ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIX, № 4, 1984 Математика

УДК 519.218

Ю. Р. ДАШЯН, Ю. М. СУХОВ

ГИББСОВСКОЕ ОПИСАНИЕ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

§ 1. Введение

Задача о гиббсовском описании случайных полей, возникшая в математической теории фазовых переходов, приобрела четкую формулировку после работ Добрушина [1]—[3], Лэнфорда—Рюэля [4] и Рюэля [5]. При таком описании случайному полю (точнее, порожденной им системе условных распределений) ставится в соответствие некоторая функция U (так называемый потенциал), аргументом которой служит произвольный конечный набор значений поля. Полезность такой конструкции состоит в том, что потенциал U играет роль своеобразного „свободно меняющегося" параметра, индексирующего случайные поля (точнее, классы случайных полей с заданной системой условных распределений). При этом целый ряд интересных свойств исходного случайного поля P можно естественным образом сформулировать в терминах потенциала. К числу таких свойств относятся, например, различные свойства регулярности (перемешивания) случайного поля и связанные с этим предельные теоремы в той или иной форме.

Особую важность имеет вопрос о взаимной однозначности соответствия между случайным полем и потенциалом U. В статистической механике возможность однозначного восстановления случайного поля по заданному потенциалу интерпретируется как отсутствие фазовых переходов. Эта ситуация представляет специальный интерес, поскольку при однозначном восстановлении свойства аслучайного поля в наиболее четкой форме выражаются в терминах потенциала.

Настоящая статья посвящена анализу одного из случаев, когда поле P однозначно восстанавливается по потенциалу U. Мы рассматриваем одномерный случай, когда речь идет о случайных процессах с дискретным временем и пространством значений R. Для других классов случайных процессов (а также—в более общей ситуации—и случайных полей) задача однозначного восстановления рассматривалась в [1]—[5], [6] и ряде других работ (см. ,в частности, библиографию в [6]).

Результаты настоящей статьи анонсированы в [7].

§ 2. Предварительные сведения и формулировка результатов

В этом параграфе мы сформулируем гиббсовский подход для случайных процессов с дискретным временем и вещественными значениями. Пространством реализаций случайного процесса является декартово произведение $X = X_Z = \mathbb{R}^Z$ — множество всевозможных отображений $\bar{x}: Z \to \mathbb{R}$, или — что эквивалентно — двусторонних последовательностей $\bar{x} = (x_i, i \in Z)$ вещественных чисел $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in Z$. На X рассматривается топология декартова произведения (тихоновская топология). Через χ обозначается σ-алгебра борелевских подмножеств X.

Аналогично, для любого $I \subset Z$ через X_I будем обозначать декартово произведение $\mathbb{R}^I$, т. е., множество последовательностей $\bar{x} = (x_i, \ i \in I)$, где $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$, а через χ_I — борелевскую σ-алгебру подмножеств X_I. Для $x \in X_I$, $I \subseteq Z$ положим Card x = Card I, где Card I обозначает мощность множества I.

При заданном $\bar{x} = (x_i, \ i \in I) \in X_I$, $I \subseteq Z$ обозначим через $\bar{x}_{I'}$ сужение отображения $\bar{x}$ на множество $I' \subset I: \bar{x}_{I'} = (x_i \ \ i \in I') \in X_{I'}$. Отображение ограничения $\pi: \bar{x} \in X \to \bar{x}_I \in X_I$ порождает σ-алгебру χ^I подмножеств X, изоморфную σ-алгебре $\chi_I: \chi_I = \{A \subseteq X: A = \pi_I^{-1} \bar{A}$, $\bar{A} \in \chi_I\}$. Обозначим через $B(Z)$ совокупность всевозможных конечных подмножеств $I \subset Z$. Объединение $\chi^{(0)} = \bigcup\limits_{I \in B(Z)} \chi^I$ является алгеброй подмножеств X. Минимальная σ-алгебра, содержащая $\chi^{(0)}$, совпадает с χ.

Пусть $X_{(0)} = \bigcup\limits_{I \in B(Z)} X_I$. Через χ_0 обозначим σ-алгебру $\{A \subseteq X_{(0)}: A \cap X_I \in \chi_I$, для любого $I \in B(Z)\}$. Для каждого $I \in B(Z)$ обозначим через m_I лебегову меру на (X_I, χ_I), являющуюся декартовым произведением Card I экземпляров лебеговой меры m на $\mathbb{R}$.

