственное решение. При этом $м$-функция $S(\lambda)$ оказывается изометрической $м$-функцией из винеровского класса $W_{n\times m}$ и задается с помощью базовых элементов определенной системы D-цепочек (см. теорему 6.1). Если же $\dim \mathfrak{M}(0) < m$, то решения задач $(\bar{A})_2$ и $(A)_2$ даются опять-таки в виде дробно-линейного преобразования с помощью некоторой матрицы $\hat{G}(\lambda) = \|\hat{G}_{jk}(\lambda)\|^2_{jk=1} (\lambda \in R)$. Однако в качестве „параметра“ $B(\lambda)$ выступают уже матрицы-функции из более сложно определяемых классов $\mathbf{B}_{n\times m}(K)$ и $\mathbf{B}_{n\times m}(K) \cap W^+_{n\times m}$ (теоремы 7.2 и 7.3).

Как будет показано в другой работе авторов, результаты настоящей статьи позволяют получить решение матрично-континуальных аналогов „классической“ задачи Шура и ее „предшественницы“ — задачи Каратеодори—Теплица.

Поясним какого рода аналоги мы имеем в виду.

Аналогом задачи Шура является

З а д а ч а $(S)_1$. *Пусть задана м-функция* $C_N \in L^1_{n\times m}(0, N)$ $(0 < N < \infty)$. *Требуется найти условие существования м-функции E из класса* $\mathbf{B}^+_{n\times m}$ *(нерастягивающих м-функций, голоморфных в верхней полуплоскости C_+), представляемых в виде*

$$E(z) = \int_0^N C_N(t)\, e^{i\lambda t}\, dt + e^{i\lambda N}\,\Phi(\lambda), \tag{0.5}$$

где $\Phi \in H^-_{n\times m}$.

З а д а ч а $(S)_2$. *В случае разрешимости задачи* $(S)_1$ *дать описание всех м-функций* $F \in \mathbf{B}^+_{n\times m}$, *допускающих представление* (0.5).

Эти задачи сводятся к соответствующим задачам $(\tilde{A})_1$ и $(\tilde{A})_2$. Так, например, на этом пути совсем просто решается задача $(S)_1$. Для формулировки условия ее разрешимости рассмотрим вольтерров оператор $\mathbf{C}_N$: $L^2_{m\times 1}(0, N) \to L^2_{n\times 1}(0, N)$, определенный формулой

$$(\mathbf{C}_N f)(t) = \int_0^t C_N(t-s) f(s)\, ds \quad ((f \in L^2_{m\times 1}(0, N);\ t \in (0N)). \tag{0.6}$$

Оказывается, задача $(S)_1$ разрешима в том и только в том случае, когда $\|\mathbf{C}\|_2 \leqslant 1$.

Во вполне неопределенном случае $\|\mathbf{C}_N\| < 1$ задача $(S)_2$ легко решается на основании решения задачи $(A)_2$ (см. [9], где изложены некоторые результаты рукописи, относящиеся к [1]).

При рассмотрении матрично-континуального аналога проблемы Каратеодори—Теплица по смыслу самой задачи требуется, чтобы $n = m$.

Сформулируем здесь аналог проблемы Каратеодори—Теплица в несколько упрощенной форме.

З а д а ч а $(C-T)_1$. *Задана м-функция* $H_N \in L^1_{n\times n}(0, N)(0 < N < \infty)$.

Требуется найти ее продолжение $\tilde{H} \in L^1_{n\times n}(R_+)(\tilde{H}|(0, N) = H_N)$ *такое, что*

$$\operatorname{Re}\left(I_n + 2\int_0^\infty \tilde{H}(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\right) \geqslant 0 \quad (\lambda \in C_+). \tag{0.7}$$

З а д а ч а $(C-T)_2$. *В случае разрешимости задачи* $(C-T)_1$ *дать описание всех продолжений* $\tilde{H} \in L^1_{n\times n}(R_+)$, *удовлетворяющих условию* (0.7).

Справедливо следующее утверждение.

Задача $(C-T)_1$ разрешима тогда и только тогда, когда оператор $\mathbf{H}_N$, определяемый в $L^2_{n\times 1}(0, N)$ по формуле

$$(\mathbf{H}_N f)(t) = \int_0^t H_N(t-s) f(s)\, ds \quad (f \in L^2_{n\times 1}(0, N);\ t \in (0N)), \tag{0.8}$$

удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}(\mathbf{I} + 2\,\mathbf{H}_N) \geqslant 0. \tag{0.9}$$

При выполнении условия (0.9) решение задачи $(C-T)_2$ сводится к решению задачи $(S)_2$, в которой м-функция C_N определяется из уравнения Вольтерра

$$C_N(t) + \int_0^t H_N(t-s)\, C_N(s)\, ds + H_N(t) = 0 \quad (0 < t < N). \tag{0.10}$$

Поясним, что соотношение (0.10) эквивалентно операторному равенству

$$\mathrm{I} + 2\mathbf{H}_N = (\mathrm{I} - \mathbf{C}_N)(\mathrm{I} + \mathbf{C}_N)^{-1},$$

из которого, в свою очередь, следует

$$\mathrm{Re}(\mathrm{I} + 2\mathbf{H}_N) = \mathrm{I} + \mathbf{H}_N + \mathbf{H}_N^* = (\mathrm{I} + \mathbf{C}_N^*)^{-1}(\mathrm{I} - \mathbf{C}_N^*\mathbf{C}_N)(\mathrm{I} + \mathbf{C}_N)^{-1},$$

что означает эквивалентность условий $\|\mathbf{C}_N\| \leqslant 1$ и $\mathrm{Re}\,(\mathrm{I} + \mathbf{H}_N) > 0$.

Таким образом, задачи $(C-T)$ и (S) сводятся друг к другу.

По существу, задачи $(C-T)_1$ и $(C-T)_2$ ранее рассматривались с различных позиций. В работах [3, 10, 11] по прямым и обратным задачам спектральной теории канонических дифференциальных операторов рассматривалась *м*-функция $H(H^*(t) = H(-t);\ (-N < t < N))$, которая при выполнении условия (0.7) называлась акселерантой. В недавнем сообщении [12] изучался скалярный континуальный аналог проблемы Каратеодори — Теплица с обобщением на так называемый индефинитный случай.

Тем самым, по-видимому, впервые выясняется цепочка связей, ведущих от задачи (A) к задаче (S) и, далее, к задаче $(C-T)$.

В заключение следует отметить, что когда работа над статьей близилась к концу, авторами был получен препринт статьи [13], посвященный решению задачи $(A)_1$ при $\|\Gamma\|_2 \leqslant 1$ в классе изометрических *м*-функций $S(\lambda)$ и некоторым вопросам, связанным с нею. Как выяснилось, авторы статьи [13] не знали о существовании работы [1]. В то время как еще в [1] для случая $\|\Gamma\| < 1$ было получено общее решение задачи $(\tilde{A})_2$, авторы [13] ограничиваются задачей построения таких продолжений $\tilde{\Gamma}$, которым отвечают изометрические $S(\lambda)$ с наперед заданными отрицательными частными индексами. Как показано в § 4 (теорема 4.2, следствие 2), указанные в препринте результаты получатся как простые следствия решения задачи $(\tilde{A})_2$. Что касается случая $\|\Gamma\|_2 = 1$, то соответствующие исследования были проведены нами и авторами [13] независимо и разными методами, но и в этом случае основные результаты статьи [13] получаются как следствия общего решения задачи $(A)_2$ при $\|\Gamma\|_2 = 1$. Заметим, однако, что более детальное рассмотрение вопроса о частных индексах *м*-функций $S(\lambda)$ в настоящей редакции нашей статьи было стимулировано ознакомлением с содержанием препринта [13].

§ 1. Основные определения и тождества

1. Как обычно, через $C(R)$ будем обозначать поле комплексных (вещественных) чисел. Верхнюю и нижнюю открытые (замкнутые) полуплоскости обозначим через $C_\pm$ $(\overline{C}_\pm)$, а неотрицательную и неположительную полуоси — через $R_\pm^1$. Унитарное „n"-мерное пространство, элементами которого являются вектор-столбцы из n комплексных чисел, обозначим C^n. Норму $|A|$ $(n \times m)$-матрицы $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^n$ определим как норму отображения A: $C^m \to C^n$, определенного этой мат-

рицей. Класс $(n\times m)$-матриц-функций $A(t)=\|a_{jk}(t)\|_{j,\,k=1}^{n;\,m}$, элементы $a_{jk}(j=\overline{1,\,n};\ k=\overline{1,\,m})$ которых принадлежат определенному функциональному пространству, обозначим символом данного пространства с добавлением внизу индекса $n\times m$. Так, например, $AC_{n\times m}(R_+)$ означает класс $(n\times m)$-матриц-функций $A(t)=\|a_{jk}(t)\|_{j,\,k=1}^{n;\,m}$ таких, что $a_{jk}\in AC(R_+)$ $(j=\overline{1,\,n};\ k=\overline{1,\,m})$. Здесь $AC(R_+)$ означает банахово пространство абсолютно непрерывных на полуоси R_+ функций $a(t)$ с нормой

$$\|a\|=\sup_{t\in R_+}|a(t)|+\int_0^\infty|a'(t)|\,dt.$$

Через W и $W^\pm$ обозначаются винеровские алгебры функций вида

$$c+\hat{f}(\lambda):=c+\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\lambda t}dt\quad(c\in C;\ \lambda\in R;\ f\in L^1(R))$$

и

$$c+F_\pm(f;\ \lambda):=c+\int_0^\infty f(t)\,e^{\pm i\lambda t}\,dt\quad(c\in C;\ \lambda\in R;\ f\in L^1(R_+)).$$

Множество функций из $W(W^\pm)$, в представлении которых $c=0$, образуют подалгебру $\dot{W}(\dot{W}^\pm)$.

Рассматривая квадратные $((m+n)\times(m+n))$-матрицы, часто будет удобно задавать их блочно-матричные представления в разложении $C^{m+n}=C^m\oplus C^n$. Так, например, матрицу $J\,(=J_{m,\,n})$ определим по формуле

$$J=\begin{bmatrix} iI_m & 0\\ 0 & -iI_n\end{bmatrix}\ (I_n\text{ — единичная }(n\times n)\text{-матрица};\ J^2=-I_{m+n},\ J^*=-J).$$

Для произвольной м-функции $g\in L^1_{(m+n)\times(m+n)}(R)$ с помощью м-функции $\exp(\lambda tJ)$ определим F-преобразование по формуле

$$F(g;\ \lambda)=\int_0^\infty\exp(\lambda tJ)\,g(t)\,dt\quad(\lambda\in R).$$

Блочно-матричные представления м-функций $\exp(\lambda tJ)$ и $F(g;\ \lambda)$ имеют вид

$$\exp(\lambda tJ)=\begin{bmatrix} e^{i\lambda t}I_m & 0\\ 0 & e^{-i\lambda t}I_n\end{bmatrix};\quad F(g;\lambda)=\begin{bmatrix} F_+(g_{11};\ \lambda) & F_+(g_{12};\ \lambda)\\ F_-(g_{21};\ \lambda) & F_-(g_{22};\ \lambda)\end{bmatrix},$$

где $\|g_{jk}(t)\|_{j,\,k=1}^2$ есть блочно-матричное представление $g(t)$.

Пусть Γ — произвольная $(n\times m)$-матрица. Через Γ_Δ обозначим $(m+n)\times(m-n)$-матрицу вида

$$\Gamma_\Delta=\begin{bmatrix} 0 & \Gamma^*\\ \Gamma & 0\end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Легко проверить, что заданная $((m+n)\times(m+n))$-матрица N имеет вид (1.1) в том и только в том случае, когда выполняются сооотношения

$$N^*=N \text{ и } JN=-NJ. \tag{1.2}$$

Лемма 1.1. *Пусть* $\Gamma\in L^1_{n\times m}(R_+)$ *и* $g\in L^1_{(m+n)\times(m+n)}(R_+)$*—м-функции, связанные соотношением*

$$g(t)-\int_0^\infty \Gamma_\Delta^{\cdot}(t+s)\,g(s)\,ds=\Gamma_\Delta(t)\ \ (t\in R_+). \tag{1.3}$$

Тогда м-функция $G(\lambda):=I_{m+n}+F(g;\lambda)$ J*-унитарна при каждом вещественном* λ:

$$G^*(\lambda)\,JG(\lambda)=G(\lambda)\,J\,G^*(\lambda)=J\ \ \forall\lambda\in R. \tag{1.4}$$

Доказательство. Легко видеть, что каждое из соотношений (1.4) означает, что существует $G^{-1}(\lambda)=-JG^*(\lambda)J$. Поэтому достаточно проверить, например, равенство $G^*(\lambda)\,JG(\lambda)=J$. Оно равносильно равенству

$$\int_0^\infty g^*(t)\exp(-\lambda tJ)\,dt\,J\int_0^\infty \exp(\lambda tJ)\,g(t)\,dt+$$

$$+\int_0^\infty g^*(t)\exp(-\lambda tJ)\,dt\,J+J\int_0^\infty \exp(\lambda tJ)\,g(t)\,dt=0.$$

Заметим, что

$$\int_0^\infty g^*(t)\exp(-\lambda tJ)\,dt\,J\int_0^\infty \exp(\lambda tJ)\,g(t)\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^t g^*(t)\exp[\lambda(s-t)\,J]\,Jg(s)\,ds\,dt+$$

$$+\int_0^\infty\int_t^\infty g^*(t)\exp[\lambda(s-t)\,J]\,Jg(s)\,ds\,dt= \tag{1.5}$$

$$=\int_0^\infty\int_s^\infty g^*(t)\exp[\lambda(s-t)\,J]\,Jg(s)\,dt\,ds+$$

$$+\int_0^\infty\int_t^\infty g^*(t)\exp[\lambda(s-t)\,J]\,J\,g(s)\,ds\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty g^*(t+s)\exp(-\lambda tJ)\,Jg(s)\,dt\,ds+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty g^*(t)\exp(\lambda sJ)\,Jg(s+t)\,ds\,dt.$$

Последнее слагаемое этого равенства, учитывая соотношение (1.3) и свойства (1.2) матрицы Γ_Δ, можно преобразовать следующим образом:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty g^*(t)\exp(\lambda sJ)\,Jg(s+t)\,ds\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty g^*(t)\exp(\lambda sJ)\,J\left[\Gamma_\Delta(t+s)+\int_0^\infty\Gamma_\Delta(t+s+u)\,g(u)\,du\right]ds\,dt=$$

$$=-\int_0^\infty\left(\int_0^\infty g^*(t)\,\Gamma_\Delta(t+s)\,dt\right)\exp(-\lambda sJ)\,ds\,J-$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\int_0^\infty g^*(t)\,\Gamma_\Delta(t+s+u)\,dt\right)\exp(-\lambda sJ)\,Jg(u)\,ds\,du=$$

$$=\int_0^\infty(\Gamma_\Delta(s)-g^*(s))\exp(-\lambda sJ)\,ds\,J+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty(\Gamma_\Delta(s+u)-g^*(s+u))\exp(-\lambda sJ)\,Jg(u)\,ds\,du=$$

$$=-\int_0^\infty g^*(s)\exp(-\lambda sJ)\,ds\,J-$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty g^*(s+u)\exp(-\lambda sJ)\,Jg(u)\,ds\,du-$$

$$-J\int_0^\infty\exp(\lambda sJ)\left(\Gamma_\Delta(s)+\int_0^\infty\Gamma_\Delta(s+u)\,g(u)\,du\right)ds=$$

$$=-\int_0^\infty g^*(s)\exp(-\lambda sJ)\,ds\,J-\int_0^\infty\int_0^\infty g^*(s+u)\exp(-\lambda sJ)\,Jg(s)\,ds\,du-$$

$$-J\int_0^\infty\exp(\lambda sJ)\,g(s)\,ds.\ \square$$

Знак $\square$ будет обозначать конец доказательства.

Пусть $G(\lambda)=\|G_{jk}(\lambda)\|_{j,k=1}^2$ — блочно-матричное представление $G(\lambda)$. Тогда J-унитарность матрицы $G(\lambda)(\lambda\in R)$ дает следующую совокупность тождеств:

$$G_{11}^*(\lambda)\,G_{11}(\lambda)-G_{21}^*(\lambda)\,G_{21}(\lambda)=I_m,\quad G_{22}^*(\lambda)\,G_{22}(\lambda)-G_{12}^*(\lambda)G_{12}(\lambda)=I_n,$$

$$G_{11}^*(\lambda)\,G_{12}(\lambda)-G_{21}^*(\lambda)G_{22}(\lambda)=0,\qquad(1.6)$$

$$G_{11}(\lambda)\, G_{11}^*(\lambda) - G_{12}(\lambda)\, G_{12}^*(\lambda) = I_m,\ G_{22}(\lambda)\, G_{22}^*(\lambda) - G_{21}(\lambda)\, G_{21}^*(\lambda) =$$
$$= I_n,\ G_{11}(\lambda)\, G_{21}^*(\lambda) - G_{12}(\lambda) - G_{22}^*(\lambda) = 0. \qquad (1.7)$$

Отсюда, в частности, следует обратимость матриц $G_{jj}(\lambda)$ ($j=1, 2$) при любом вещественном λ. В самом деле, $|\det G_{11}(\lambda)|^2 = \det G_{11}^*(\lambda)\ C_{11}(\lambda) = \det(I_m + G_{21}^*(\lambda)\, G_{21}(\lambda)) \geqslant 1$, аналогично $|\det G_{22}(\lambda)|^2 \geqslant 1$.