Отметим, что для любой пары множеств $I' \subset I \subseteq Z$ отображение ограничения $\pi_{I', I}: x \in X_I \to \bar{x}_{I'} \in X_{I'}$ порождает изоморфное вложение σ-алгебры $\chi_{I'}$ в σ-алгебру χ_I, т. е. изоморфизм σ-алгебры $\chi_{I'}$ и σ-подалгебры $\chi_I^{I'} \subset \chi_I$. Ввиду этого, всякая мера на χ_I индуцирует — если перейти к ее сужению на σ-подалгебру $\chi_I^{I'}$, и затем воспользоваться указанным изоморфизмом — меру на $\chi_{I'}$.

Если $I_1, I_2, \cdots, I_k \subset Z$, где $I_m \cap I_n = \varnothing$ при $1 \leqslant m < n \leqslant k$, $\bar{x}_j = (x_i^{(j)}, \ i \in I_j) \in X_{I_j}$, $j = 1, \cdots, k$, то через $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \cdots \vee \bar{x}_k$ обозначим элемент $\bar{x} = (x_i, \ i \in I) \in X_I$, где $I = \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j$ и $x_i = x_i^{(j)}$ при $i \in I_j$, $j = 1, \cdots, k$.

На пространствах X и $X_{(0)}$ действует группа сдвигов (трансляций) $T = \{T^j, \ j \in Z\}$: если $\bar{x} = (x_i, \ i \in Z) \in X$ (соответственно, $x_I = (x_i, \ i \in I) \in X_{(0)}$, где $I \in B(Z)$), то $T^j \bar{x} = (x_i', \ i \in Z)$, где $x_i' = x_{i-j}$ (соответственно, $T^j \bar{x}_I = (x_i', \ i \in I')$, где $I' = \{k \in Z: k - j \in I\}$ и $x_i' = x_{i-j}$).

Определение 1. Случайным процессом называется произвольная вероятностная мера P на измеримом пространстве (X, χ). Случайный процесс P называется трансляционно-инвариантным (стационарным), если для любых $A \in \chi$ и $j \in Z$ $P(T^j A) = P(A)$.

Замечание 1. Если два случайных процесса P_1 и P_2 совпадают на алгебре $\chi^{(0)}$, то $P_1 = P_2$.

Для заданного $I \subset Z$ обозначим через P^I ограничение случайного процесса P на σ-алгебру χ^I, а через P_I — вероятностную меру на (X_I, χ_I), индуцированную мерой P^I при изоморфизме $\chi^I \simeq \chi_I$.

Нетрудно убедиться в том, что пространство X с тихоновской топологией является так называемым польским пространством (см., например, [8]). Поэтому, согласно теореме Дуба (см. [9], гл. 1, § 3, теорема 3), для произвольного случайного процесса P и любой борелевской σ-подалгебры $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ существует условное распределение $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{X}')$, то есть, семейство вероятностных мер $\{[P(\cdot|\mathcal{X}')](\bar{y}), \bar{y} \in X\}$, порожденное P.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$\mathbf{Z}_+ = \mathbf{Z} \cap (0, \infty)$; $\mathbf{Z}_- = \mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}_+$; $\overline{m, n} = \{m, m+1, \cdots, n-1, n\}$, где $m, n \in \mathbf{Z}$, $m < n$; $I \pm n = \{k \in \mathbf{Z}: k \mp n \in I\}$, где $I \subseteq \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$. Через $[P^N(\cdot|\mathcal{X}^{\mathbf{Z}_+})](\bar{y})$ или $[P^{\mathbf{Z}_- - N}(\cdot|\mathcal{X}^{\mathbf{Z}_+})](\bar{y})$, где $\bar{y} \in X$ будем обозначать сужение вероятностной меры $[P(\cdot|\mathcal{X}^{\mathbf{Z}_+})](\bar{y})$ на σ-алгебру $\mathcal{X}^{\mathbf{Z}_- - N}$, через P^N — сужение $P^{\mathbf{Z}_- - N}$ и через Var — расстояние по вариации между вероятностными мерами

Определение 2. Случайный процесс называется P процессом с усиленным перемешиванием, если для P — почти всех $\bar{y} \in X$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}[[P^N(\cdot|\mathcal{X}^{\mathbf{Z}_+})](\bar{y}),\ P^N] = 0.$$

Пусть $I \in \mathbf{B}(\mathbf{Z})$. Вероятностную меру на $(\mathcal{X}_I, \mathcal{X}_I)$, индуцированную сужением $[P^I(\cdot|\mathcal{X}^{\mathbf{Z}\setminus I})](\bar{y})$ вероятностной меры $[P(\cdot|\mathcal{X}^{\mathbf{Z}\setminus I})](\bar{y})$ на σ-алгебру $\mathcal{X}^I$, мы обозначим через $P_I(\cdot; \bar{y})$.