Замечание 1.1. Ниже мы отмечаем как отражаются те или иные структурные свойства *м*-функции $\Gamma(t)$ на *м*-функцию $G(\lambda)$.

Предварительно напомним обозначения. Для произвольной ($n \times m$)-матрицы $A = \|a_{jk}\|_{j,\ k=1}^{n,\ m}$ через $\overline{A}$ обозначается комплексно сопряженная матрица: $\overline{A} = \|\overline{a}_{jk}\|_{j,\ k=1}^{n,\ m}$, а через A^τ — транспонированная: $A^\tau = \|a_{jk}\|_{j,\ k=1}^{n,\ m}$.

1) Если $\Gamma(t)$ — симметрическая матрица: $\Gamma(t) = \Gamma^\tau(t)\ \forall t \in R_+$ (разумеется, в этом случае $n=m$), то $G(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$J_0 C(\lambda)\, J_0 = \overline{G}(\lambda)\left(\lambda \in R;\ J_0 := \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}\right). \qquad (1.8)$$

В самом деле, легко видеть, что $\Gamma_\Delta(t) = J_0\, \Gamma_\Delta(t)\, J_0$. Отсюда $I_0 g(t) J_0 = \overline{g(t)}$, что, вместе с равенством $\overline{\exp(\lambda tJ)} = J_0 \exp(\lambda tJ)\, J_0$, приводит к соотношению (1.8).

2) Если $\Gamma(t)$ — вещественная матрица: $\Gamma(t) = \overline{\Gamma(t)}\ \forall t \in R_+$, то $\overline{G(\lambda)} \equiv G(-\lambda)$ ($\lambda \in R$).

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из того, что $\Gamma_\Delta(t) = \overline{\Gamma_\Delta(t)}$, следовательно, и $g(t) = \overline{g(t)}$.

3) Если $\Gamma(t)$—вещественная и симметрическая матрица:

$$\Gamma(t) = \Gamma^\tau(t) = \overline{\Gamma(t)}\ \forall t \in R_+,\ \text{то}\ J_0\, G(\lambda)\, J_0 = \overline{G(\lambda)} = G(-\lambda)(\lambda \in R_+).$$

4. Если $\Gamma(t)$ эрмитова матрица: $\Gamma(t) = \Gamma^*(t)\ \forall t \in R_+$, то $J_0 G(\lambda) J_0 = G(-\lambda)$ ($\lambda \in R$).

Лемма 1.2. *При условиях леммы* 1.1 *имеет место тождество*:

$$[I_{m+n} - F(\Gamma_\Delta;\lambda)][I_{m+n} + F(g;\lambda)] = I_{m+n} - F(R;-\lambda) \quad (\lambda \in R), \qquad (1.9)$$

где $R(t)$*—м-функция, определенная равенством*

$$R(t) = \int_0^\infty \Gamma_\Delta(s)\, g(t+s)\, ds.$$

Доказательство. С помощью преобразования, аналогичного (1.5), находим

$$F(\Gamma_\Delta;\lambda)\, F(g;\lambda) = \int_0^\infty\int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s) \exp(-\lambda tJ)\, g(s)\, ds\,dt +$$
$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty \Gamma_\Delta(t) \exp(\lambda sJ)\, g(t+s)\, dt\,ds.$$

Отсюда

$$[I_{m+n} - F(\Gamma_\Delta;\lambda)][I_{m+n} + F(g;\lambda)] =$$

$$= I_{m+n} - \int_0^\infty \exp(-\lambda sJ) \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t)\, g(t+s)\, dt ds -$$

$$- \int_0^\infty \exp(\lambda tJ) \left(\Gamma_\Delta(t) - g(t) + \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\, g(s)\, ds \right) dt.$$

В силу соотношения (1.3) это приводит к равенству (1.9).□

Равенство (1.9) в блочно-матричном представлении можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} I_m & -F_+(\Gamma^*;\lambda) \\ -F_-(\Gamma;\lambda) & I^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}(\lambda) & G_{12}(\lambda) \\ G_{21}(\lambda) & G_{22}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m - F_-(R_{11};\lambda) & F_-(R_{12};\lambda) \\ -F_+(R_{21};\lambda) & I_n - F_+(R_{22};\lambda) \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем следующую совокупность тождеств:

$$\begin{gathered} F_+(\Gamma^*;\lambda)\, G_{21}(\lambda) = G_{11}(\lambda) - I_m + F_-(R_{11};\lambda); \\ F_+(\Gamma^*;\lambda)\, G_{22}(\lambda) = G_{12}(\lambda) + F_-(R_{12};\lambda) \\ F_-(\Gamma;\lambda)\, G_{11}(\lambda) = G_{21}(\lambda) - F_+(R_{21};\lambda); \\ F_-(\Gamma;\lambda)\, G_{12}(\lambda) = G_{22}(\lambda) - I_n + F_+(R_{22};\lambda). \end{gathered} \tag{1.10}$$

§ 2. *X*-функция ганкелева оператора

1. Через $E_{n\times m}$ будем обозначать какое-либо из пространств $L^1_{n\times m}(R_+)(1 \leqslant p < \infty)$ или $AC_{n\times m}(\bar{R}_+)$. Любая $\varkappa$-функция $\Gamma \in L^1_{n\times m}(R_+)$ порождает ганкелев оператор Γ: $E_{m\times 1} \to E_{n\times 1}$, действующий по формуле

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^\infty \Gamma(t+s)\, f(s)\, ds \quad (f \in E_{m\times 1}). \tag{2.1}$$

1°. *Как известно (см.* [6] *стр.* 70), *ганкелев оператор* Г, *действующий из* $E_{m\times 1}$ *в* $E_{n\times 1}$, *вполне непрерывен и в каждом из пространств* $E_{m\times 1}$ *имеет одни и те же s-числа. Пары Шмидта* $\{\xi, \eta\}$, *соответствующие данному s-числу* ρ: $\Gamma^*\eta = \rho\xi$ *и* $\Gamma\xi = \rho\eta$, *также не зависят от выбора пространства* $E_{m\times 1}$, *в котором рассматривается оператор* Г.

Это предложение, вместе с некоторыми другими предложениями, характеризующими ганкелев оператор, приведены в [6] для скалярного случая. Обобщение их на матричный случай не вызывает затруднений.

Вместе с функцией $\Gamma(t)$ и оператором Г рассмотрим функцию $\Gamma_\Delta(t)$, определенную формулой (11), и ганкелев оператор Γ_Δ, порожденный $\varkappa$-функцией $\Gamma_\Delta(t)$. Оператор Γ_Δ, рассматриваемый в пространстве $L^2_{(m+n)\times(m+n)}(R_+)$, самосопряжен. Следовательно, его спектр $\sigma(\Gamma_\Delta)$ вещественный. Легко убедиться, что $\sigma(\Gamma_\Delta)$ симметричен относительно нуля и $\sigma(\Gamma_\Delta) \cap R_+$ совпадает с множеством s-чисел оператора Г. Более того, если χ — собственный элемент Γ_Δ, отвечающий собственному значению $\rho \in R_+$ $(\Gamma_\Delta \chi = \rho\chi;\ \rho \in \sigma(\Gamma_\Delta) \cap R_+)$, то представление $\chi(t) = [\xi(t), \eta(t)]$ $(\xi \in L^2_{m\times 1}(R_+);\ \eta \in L^2_{n\times 1}(R_+))$ в разложении $L^2_{(m+n)\times 1}(R_+) = L^2_{m\times 1}(R_+) \oplus L^2_{n\times 1}(R_+)$ определяет пару Шмидта $\{\xi, \eta\}$ оператора Γ. В силу утверждения 1°, сказанное выше верно для оператора Γ, рассматриваемого в каждом из пространств $E_{m\times 1}$.

Если $1 \overline{\in} \sigma(\Gamma_\Delta)$, то уравнение (1.3) будет иметь решение $g \in L^1_{(m+n)\times(m+n)}(R_+)$, и следовательно, с оператором Γ_Δ можно будет связать J-унитарную $м$-функцию $G(\lambda)$. Ее мы будем называть G-матрицей, „сопровождающей" ганкелев оператор Γ_Δ (или Γ).

В дальнейших наших рассмотрениях существенную роль будет играть условие: $\|\Gamma_\Delta\|_2 < 1$ для Γ_Δ, рассматриваемого в $L^2_{(m+n)\times 1}(R_+)$. Всюду на протяжении этого параграфа будем считать это условие выполненным.