Перейдем к определению гиббсовского случайного процесса. Прежде всего, введем определения потенциала и связанных с ним понятий. Потенциалом будем называть произвольную измеримую функцию $U: X_{(0)} \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Для заданых $\bar{x} \in X_I$ и $\bar{x}_j \in X_{I_j}$, где I, $I_j \in \mathbf{B}(\mathbf{Z})$, $j = 1, 2$, и $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ положим

$$h(\bar{x}) = \sum_{I' \subseteq I} U(\bar{x}_{I'}), \tag{2.1}$$

$$h(\bar{x}_1; \bar{x}_2) = h(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) - h(\bar{x}_2). \tag{2.2}$$

Определение 3. Будем говорить, что случайный процесс P является гиббсовским случайным процессом с потенциалом U, если при любом $I \in \mathbf{B}(\mathbf{Z})$

А) для $(m_I \times P)$ — почти всех пар $(\bar{x}, \bar{y}) \in X_I \times X$ существует (конечный или равный ∞) предел

$$h(\bar{x}; \bar{y}_{\mathbf{Z}\setminus I}) = \lim_{n\to\infty} h(\bar{x}; \bar{y}_{\overline{-n, n}\setminus I}); \tag{2.3}$$

Б) для P — почти всех $\bar{y} \in X$

$$0 < \Xi_I(\bar{y}) = \int_{X_I} m_I(d\bar{x}) \exp[-h(\bar{x}; \bar{y}_{\mathbf{Z}\setminus I})] < \infty. \tag{2.4}$$

В) для P — почти всех $\bar{y} \in X$

$$P_I(A; \bar{y}) = Q_I(A; \bar{y}),\ A \in \mathcal{X}_I, \tag{2.5}$$

где

$$Q_I(A; \bar{y}) = [\Xi_I(\bar{y})]^{-1} \int_A m_I(d\bar{x}) \exp[-h(\bar{x}; \bar{y}_{\mathbf{Z}\setminus I})]. \tag{2.6}$$

Перейдем к формулировке условий, налагаемых нами на потенциал U. Потенциал U называется трансляционно-инвариантным, если для любых $\bar{x} \in X_{(n)}$ и $j \in \mathbf{Z}$ справедливо равенство $U(\bar{x}) = U(T^j \bar{x})$. Потенциал называется бинарным (парным), если $U(\bar{x}) = 0$ для любого $\bar{x} \in X$ с Card $\bar{x} \geqslant 3$. Трансляционно-инвариантный бинарный потенциал задается двумя измеримыми функциями: $V_1: x \in \mathbf{R} \to V_1(x) \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ и $V_2: (x, x'; i) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{Z}_+ \to V_2(x, x'; i) \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. А именно,

$$U(\bar{x}) = \begin{cases} V_1(x), \text{ если Card } \bar{x} = 1, \ \bar{x} = (x) \in X_{\{i\}} = \mathbf{R}, \text{ где } i \in \mathbf{Z}, \\ V_2(x_i, x_j; |i-j|), \text{ если Card } \bar{x} = 2, \ \bar{x} = (x_i, x_j) \in \\ \qquad \in X_{\{i, j\}}, \text{ где } \{i, j\} \subset \mathbf{Z}, \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Сразу же оговорим, что всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что $m(\Omega) > 0$, где

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R} : V_1(x) < \infty\}, \quad (2.8)$$

и что функция V_2 симметрична относительно перестановки первых двух своих аргументов, т. е. $V_2(x, x'; i) = V_2(x', x; i)$ для любых $x, x' \in \mathbf{R}, i \in \mathbf{Z}_+$.

Перечислим условия, налагаемые на потенциал U.

[a] Потенциал U является трансляционно-инвариантным и бинарным и, следовательно, имеет вид (2.7).

Дальнейшие ограничения, налагаемые на U, формулируются в терминах функций V_1 и V_2, фигурирующих в представлении (2.7).

[b] $$\inf_{x \in \mathbf{R}} V_1(x) = c_0 > -\infty,$$

[c] $$\liminf_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} V_1(x) > 1, \quad \liminf_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} V_1(x) > 1,$$

[d] $0 \leqslant V_2(x, x'; i) \leqslant \Phi(i)|x|\,|x'|$, где $0 \leqslant \Phi(i) < \infty$, $i \in \mathbf{Z}_+$ и $\lim_{i \to \infty} \Phi(i) \exp(\alpha i) = 0$ для любого $\alpha > 0$,

[e] Существуют $\delta, \delta' > 0$, такие, что 1) $V_1(x) \leqslant \delta$ при $|x| < \delta'$ и (2) $V_2(x, x'; i) \leqslant \delta \Phi(i)$ при $\min(|x|, |x'|) < \delta'$.

Замечание 2. При выполнении условия [e] множество Ω, введенное в (2.8), заведомо содержит интервал $(-\delta', \delta)$.

Теорема 1. *Пусть U удовлетворяет условиям [a]—[e]. Тогда существует единственный гиббсовский случайный процесс P с потенциалом U.*

Теорема 2. *Пусть U удовлетворяет условиям [a]—[e]. Случайный процесс P, о котором идет речь в теореме 1, является трансляционно-инвариантным процессом с усиленным перемешиванием.*

Перейдем к формулировке результата об эргодических свойствах процесса P. Поскольку случайный процесс P является трансляционно-инвариантным, то четверка $(X, \mathcal{X}, P, T)$ задает динамическую систему в смысле эргодической теории (см. [11]—[12]).

Теорема 3. *Пусть U удовлетворяет условиям [a]—[e]. Тогда динамическая система $(X, \mathcal{X}, P, T)$ является Б-системой.*

§ 3. Некоторые предварительные оценки

Всюду в дальнейшем предполагается, что потенциал U удовлетворяет условиям [a]—[e]. Величину $h(\bar{x}; \bar{y}_{Z\setminus I})$, введенную в (2.3), можно представить в виде

$$h(\bar{x}; \bar{y}_{Z\setminus I}) = h(\bar{x}) + h(\bar{x}|\bar{y}_{Z\setminus I}), \tag{3.1}$$

где $h(\bar{x})$, $\bar{x} = (x_i, i \in I) \in X_I$, введено в (2.1) и теперь имеет вид:

$$h(\bar{x}) = \sum_{i\in I} V_1(x_i) + \frac{1}{2}\sum_{i, j\in I, i\neq j} V_2(x_i, x_j; |i-j|), \tag{3.2}$$

а $h(\bar{x}|\bar{y}_{Z\setminus I})$ определено равенством

$$h(\bar{x}|\bar{y}_{Z\setminus I}) = \lim_{n\to\infty} h(\bar{x}|\bar{y}_{\overline{-n,n}\setminus I}), \tag{3.3}$$

в котором для заданных $\bar{x}_j = (x_i^{(j)}, i \in I_j) \in X_{I_j}$, где $I_j \in \mathrm{B}(Z)$, $j=1, 2$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ обозначено

$$h(\bar{x}_1|\bar{x}_2) = \sum_{i\in I_1, j\in I_2} V_2(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}; |i-j|). \tag{3.4}$$

Поскольку $V_2 \geqslant 0$, для любых $I \in \mathrm{B}(Z)$ и $\bar{y} \in X$ величина $\Xi_I(\bar{y})$, определенная формулой (2.4), удовлетворяет оценкам

$$\Xi_I(\bar{y}) \leqslant e^{c_1 \mathrm{Card}\, I}, \quad c_1 = \ln \int_R m(dx)\, e^{-V_1(x)} < \infty. \tag{3.5}$$

Обозначим: $\Delta_I = \{\bar{x} = (x_i, i \in I) \in X_I : \max_{i\in I} |x_i| < \delta'\}$. Согласно условию [$e$], для любых $I \in \mathrm{B}(Z)$ и $\bar{y} \in X$ имеет место неравенство

$$\Xi_I(\bar{y}) \geqslant \int_{\Delta_I} m_I(d\bar{x})\, e^{-h(\bar{x}; \bar{y}_{Z\setminus I})} \geqslant e^{-c_2 \mathrm{Card}\, I}, \tag{3.6}$$

$$c_2 = \delta_1' + \ln 2\delta' + 3\delta \sum_{k\geqslant 1} \Phi(k).$$

Из условия [d] следует, что $c_2 < \infty$.