Рассмотрим „сопровождающую" $м$-функцию $G(\lambda)(\lambda \in R)$ оператора Γ_Δ. Ее блочно-матричное представление имеет вид

$$G(\lambda) = \begin{vmatrix} G_{11}(\lambda) & G_{12}(\lambda) \\ G_{21}(\lambda) & G_{22}(\lambda) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} I_m + F_+(g_{11};\lambda) & F_+(g_{12};\lambda) \\ F_-(g_{21};\lambda) & I_n + F_-(g_{22};\lambda) \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Непосредственно выражение $м$-функций G_{jk} $(j, k = 1, 2)$ через оператор Γ было дано во введении. Как явствует из записи (2.2), $м$-функции $G_{11}(\lambda)$ и $G_{12}(\lambda)$ $(G_{21}(\lambda)$ и $G_{22}(\lambda))$ аналитически продолжаются в верхнюю (нижнюю) полуплоскость и при этом принадлежат соответствующим винеровским классам.

Теорема 2.1. *При условии $\|\Gamma_\Delta\|_2 < 1$ матрица $G_{11}(G_{22})$ обратима при любом $\lambda \in \overline{C}_+$ $(\lambda \in \overline{C}_-)$ и, следовательно, в силу теоремы Винера, $G_{11}^{-1} \in W^+_{m\times m}$ $(G_{22}^{-1} \in W^+_{n\times n})$.*

Доказательство. Обратимость $G_{11}(G_{22})$ при $\lambda \in R$ была доказана выше. Рассмотрим $G_{11}(\lambda)$ при $\lambda \in C_+$. Допустим, что $\det G_{11}(\lambda_0) = 0$ при некотором $\lambda_0 \in C_+$. Тогда найдется такой вектор $a \in C^m$, что $G_{11}(\lambda_0)a = 0$. Поэтому вектор-функция $\hat{h}_+(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-1} G_{11}(\lambda)a$ аналитична в верхней полуплоскости и, более того, принадлежит классу $H^2_{m\times 1}$. В силу теоремы Пэли-Винера она представима в виде

$$\hat{h}_+(\lambda) = \int_0^\infty h_+(t)\, e^{i\lambda t}\, dt \quad (h_+ \in L^2_{m\times 1}(R_+);\ \lambda \in C_+).$$

Для вектор-функции $\hat{h}_-(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-1} G_{21}(\lambda)a$ подавно имеем

$$\hat{h}_-(\lambda) = \int_0^\infty h_-(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt \quad (h_- \in L^2_{n\times 1}(R_+);\ \lambda \in C_-).$$

Разделив соответствующее из тождеств (1.10) на $\lambda - \lambda_0$ и применив его к вектору a, получим

$$F_+(\Gamma^*;\lambda)\,\hat{h}_-(\lambda) = \hat{h}_+(\lambda) + r_-(\lambda) \quad (\lambda \in R;\ r_- \in W^-_{m\times 1}).$$

В терминах Фурье-прообразов это соотношение дает

$$\int_0^\infty \Gamma^*(t+s)\, h_-(s)\, ds = h_+(t) \quad (t \in R_+). \tag{2.3}$$

С другой стороны, из (1.6) имеем

$$|\hat{h}_+(\lambda)|^2 = \left(G_{11}(\lambda)\frac{a}{\lambda-\lambda_0},\, G_{11}(\lambda)\frac{a}{\lambda-\lambda_0}\right) = \left(G_{11}^*(\lambda)\, G_{11}(\lambda)\frac{a}{\lambda-\lambda_0},\, \frac{a}{\lambda-\lambda_0}\right) =$$

$$= \left(\frac{a}{\lambda-\lambda_0},\, \frac{a}{\lambda-\lambda_0}\right) + \left(G_{21}^*(\lambda)\, G_{21}(\lambda)\frac{a}{\lambda-\lambda_0},\, \frac{a}{\lambda-\lambda_0}\right) = \left|\frac{a}{\lambda-\lambda_0}\right|^2 +$$

$$+ |\hat{h}_-(\lambda)|^2 > |\hat{h}_+(\lambda)|^2 \quad (\lambda \in R).$$

Поэтому $\|\hat{h}_+\|_2 > \|\hat{h}_-\|_2$ и, следовательно, по теореме Планшереля, $\|h_+\|_2 > \|h_-\|_2$. Последнее, в силу соотношения (2.3), противоречит условию $\|\Gamma_\Delta\|_2 < 1$. Аналогично доказывается соответствующее утверждение для G_{22}. □

Следствие 2.1. $\det G_{11}(\lambda) = \det G_{22}^*(\bar{\lambda})$ $(\lambda \in \bar{C}_+)$.

В самом деле, из (1.6) для $\lambda \in R$ имеем

$$\det G_{11}(\lambda) \det G_{11}^*(\lambda) = \det (G_{11}^*(\lambda)\, G_{11}(\lambda)) = \det (I_m + G_{21}^*(\lambda) G_{21}(\lambda)) =$$

$$= \det (I_n + G_{21}(\lambda)\, G_{21}^*(\lambda)) = \det (G_{22}(\lambda)\, G_{22}^*(\lambda)) = \det G_{22}^*(\lambda) \det G_{22}(\lambda).$$

Из доказанной теоремы следует, что $(\det G_{11}(\lambda))^{\pm 1} \in W^+$ и $(\det G_{22}^*(\lambda))^{\pm 1} \in W^+$. Поэтому справедливо соотношение

$$(\det G_{22}^*(\lambda))^{-1} \det G_{11}(\lambda) = \det G_{22}(\lambda)\, (\det G_{11}^*(\lambda))^{-1} \quad (\lambda \in R).$$

Оно означает, что функция $(\det G_{12}^*(\lambda))^{-1} \det G_{11}(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Замечая теперь, что $\det G_{22}^*(\infty) = \det G_{11}(\infty) = 1$, приходим к равенству

$$(\det G_{22}^*(\bar{\lambda}))^{-1} \det G_{11}(\lambda) \equiv 1. \ \square$$

2. Определим в полуплоскости $\bar{C}_+$ $(m \times n)$-матрицу-функцию $X(\lambda)$, полагая

$$X(\lambda) := G_{11}^{-1}(\lambda)\, G_{12}(\lambda)\ (= G_{21}^*(\bar{\lambda})(G_{22}^*(\bar{\lambda}))^{-1}, \text{ в силу (1.7)}). \tag{2.4}$$

Ясно, что $X \in W^+_{m \times n}$. Более того, существует q $(0 < q < 1)$ такое, что

$$|X(\lambda)| \leqslant q \quad \forall \lambda \in \bar{C}_+. \tag{2.5}$$

В самом деле, на оси R м-функция X является сжимающей, ибо в силу (1.7)

$$X(\lambda)\, X^*(\lambda) = I_m - G_{11}^{-1}(\lambda)(G_{11}^*(\lambda))^{-1} \ll I_m \quad (\lambda \in R).$$

С другой стороны, $X(\infty) = 0$. Следовательно, найдется такое q $(0 < q < 1)$, что $|X(\lambda)| \leqslant q$ $\forall \lambda \in R$. Неравенство (2.5) теперь следует из принципа максимума для аналитических функций.

По $м$-функции X однозначно восстанавливается матрица G. Действительно, из (2.4) следует

$$G_{11}^{-1}(\lambda)\,(G_{11}^{*}(\lambda))^{-1}=I_m-X(\lambda)\,X^{*}(\lambda);\ G_{22}^{-1}(\lambda)\,(G_{22}^{*}(\lambda))^{-1}=$$
$$=I_n-X^{*}(\lambda)\quad(\lambda\in R). \qquad (2.6)$$

Поэтому $м$-функции G_{11}^{-1} и G_{22}^{-1} находятся как левые множители левой и правой канонической факторизации* $м$-функций $I_m-X(\lambda)\,X^{*}(\lambda)$ и $I_n-X^{*}(\lambda)\,X(\lambda)$ соответственно. Найдя G_{11} и G_{22}, находим G_{12} и G_{21} по формулам

$$G_{12}(\lambda)=G_{11}(\lambda)\,X(\lambda)(\lambda\in C_{+}),\ G_{21}(\lambda)=G_{22}(\lambda)\,X^{*}(\bar{\lambda})\ (\lambda\in C_{-}). \qquad (2.7)$$

M-функцию X в дальнейшем будем называть характеристической $м$-функцией оператора Γ и будем обозначать $X(\lambda)=X(\lambda;\Gamma)$.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы некоторой $(m\times n)$-матрице-функции $X(\lambda)$ $(\lambda\in\bar{C}_{+})$ отвечал ганкелев оператор Γ с $\|\Gamma\|_2<1$ такой, что $X(\lambda)=X(\lambda;\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $X\in W^{+}_{m\times n}$; 2) $|X(\lambda)|\leqslant q\ \forall\lambda\in\bar{C}_{+}$ *при некотором* $q<1$.