Ввиду оценок (3.5), (3.6), формула (2.6) определяет при всех $I \in \mathrm{B}(Z)$ и $\bar{y} \in X$ вероятностную меру $Q_I(A; \bar{y})$ на $\mathcal{X}_I$. Доказательство существования и единственности случайного процесса P с потенциалом U опирается на детальное исследование свойств меры $Q_I(A; \bar{y})$, когда множество I, расширяясь, заполняет все Z.

Предложение 3.1. *Пусть Φ — неотрицательная функция на множестве Z_+, такая, что при любом $\alpha > 0$ $\lim_{n\to\infty} \Phi(n)\, e^{\alpha n} = 0$. Зафиксируем произвольное $d > 0$. Тогда существуют две монотонно и неограниченно возрастающие последовательности натуральных чисел $\{r_n, n \in Z_+\}$, $\{s_n, n \in Z_+\}$, и двойная последовательность натуральных чисел $\{m_j^{(n)}, j \in Z, n \in Z_+\}$, удовлетворяющая условиям: $m_0^{(n)} \leqslant m_1^{(n)} < \cdots$, $m_j^{(n)} = m_{-j}^{(n)}$ при всех $j \in Z$ такие, что*

(a) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} < \infty$, *где* $a_n^{(1)} = 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(m_k^{(n)}\right)^2}$, (б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(2)}=0$, *где* $a_n^{(2)}=2\,[r_n\,(s_n+1)+1)]\,e^{-\left(m_0^{(n)}\right)^2}$,

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(3)}=0$, *где* $a_n^{(3)}=5\,(m_0^{(n)})^2 \sum\limits_{k>r_n}\Phi(k)+$

$$+12\,m_0^{(n)}\sum_{k>r_n}\Phi(k)\sum_{j=1}^{k-r_n} m_j^{(n)}+7\sum_{k>r_n}\Phi(k)\sum_{j=1}^{k} m_j^{(n)}\,m_{j+k}^{(n)},$$

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(4)}(d)=\infty$, *где* $a_n^{(4)}(d)=s_n\,e^{-5dr_n}-$

$$-2d\,(r_n+1)-4m_0^{(n)}\sum_{k>1}\Phi(k)\sum_{j=1}^{k} m_j^{(n)}.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что утверждение предложения 3.1 верно, например, для следующих последовательностей: $r_n=[(5d+d')^{-1}\ln n]$, $d'>0$ — фиксированное число,

$$s_n=n,\; m_j^{(n)}=m_0^{(n)}+[\ln|j|],\; m_0^{(n)}=[\ln n],\; n\in\mathbf{Z}_+,\; j\in\mathbf{Z}\setminus\{0\},$$

где $[x]$ — означает целую часть числа $x\in\mathbf{R}$.

Перейдем к детальному изучению вероятностных мер $Q_I(\cdot;\bar y)$, определенных по формуле (2.6). Выберем $d=c_1+c_2$ (см. (3.5), (3.6)) и зафиксируем последовательности r_n, s_n и $m_j^{(n)}$, о которых говорится в предложении 3.1. При этом будем предполагать, что последовательность $m_j^{(n)}$ выбрана так, что при всех n и j (см. условие (в)):

$$\int\limits_{\mathbf{R}\setminus\left[-m_j^{(n)},\,m_j^{(n)}\right]} m\,(dx)\,e^{-V_1(x)}\leqslant 2\,e^{-\left(m_j^{(n)}\right)^2}. \tag{3.7}$$

Выбор значения d будет обоснован в § 4 (см. замечание 3). Зафиксируем произвольное конечное множество $I_0=\overline{k_1,\,k_2-1}\subset\mathbf{Z}$, где $k_1<k_2$, положим $n_1=n_1(n)=r_n(s_n+1)+1$ и обозначим через I_n множество $\overline{k_1-n_1,\,k_2+n_1-1}$. Для любого $I\in\mathrm{B}(\mathbf{Z})$ такого, что $I\supseteq I_n$, обозначим

$$n_2=n_2(I)=\min\{j:j\in I\},\quad n_3=n_3(I)=\max\{j:j\in I\}\quad\text{и}$$
$$I_n^-=\overline{n_2,\,k_1-1},\; I_n^+=\overline{k_2,\,n_3}\,.$$