Доказательство. Необходимость условий 1), 2) доказана выше. Перейдем к доказательству достаточности. Условия 1) и 2), наложенные на $м$-функцию X, обеспечивают существование правой (левой) канонической факторизации $м$-функций $I_m-X(\lambda)\,X^{*}(\bar{\lambda})$ $(I_n-X^{*}(\lambda)\times\times X(\lambda))$ с нулевыми частными индексами (см. [14]). Это дает возможность по формулам (2.6) и (2.7) определить $м$-функции G_{jk} $(i,k=1,2)$. Легко проверить, что справедливы тождества (1.7). Это означает, что блочная матрица $G(\lambda)=\|G_{jk}(\lambda)\|_{j,k=1}^{2}$ является J-унитарной при каждом вещественном λ. Отсюда следует справедливость тождества (1.6).

Определим теперь $м$-функцию $S_0(\lambda)$ $(\lambda\in R)$ формулой

$$S_0(\lambda):=G_{21}(\lambda)\,G_{11}^{-1}(\lambda)\ (=(G_{22}^{*}(\lambda))^{-1}\,G_{12}^{*}(\lambda),\ \text{в силу (1.6)}). \qquad (2.8)$$

Поскольку $G_{21}\in\mathring{W}^{-}_{n\times m}$ и $G_{11}^{-1}\in W^{+}_{m\times m}$, $S_0\in\mathring{W}_{n\times m}$, т. е.

$$S_0(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Gamma}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\quad(\tilde{\Gamma}\in L^{1}_{n\times m}(R);\ \lambda\in R). \qquad (2.9)$$

С другой стороны, $S_0(\lambda)$ является сжимающей матрицей при всех $\lambda\in R$, ибо, в силу (2.8),

$$I_m-S_0(\lambda)S_0^{*}(\lambda)=(G_{11}^{*}(\lambda))^{-1}\,(G_{11}^{*}(\lambda)\,(G_{11}(\lambda)-$$
$$-G_{21}^{*}(\lambda)\,G_{21}(\lambda))\,G_{11}^{-1}(\lambda)=(G_{11}^{*}(\lambda))^{-1}\,G_{11}(\lambda)\gg 0.$$

Покажем теперь, что ганкелев оператор Γ_{+}, порожденный $(n\times m)$-матрицей-функцией $\Gamma=\tilde{\Gamma}|R_{+}$, является сжимающим: $\|\Gamma_{+}\|_2<1$. Для это-

---

* Определение правой и левой факторизаций см. стр. 329.

Отметим только, что для положительных $м$-функций из алгебры $W_{k\times k}$ частные индексы $\varkappa_j=0$ $(j=\overline{1,k})$ (см. [14]).

го рассмотрим оператор $\hat{\mathrm{U}}$: $L^2_{m\times 1}(R)\to L^2_{n\times 1}(R)$, действующий по формуле

$$(\hat{\mathrm{U}}\hat{f})(\lambda)=S_0(\lambda)\hat{f}(\lambda)\ (f\in L^2_{m\times 1}(R);\ \lambda\in R).$$

Ясно, что $\hat{\mathrm{U}}$ является сжимающим оператором. Будем рассматривать вектор-функции $\hat{f}(\lambda)$ как Фурье-образы элементов $f\in L^2_{m\times 1}(R)$:

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\lambda t}\,dt.$$

Последнее пространство естественным образом отождествим с ортогональной суммой двух копий пространства $L^2_{m\times 1}(R_+)$, а именно, всякому $f\in L^2_{m\times 1}(R)$ сопоставим пару $\{f_+, f_-\}$ $(f_\pm\in L^2_{m\times 1}(R_+))$, полагая $f_\pm(t)=f(\pm t)$ $(t\in R_+)$. Тогда оператор $\hat{\mathrm{U}}$ будет порождать сжимающий оператор U: $L^2_{m\times 1}(R_+)\oplus L^2_{m\times 1}(R_+)\to L^2_{n\times 1}(R_+)\oplus L^2_{n\times 1}(R_+)$; который можно представить в виде матрицы

$$\mathrm{U}=\begin{bmatrix}\mathrm{T}_+ & \Gamma_+\\ \Gamma_- & \mathrm{T}_-\end{bmatrix},$$

где операторы $\mathrm{T}_\pm$ и $\Gamma_\pm$ определяются формулами

$$(\mathrm{T}_\pm f)(t)=\int_0^{\infty}\tilde{\Gamma}(\pm(t-s))\,f(s)\,ds;$$

$$(\Gamma_\pm f)(t)=\int_0^{\infty}\tilde{\Gamma}(\pm(t+s))\,f(s)\,ds\ (f\in L^2_{m\times 1}(R_+);\ t\in R_+). \tag{2.10}$$

Условие $\mathrm{U}^*\mathrm{U}\leq\mathrm{I}$ приводит, в частности, к неравенству $([\mathrm{T}_-^*\mathrm{T}_-+\Gamma_+^*\Gamma_+]f_-, f_-)\leq(f_-, f_-)$. Отсюда $\|\Gamma_+f_-\|\leq\|f_-\|$, что, в силу полной непрерывности Γ_+, дает $\|\Gamma_+\|_2\leq 1$.

Докажем теперь, что $X(\lambda)$ является характеристической функцией именно оператора Γ_+: $X(\lambda)=X(\lambda;\Gamma_+)$. Заметим сперва, что построенная по $X(\lambda)$ J-унитарная м-функция $G(\lambda)$ представима в виде (2.2). Нужно доказать, что м-функция $g(t)=\|g_{jk}(t)\|^2_{j,k=1}$, участвующая в этом представлении, удовлетворяет уравнению (1.3), где м-функция $\Gamma(t)=\tilde{\Gamma}(t)$ $(t\in R_+)$ взята из представления (2.9) матрицы $S_0(\lambda)$. Для этого достаточно проверить справедливость тождеств

$$1)\ S_0(\lambda)G_{11}(\lambda)=G_{21}(\lambda);\quad 2)\ S_0(\lambda)G_{12}(\lambda)=G_{22}(\lambda)-(G^*_{22}(\lambda))^{-1};$$

$$3)\ S_0^*(\lambda)G_{22}(\lambda)=G_{12}(\lambda);\quad 4)\ S_0^*(\lambda)G_{21}(\lambda)=G_{11}(\lambda)-(G^*_{11}(\lambda))^{-1},$$

поскольку переход в этих соотношениях к Фурье-прообразам приводит к соотношению (1.3).

Тождества 1) и 3) непосредственно следуют из определения (3.8) м-функции $S_0(\lambda)$. Проверим равенство 2).

$$S_0(\lambda) G_{12}(\lambda) = S_0(\lambda) G_{11}(\lambda) X(\lambda) = G_{21}(\lambda) G_{11}^{-1}(\lambda) G_{11}(\lambda) X(\lambda) =$$
$$= G_{21}(\lambda) X(\lambda) = G_{21}) (G_{21}^{*}(\lambda) (G_{22}^{*}(\lambda))^{-1} =$$
$$= (G_{21}(\lambda) G_{22}^{*}(\lambda) - I_n) (G_{22}^{*}(\lambda))^{-1} = G_{22}(\lambda) - (G_{22}^{*}(\lambda))^{-1}.$$

Равенство 4) проверяется аналогично. □

§ 3. Описание множества нерастягивающих матриц-функций, порождаемых сжимающим ганкелевым оператором

1. Как обычно, через $H^{\infty}_{n\times m}$ обозначается множество $(n\times m)$-матриц-функций, элементы которых голоморфны в C_+ и ограничены в C_+. Через $\mathbf{B}_{n\times m}$ обозначим множество нерастягивающих $n\times m$ матриц-функций $B(\lambda)$ $(|B(\lambda)|\leqslant 1 \ \forall \lambda\in \overline{C}_+)$, принадлежащих $H^{\infty}_{n\times m}$.

Как и в § 2, рассмотрим ганкелев оператор Γ с $\|\Gamma\|_2\leqslant 1$ и его сопутствующую матрицу $G(\lambda)=\|G_{jk}(\lambda)\|^2_{j,k=1}$ $(\lambda\in R)$.

Теорема 3.1. *Формулой*

$$S_B(\lambda) = (G_{21}(\lambda) + G_{22}(\lambda) B(\lambda)) (G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1} \ (\lambda\in R), \qquad (3.1)$$

где $B\in \mathbf{B}_{n\times m}$, *дается описание всех измеримых* $(n\times m)$-*матриц-функций* $S(\lambda)$ *со свойствами*

1) $|S(\lambda)|\leqslant 1$ *почти всюду на вещественной оси.*

2) $S(\lambda) - F_-(\Gamma; \lambda)\in H^{\infty}_{n\times m}$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda) B(\lambda)$ Из определения характеристической м-функции $X(\lambda; \Gamma)$ имеем

$$G_{11}(\lambda) + G_{12}(\lambda) B(\lambda) = G_{11}(\lambda) (I_m + X(\lambda; \Gamma) B(\lambda)).$$

Поскольку $|X(\lambda; \Gamma) B(\lambda)|\leqslant q<1 \ \forall \lambda\in \overline{C}_+$, существует и принадлежит $H^{\infty}_{m\times m}$ выражение $(I_n + X(\lambda; \Gamma) B(\lambda))^{-1}$. С другой стороны, $G_{11}^{-1}\in W^{+}_{m\times m}\subset H^{\infty}_{m\times m}$. Таким образом, при любом $B\in \mathbf{B}_{n\times m}$ существует и принадлежит $H^{\infty}_{n\times m}$ м-функция $(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda) B(\lambda))^{-1}$. Следовательно, формула (3.1) имеет смысл при любом $B\in \mathbf{B}_{n\times m}$ и определяет почти всюду на R м-функцию $S_B(\lambda)$. Подставив в (3.1) $B(\lambda)\equiv 0$, получим сжимающую м-функцию $S_0(\lambda)$, введенную в теореме 2.2:

$$S_0(\lambda) = G_{21}(\lambda) G_{11}^{-1}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Gamma}(t) e^{-i\lambda t} dt \ (\widetilde{\Gamma}\in L^1_{n\times m}(R)).$$

Там же было доказано, что м-функция Γ, порождающая ганкелев оператор Γ, совпадает с $\widetilde{\Gamma}|R_+$. Таким образом, м-функция S_0 удовлетворяет условиям теоремы. Пусть теперь S_B м-функция, определенная формулой (3.1) при некотором $B\in \mathbf{B}_{n\times m}$. Учитывая второе представление для $S_0(\lambda)$: $S_0(\lambda)=(G_{22}^*(\lambda))^{-1}G_{21}^*(\lambda)$ и тождества (1.6), находим

$$S_B(\lambda)-S_0(\lambda)=(G_{22}^*(\lambda))^{-1}B(\lambda)(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)B(\lambda))^{-1}\in H^{\infty}_{n\times m}.$$

Поэтому S_B вместе с S_0 удовлетворяет условию 2. С другой стороны, формула (3.1) определяет почти всюду на R сжимающую м-функцию. S_B при любом $\mathbf{B}\in B_{n\times m}$, в силу J-унитарности почти всюду м-функции $G(\lambda)$. Дело в том, что всякая J-унитарная матрица $A=\|A_{jk}\|_{j,k=1}^2$ характеризуется с точностью до скалярного множителя тем свойством, что для нее имеет смысл дробно-линейное преобразование $(A_{21}+A_{22}B)\times\times(A_{11}+A_{12}B)^{-1}$ над любой матрицей B из гипершара $|B|\,|B|\leqslant 1|$, причем это преобразование отражает этот гипершар и множество его внутренних точек одно-однозначно на себя (см. [15]).

Таким образом, в одну сторону теорема доказана.

Докажем обратное. Пусть дана измеримая почти всюду на вещественной оси R $(n\times m)$-матрица-функция $S(\lambda)$, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Покажем, что она может быть получена по формуле (3.1) при определенном выборе $B\in\mathbf{B}_{n\times m}$.

Из J-унитарности матрицы $G(\lambda)$ следует, что коль скоро $S(\lambda)$ удовлетворяет условию 1), то найдется сжимающая $(n\times m)$-матрица-функция $B(\lambda)$, такая, что будет иметь место равенство (3.1). Покажем, что если $S(\lambda)$ удовлетворяет также условию 2), то $B(\lambda)$ принадлежит $H^{\infty}_{n\times m}$. В самом деле, при $R(\lambda):=S(\lambda)-S_0(\lambda)$ имеем

$$R(\lambda)=(G_{22}^*(\lambda))^{-1}B(\lambda)(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)B(\lambda))^{-1}\in H^{\infty}_{n\times m}.$$

Отсюда

$$G_{12}(\lambda)G_{22}^*(\lambda)R(\lambda)=G_{12}(\lambda)B(\lambda)(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)B(\lambda))^{-1}=$$
$$=I_m-G_{11}(\lambda)(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)B(\lambda))^{-1}$$

и поэтому

$$(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)B(\lambda))^{-1}=G_{11}^{-1}(\lambda)(I_m-G_{12}(\lambda)G_{22}^*(\lambda)R(\lambda))\in H^{\infty}_{n\times m}.$$

Положим

$$\Phi(\lambda):=(I_m+X(\lambda;\Gamma)^{-1}B(\lambda))(I_m-X(\lambda;\Gamma)B(\lambda))=$$
$$=(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)B(\lambda))^{-1}(G_{11}(\lambda)-G_{12}(\lambda)B(\lambda))=2(G_{11}(\lambda)+$$
$$+G_{12}(\lambda)B(\lambda))^{-1}G_{11}(\lambda)-I_m\in H^{\infty}_{n\times m}.$$

Так как $|X(\lambda;\Gamma)B(\lambda)|\leqslant q<1$ почти всюду на вещественной оси, то $\operatorname{Re}\Phi(\lambda)\gg 0$ при $\lambda\in R$, а следовательно, и при $\lambda\in\overline{C}_+$. Стало быть при $\lambda\in\overline{C}_+$ имеет смысл дробно-линейное преобразование $(I_m+\Phi(\lambda))^{-1}\times\times(I_m-\Phi(\lambda))=X(\lambda;\Gamma)B(\lambda)$, являющееся голоморфной сжимающей м-функцией. Таким образом, $B(\lambda)=G_{22}^*(\lambda)R(\lambda)G_{11}(\lambda)(I_m+X(\lambda;\Gamma)B(\lambda))$ принадлежит классу $H^{\infty}_{n\times m}$. □

Замечание 3.1. Так как $B(\lambda)\equiv 0$ есть внутренняя точка гипершара $\{B|\,|B|\leqslant 1\}$ при каждом $\lambda\in R$, то $|S_0(\lambda)|<1$ $\forall\lambda\in R$. Кроме того, $S_0(\infty)=0$. Поэтому

$$\max\{|S_0(\lambda)|\ \forall\lambda\in R\cup\{\infty\}\}<1.$$

Теорема 3.2. *Формулой* (3.1), *где* $B\in \mathbf{B}_{n\times m}\cap W^+_{n\times m}$, *дается описание всех м-функций* $S(\lambda)$ *со свойствами:*

1) $|S(\lambda)|\leqslant 1$ *всюду на вещественной оси* R,

2) *имеет место представление*

$$S(\lambda)=S(\infty)+\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Gamma}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\quad(\lambda\in R)\tag{3.2}$$

при некотором $\widetilde{\Gamma}\in L^1_{n\times m}(R)$, *являющемся продолжением заданного* Γ $(\Gamma=\widetilde{\Gamma}|R_+)$. *При этом, всегда* $S(\infty)=B(\infty)$.

Доказательство. Ясно, что если $B\in W^+_{n\times m}$, то и $(G_{11}+G_{12}B)\in W^+_{n\times m}$. Если еще $B\in \mathbf{B}_{n\times m}$, то как было доказано в теореме 3.1, существует и, следовательно, принадлежит классу $W^+_{n\times m}$ м-функция $(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)\,B(\lambda))^{-1}$. Поэтому м-функция $S(\lambda)$, полученная по формуле (3.1), принадлежит классу $W^+_{n\times m}$ и, стало быть, допускает представление (3.2).

При этом, м-функция $\widetilde{\Gamma}(t)$ $(t\in R)$ является продолжением заданного $\Gamma(t)$ $(t\in R_+)$ в силу того, что $S(\lambda)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 3.1.

Обратно, пусть некоторая м-функция $S(\lambda)$ $(\lambda\in R)$ обладает свойствами 1) и 2) теоремы 3.2. Тогда она подавно будет обладать свойствами 1) и 2) теоремы 3.1 и, стало быть, будет представима формулой (3.1) с некоторым $B\in \mathbf{B}_{n\times m}$. Выразим $B(\lambda)$ через $S(\lambda)$. Так как эти м-функции связаны соотношением (3.1), то $B(\lambda)$ выражается дробно-линейным преобразованием $S(\lambda)$ с помощью м-функции $G^{-1}(\lambda)=-J\,G^*(\lambda)\,J$ (см. [15]) в виде

$$B(\lambda)=(-G^*_{12}(\lambda)+G^*_{22}(\lambda)\,S(\lambda))(G^*_{11}(\lambda)+(G^*_{21}(\lambda)\,S(\lambda))^{-1}.$$

Вместе с S классу $W_{n\times n}$ принадлежит, очевидно, и $(-G^*_{12}(\lambda)+G^*_{22}(\lambda)\,S(\lambda))$.