Через $Q_{I,\,I_0}(\cdot;\bar y)$ будем обозначать вероятностную меру на σ-алгебре $\mathcal{X}_{I_0}$, индуцированную мерой $Q_I(\cdot;\bar y)$:

$$Q_{I,\,I_0}(A;\bar y)=[\Xi_I(\bar y)]^{-1}\int\limits_A m_{I_0}(d\bar x)\,\Xi_{I,\,I_0}(\bar x;\bar y),\; A\in\mathcal{X}_{I_0}, \tag{3.8}$$

где

$$\Xi_{I,\,I_0}(\bar x;\bar y)=\int\limits_{X_I\setminus I_0} m_{I\setminus I_0}(d\bar z)\,\exp\left[-h\,(\bar z\vee\bar x;\,\bar y_{\mathbf{Z}\setminus I})\right]. \tag{3.9}$$

Выберем произвольное $0<\varepsilon<1/2$. В силу предложения 3.1, можно выбрать $n_0=n_0(\varepsilon)>k_2-k_1$ так, чтобы при всех $n\geqslant n_0$ выполнялись следующие неравенства:

$$e^{c_2}\,a_n^{(1)}<\varepsilon/102,\quad e^{c_2}\,a_n^{(2)}<\varepsilon/102; \tag{3.10}$$

$$e^{a_n^{(3)}}-1<\varepsilon/6,\quad e^{-a_n^{(4)}(d)}<\varepsilon/68. \tag{3.11}$$

Во всех последующих рассуждениях предполагается, что $n>n_0$ так, что выполнены неравенства (3.10) и (3.11).

Обозначим $C_i^{(n)}=\{x\in\mathbf{R}:|x|\leqslant m_i^{(n)}\}$, $\overline{C}_i^{(n)}=\mathbf{R}\setminus C_i^{(n)}$ и положим: $X^{(n)}(i)=\pi_{\{i\}}^{-1}C_i^{(n)}\subset X$, $\overline{X}^{(n)}(i)=\pi_{\{i\}}^{-1}\overline{C}_i^{(n)}\subset X$, $i\in Z$. Положим далее:

$$X_-^{(n)}=\bigcap_{k=1}^{\infty}X^{(n)}(-k),\quad X_+^{(n)}=\bigcap_{k=1}^{\infty}X^{(n)}(k)\ \text{ и }\ \overline{X}_-^{(n)}=X\setminus X_-^{(n)},\ \overline{X}_+^{(n)}=X\setminus X_+^{(n)}.$$

Первым шагом доказательства теоремы 1 является следующее утверждение, которое очевидным образом следует из неравенств (3.6), (3.7) и (3.10).

Лемма 3.2. *Пусть P — произвольный гиббсовский процесс с потенциалом U, который удовлетворяет условиям* [a]—[e]. *Тогда*

$$P(\overline{X}_-^{(n)})<\varepsilon/102,\quad P(\overline{X}_+^{(n)})<\varepsilon/102.$$

Для любых $A\in\mathcal{Z}_{I_0}$ и $I\in\mathrm{B}(\mathrm{Z})$ такого, что $I\supseteq I_n$, положим

$$A_n(I_0)=A\cap\pi_{\overline{k_1,k_2-1}}\left(\bigcap_{k=k_1}^{k_2-1}T^kX^{(n)}(0)\right), \tag{3.12}$$

$$S^{(n)}(I_n^-)=\pi_{I_n^-}\left\{\left(\bigcap_{k=k_1-n_1}^{k_1-1}T^kX^{(n)}(0)\right)\cap\left(T^{k_1-n_1}X_-^{(n)}\right)\right\}, \tag{3.13}$$

$$S^{(n)}(I_n^+)=\pi_{I_n^+}\left\{\left(\bigcap_{k=k_2}^{k_2+n_1-1}T^kX^{(n)}(0)\right)\cap\left(T^{k_2+n_1-1}X_+^{(n)}\right)\right\}. \tag{3.14}$$

В дальнейшем, для упрощения записи, условимся множество $(X_{I_0})_n(I_0)$ обозначать через $X_{I_0,n}$, а в интегралах вида (3.8), (3.9) опускать индексы I_0, $I_n^{\pm}$ и т. д. в обозначении дифференциала меры.