Что касается м-функции $(G^*_{11}(\lambda)+G^*_{21}(\lambda)\,S(\lambda))^{-1}$, то она также принадлежит классу $W_{n\times m}$. В самом деле,

$$(G^*_{11}(\lambda)+G^*_{21}(\lambda)\,S(\lambda))^{-1}=[G^*_{11}(\lambda)\,(I_m+(G^*_{11}(\lambda))^{-1}\,G^*_{21}(\lambda)\,S(\lambda))]^{-1}=$$

$$=(I_m+S^*_0(\lambda)\,S(\lambda))^{-1}\,(G^*_{11}(\lambda))^{-1}.$$

Поскольку $\max\{|S_0(\lambda)|;\ \forall\lambda\in R\cup\{\infty\}\}<1$, то существует и, следовательно, принадлежит $W_{m\times m}$ м-функция $(I_m+S^*_0(\lambda)\,S(\lambda))^{-1}$. Поэтому классу $W_{m\times m}$ принадлежит м-функция $(G_{11}^{*}(\lambda)+G_{21}^{*}(\lambda)S(\lambda))^{-1}$, а потому $B\in W_{n\times m}^{+}$. Соотношение $S(\infty)=B(\infty)$ непосредственно следует из формулы (3.1) и равенства $G(\infty)=I_{m+n}$. □

§ 4. Унитарные продолжения, порожденные квадратным сжимающим ганкелевым оператором

1. Всюду в этом параграфе предполагается, что $\Gamma(t)$ — квадратная м-функция порядка n, порождающая сжимающий ганкелев оператор Γ ($\Gamma\in L_{n\times n}^{L}(R_{+})$; $\|\Gamma\|_{s}<1$). Простым следствием теоремы 3.1 является

Теорема 4.1. *Формулой (3.1), где $B\in \mathbf{B}_{n\times n}$ и принимает почти всюду на оси унитарные значения, дается описание множества всех измеримых на оси R $(n\times n)$-матриц-функций $S(\lambda)$ $(\lambda\in R)$ со свойствами*

1) *$S(\lambda)$-унитарная м-функция почти всюду на R,*

2) $S(\lambda)-F_{-}(\Gamma;\lambda)\in H_{n\times n}^{\infty}$.

Для дальнейшего нам понадобятся конечное матричное произведение Бляшке—Потапова (сокращенно БП-произведение). Оно имеет вид

$$\Pi(z)=U\overset{\frown}{\prod_{j=1}^{p}}\left[I_{n}-\left(\frac{z-\alpha_{j}}{z+\alpha_{j}}-1\right)P_{j}\right]\quad(z\in C).$$

Здесь U—унитарная матрица порядка n, P_j—самосопряженные иденпотентные матрицы того же порядка

$$(P_{j}^{*}=P_{j}^{2}=P_{j};\ j=\overline{1,p}),\quad \text{а}\quad \alpha_{j}\in C_{+}(j=\overline{1,p}).$$

Легко видеть, что $\Pi(z)$ обладает следующими свойствами:

1) $\Pi(z)$—голоморфная м-функция в C_{+},

2) $|\Pi(z)|\leqslant 1$ $\forall z\in C_{+}$,

3) $\Pi(z)$—непрерывная унитарная м-функция на сомкнутой вещественной оси $\widehat{R}=R\cup\{\infty\}$ $(\Pi(+\infty)=\Pi(-\infty))$.

Этими свойствами конечное БП-произведение характеризуется полностью. Иными словами можно утверждать следующее (см. [16]).

1°. *Для того, чтобы заданная $(n\times n)$-матрица-функция $\Pi(z)(z\in C_{+})$ совпадала с некоторым конечным БП-произведением, необходимо и достаточно, чтобы $\Pi(z)$ обладала свойствами* 1)—3),

Отметим, что $\det\Pi(z)=(\det U)\prod\left(\frac{z-\alpha_{j}}{z+\alpha_{j}}\right)^{r_{j}}$, где r_j равен рангу P_j $(r_j=\operatorname{rang}P_j=\dim P_jC^n,\ j=\overline{1,p})$. Таким образом

$$\operatorname{ind}\det\Pi(z)=\sum_{j=1}^{p}r_{j}. \tag{4.1}$$

Теперь мы можем дополнить теорему 4.1 следующим предложением.

Теорема 4.2. *Для того, чтобы некоторая непрерывная унитарная на сомкнутой оси* $\widehat{R} = R \cup \{\infty\}$ *м-функция* $S(\lambda)$ $(S(\lambda)\times \times S^*(\lambda) = S^*(\lambda)\, S(\lambda) = I_n \forall \lambda \in \widehat{R};\ S(+\infty) = S(-\infty))$ *обладала свойством*

1) $S(\lambda) - F_-(\Gamma;\ \lambda) \in H^\infty_{n\times n}$, *необходимо и достаточно, чтобы в ее представлении* (3.1) *м-функция* $B(\lambda)$ *была бы конечным БП-произведением.*

Если это условие выполнено, то:

а) $S \in W_{n\times n}$ *и допускает представление*

$$S(\lambda) = U + \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Gamma}(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt,$$

где $\widetilde{\Gamma} \in \Gamma^1_{n\times n}(R)$ и $\widetilde{\Gamma}|R_+ = \Gamma$.

б) *Все частные индексы* $S(\lambda)$ *неотрицательны; более того, они совпадают, соответственно, с частными индексами* $B(\lambda)$, *и следовательно*

$$\operatorname{ind}\det S(\lambda) = \operatorname{ind}\det B(\lambda). \tag{4.2}$$

В пояснение условия б) отметим, что если $(n\times n)$-матрица-функция $S(\lambda)$ имеет представление (3.2) и $\det S(\lambda) \neq 0$ $(\lambda \in R)$, то согласно общим теоремам из [14] она допускает правую (левую) факторизацию, т. е. представление вида

$$S(\lambda) = L_+(\lambda)\, D(\lambda)\, L_-(\lambda)\ (S(\lambda) = R_-(\lambda)\, D(\lambda)\, R_+(\lambda)), \tag{4.3}$$

где $D(\lambda)$ — диагональная м-функция $\left\| \left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{\varkappa_j} \delta_{jk} \right\|^n_{j,\,k=1}$ $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n$ — некоторые целые числа, а $L_\pm(\lambda)$ $(R_\pm(\lambda))$ — голоморфные в $C_\pm$ и непрерывные в $\overline{C}_\pm$ порядка $(n\times n)$ м-функции, причем $\operatorname{rang} L_\pm(\lambda) = n$ $(\operatorname{rang} R_\pm(\lambda) = n)$ $\forall \lambda \in \overline{C}_\pm$. Числа $\varkappa_j$ $(j = \overline{1, n})$ называются правыми (левыми) частными индексами м-функции $S(\lambda)$. Если же м-функция $S(\lambda)$ унитарна $(S^*(\lambda) = S^{-1}(\lambda))$, то легко видеть, что системы правых и левых частных индексов совпадает, и поэтому можно говорить просто о системе индексов $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n$ м-функции $S(\lambda)$. Отметим также, что $\operatorname{ind}\det S(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j$.

Доказательство теоремы: Пусть унитарная м-функция $S(\lambda)$ удовлетворяет условию 1). Тогда по теореме 4.1 она будет допускать представление (3.1) с $B(\lambda)$ $(\in B_{n\times n})$, принимающим унитарные значения на R. При этом условие непрерывности на $\widehat{R}$ для $S(\lambda)$ эквивалентно условию непрерывности на $\widehat{R}$ для $B(\lambda)$. Таким образом, для $B(\lambda)$ выполняются условия 1)—3) и, стало быть, является конечным БП-произведением.

Условие а) является следствием теоремы 3.2, поскольку, как легко видеть, всякое конечное БП-произведение принадлежит множеству $\mathbf{B}_{n\times n} \cap W^+_{n\times n}$.

Для доказательства условия б) преобразуем представление (3.1) $\mathscr{M}$-функции $S(\lambda)$ к виду (4.3). Имеем

$$(G_{21}(\lambda)+G_{22}(\lambda)B(\lambda))(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)B(\lambda))^{-1}=$$
$$=G_{22}(\lambda)(G_{22}^{-1}(\lambda)G_{21}(\lambda)B^*(\lambda)+I_n)B(\lambda)(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)B(\lambda))^{-1}=$$
$$=G_{22}(\lambda)(X^*(\lambda)B^*(\lambda)+I_n)B(\lambda)(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)B(\lambda))^{-1}.$$

Обратимость $G_{22}(\lambda)(X^*(\lambda)B^*(\lambda)+I_n)$ следует из теоремы 2.1 и условия $|X^*(\bar{\lambda})B^*(\bar{\lambda})|\leqslant q<1$ $\forall\lambda\in C_-$. Таким образом, представление (3.1) сведется к виду (4.3), коль скоро к тому же виду преобразуется $B(\lambda)$. Это доказывает, что частные индексы $S(\lambda)$ совпадают с частными индексами $B(\lambda)$, а последние неотрицательны, так как $B(\lambda)$ голоморфна в C_+. □

Следствие 4.1. Существует такое продолжение $\tilde{\Gamma}$ $\mathscr{M}$-функции Γ ($\tilde{\Gamma}|R_+=\Gamma$), что представление (4.3) $\mathscr{M}$-функции $S(\lambda)$ имеет наперед заданный диагональный множитель $D(\lambda)$, а следовательно, наперед заданные неотрицательные частные индексы.

В справедливости этого утверждения легко убедиться, заметив, что диагональная $\mathscr{M}$-функция $D(\lambda)=\left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{\varkappa_j}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^{2}$ может быть представима в виде БП-произведения.

Следствие 4.2. Для того, чтобы некоторая непрерывная на сомкнутой оси $\widehat{R}$ унитарная $\mathscr{M}$-функция $S(\lambda)$ ($S(\lambda)S^*(\lambda)=S^*(\lambda)S(\lambda)=I_n$; $S(+\infty)=S(-\infty)$) удовлетворяла условиям

1) $$S(\lambda)=S(\infty)+\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Gamma}(t)e^{-i\lambda t}\,dt,$$

где $\tilde{\Gamma}\in L^1_{n\times n}(R)$ и $\tilde{\Gamma}|R_+=\Gamma$;

2) $S(\lambda)$ допускает факторизацию с нулевыми частными индексами, необходимо и достаточно, чтобы в представлении (3.1) $\mathscr{M}$-функция $B(\lambda)$ была бы постоянной унитарной матрицей, равной $S(\infty)$.

Утверждение непосредственно следует из сопоставления равенств (4.1) и (4.3).

Рассмотрим унитарную $\mathscr{M}$-функцию $S(\lambda)$, удовлетворяющую условиям 1), 2) следствия 4.2. В дальнейшем для простоты записи положим $S(\infty)=I_n$. Это не ограничивает общности дальнейших рассмотрений.

Подобно тому, как это было проделано в § 2 при доказательстве теоремы 2.2, по $\mathscr{M}$-функции $S(\lambda)$ строится унитарный оператор $\mathbf{U}$, действие которого в пространстве $L^2_{n\times 1}(R_+)\oplus L^2_{n\times 1}(R_-)$ задается блочной матрицей

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}+\mathbf{T}_+ & \mathbf{\Gamma}_+\\ \mathbf{\Gamma}_- & \mathbf{I}+\mathbf{T}_-\end{bmatrix},$$

где операторы $\mathbf{T}_\pm$ и $\mathbf{\Gamma}_\pm$ определяются по формулам (2.10). Из унитарности оператора $\mathbf{U}$ ($\mathbf{UU^*}=\mathbf{U^*U}=\mathbf{I}$) следует ряд соотношений для операторов $T_{\pm}$ и $\Gamma_{\pm}$. В частности, получаем $(I+T_-)^*(I+T_-)=I-\Gamma_+^*\Gamma_+$. Отсюда следует, что $\|\Gamma_+\|_2\leqslant 1$. Однако знак равенства здесь исключается. В самом деле, так как оператор Γ_+ вполне непрерывен, то условие $\|\Gamma_+\|_2=1$ означает, что оператор $(I-\Gamma_+^*\Gamma_+)$ аннулируется на некотором ненулевом векторе $\varphi\in L^2_{n\times 1}(R_+)$. Отсюда $0=((I-\Gamma_+^*\Gamma_+)\varphi,\varphi)=$ $=((I+T_-)^*(I+T_-)\varphi,\varphi)=\|(I+T_-)\varphi\|_2^2$. Но это противоречит условию 2), поскольку оно эквивалентно условию обратимости оператора $I+T_-$ (см. [14]).

Это вместе со следствием приводит к утверждению.

Теорема 4.3. *Пусть* $\Gamma\in L^1_{n\times n}(R_+)$ *и* U*-унитарная матрица порядка* n. *Для того, чтобы существовало продолжение* $\tilde{\Gamma}_U\in$ $\in L^1_{n\times n}(R)$ *м-функции* Γ $(\tilde{\Gamma}_U|R_+=\Gamma)$, *которому по формуле*

$$S_U(\lambda)=U+\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Gamma}_U(t)\,e^{-i\lambda t}dt$$

отвечала бы унитарная м-функция $S_U(\lambda)$ *с нулевыми частными индексами, необходимо и достаточно, чтобы* $\|\Gamma\|_2<1$, *где* Γ*—ганкелев оператор, порожденный м-функцией* $\Gamma(t)$.

При выполнении этого условия м-функция $S_U(\lambda)$, *а с ней и продолжение* $\tilde{\Gamma}$, *определяются однозначно формулой* (3.1) *с* $B(\lambda)\equiv U$.

В завершение этого параграфа рассмотрим как отражаются те или иные структурные свойства м-функции $\Gamma(t)$ на свойствах м-функции $S_U(\lambda)$.

Воспользовавшись замечанием 1.1 § 1, легко находим:

1) Если $\Gamma(t)=\Gamma^{\tau}(t)\cdot\forall t\in R_+$, то $\overline{S}_U(\lambda)=S^{-1}_{U^{\tau}}(\lambda)$, в частности, $\overline{S}_{I_n}(\lambda)=S^{-1}_{I_n}(\lambda)$, $\forall\lambda\in R$.

2) Если $\Gamma(t)=\overline{\Gamma}(t)\ \forall t\in R_+$, то $\overline{S}_U(\lambda)=S_{\overline{U}}(-\lambda)$, в частности, $\overline{S}_{I_n}(\lambda)=S_{I_n}(-\lambda)$, $\forall\lambda\in R$.

3) Если $\Gamma(t)=\Gamma^{\tau}(t)=\overline{\Gamma}(t)\ \forall t\in R_+$, то $\overline{S}_U(\lambda)=S^{-1}_{U^{\tau}}(\lambda)=S_{\overline{U}}(-\lambda)$, в частности, $\overline{S}_{I_n}(\lambda)=S^{-1}_{I_n}(\lambda)=S_{I_n}(-\lambda)$, $\forall\lambda\in R$.

4) Если $\Gamma(t)=\Gamma^*(t)\ \forall t\in R_+$, то $S_U(-\lambda)=S^{-1}_{U^*}(\lambda)$, $\forall\lambda\in R$.

(Продолжение в следующем номере).

Физико-химический институт АН УССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 23.VI.1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян.* Некоторые приложения теоремы о факторизации унитарной матрицы, Функц. анализ и его прилож., 4, вып, 1970, 73—75.
2. *Ф. Э. Мелик-Адамян.* О некоторых прямых и обратных задачах канонических дифференциальных уравнений, Кандидатская диссертация, Ереван, 1968.

3. *М. Г. Крейн.* К теории акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем, ДАН СССР, III, № 6, 1956, 1167—1170.
4. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян.* К теории s-матриц канонических дифференциальных уравнений с суммируемым потенциалом, ДАН Арм. ССР, XVI, № 4, 1968, 150—154.
5. *В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн.* Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори-Фейера и Шура, Функц. анализ и его прилож., 2, вып. 4, 1968, 1—17.
6. *В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн.* Свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура—Такаги, Мат. сборник, 86 (128), 1971, 34—75.
7. *В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн.* Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем. VI, № 2, 1971, 181—206.
8. *В. М. Адамян.* Невырожденные унитарные сцепления полуунитарных оператооро. Функц. анализ и его прилож., 7, вып. 4, 1973, 1—16.
9. *Д. З. Аров, М. Г. Крейн.* О вычислении энтропийных функционалов и их минимумов в неопределенных проблемах продолжений, Acta SCI, Mathem., 45, 1983, 33—50.
10. *М. Г. Крейн.* Континуальные аналоги предложений о многочленах ортогональных на единичной окружности, ДАН СССР, 105, № 4, 1955, 637—640.
11. *Ф. Э. Мелик-Адамян.* К теории матричных акселерант и спектральных матриц-функций канонических дифференциальных систем, ДАН Арм.ССР, XV, № 4, 1967, 145—151.
12. *М. Г. Крейн, Г. К. Лангер.* Континуальные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности по индефинитному весу и связанные с ним проблемы продолжения, ДАН СССР, 258, № 3, 1981.
13. *H. Dym and J. Gohberg*, Hankel Integral Operators and Isometric Interpolants on the Line, Journ. of Functional Analysis, 54, № 3. December, 1983.
14. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 2 (80), 1958, 3—71.
15. *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян.* О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами, Мат. исследов., т. II, вып. 3, 1967, 64—96.
16. *В. П. Потапов.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Тр. ММО, т. 4, 1955, 125—236.
17. *М. Г. Крейн.* Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теория операторов в этих пространствах, Вторая летняя мат. школа, часть 1, «Наукова думка», Киев, 1965, 15—93.