Пусть $I\in\mathrm{B}(\mathrm{Z})$ и $I\supseteq I_n$. Введем следующие величины:

$$\Xi_I^{(1)}(\overline{y})=\int\limits_{X_{I_0,n}}m(d\overline{x})\int\limits_{S^{(n)}(I_n^-)}m(d\overline{z}_-)\times$$

$$\times\int\limits_{S^{(n)}(I_n^+)}\times m(d\overline{z}_+)\,e^{-h(\overline{x}\vee\overline{z}_-\vee\overline{z}_+;\,\overline{y}_{Z\setminus I})}, \tag{3.15}$$

$$\Xi_{I,I_0}^{(1)}(\overline{x};\overline{y})=\int\limits_{S^{(n)}(I_n^-)}m(d\overline{z}_-)\int\limits_{S^{(n)}(I_n^+)}m(d\overline{z}_+)\,e^{-h(\overline{x}\vee\overline{z}_-\vee\overline{z}_+;\,\overline{y}_{Z\setminus I})}, \tag{3.16}$$

$$Q_{I,I_0}^{(1)}(A;\overline{y})=[\Xi_I^{(1)}(\overline{y})]^{-1}\int\limits_{A_n(I_0)}m(d\overline{x})\Xi_{I,I_0}^{(1)}(\overline{x};\overline{y}),\quad A\in\mathcal{Z}_{I_0}, \tag{3.17}$$

и, наконец,

$$P_n^{(1)}(A)=\int\limits_{Y(n)}P(d\overline{y})\,Q_{I,I_0}^{(1)}(\pi_{I_0}A;\overline{y}),\quad A\in\mathcal{Z}^{I_0}, \tag{3.18}$$

где

$$Y(n)=T^{k_1-n_1}\left(\bigcap_{k=k_1-n_1-n_2+1}X^{(n)}(-k)\right)\cap T^{k_2+n_1-1}\left(\bigcap_{k=n_3-k_2-n_1+2}^{\infty}X^{(n)}(k)\right). \tag{3.19}$$

Предложение 3.3. *Для любых $\bar{y} \in X$ и $I \in \mathrm{B}(\mathbf{Z})$ таких, что $I \supseteq I_n$, имеет место оценка*

$$0 \leqslant [\Xi_I^{(1)}(\bar{y})]^{-1} \Xi_I(\bar{y}) - 1 < 5\varepsilon/51.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение $1 - [\Xi_I(\bar{y})]^{-1} \Xi_I^{(1)}(\bar{y})$. Нетрудно видеть, что оно представляется в виде

$$[\Xi_I(\bar{y})]^{-1} \Big\{ \int\limits_{X_{I_0} \setminus X_{I_0, n}} m(d\bar{x}) \int\limits_{X_{I_n^-}} m(d\bar{z}_-) \int\limits_{X_{I_n^+}} m(d\bar{z}_+) + \int\limits_{X_{I_0, n}} m(d\bar{x}) \times$$

$$\times \int\limits_{X_{I_n^-} \setminus S^{(n)}(I_n^-)} m(d\bar{z}_-) \int\limits_{X_{I_n^+}} m(d\bar{z}_+) + \int\limits_{X_{I_0, n}} m(d\bar{x}) \int\limits_{S^{(n)}(I_n^-)} m(d\bar{z}_-) \times$$

$$\times \int\limits_{X_{I_n^+} \setminus S^{(n)}(I_n^+)} m(dz_+) \Big\} \{\exp - h(\bar{x} \vee \bar{z}_- \vee \bar{z}_+;\ \bar{y}_{Z \setminus I})\}. \tag{3.20}$$

Все три слагаемых в правой части (3.20) оцениваются при помощи аналогичных рассуждений. Например, второе слагаемое не превосходит

$$2e^{c_3}\Big(n_1 e^{-(m_0^{(n)})^2} + \sum_{l=1}^{\infty} e^{-(m_l^{(n)})^2}\Big) = e^{c_3}(a_n^{(1)} + a_n^{(2)}). \tag{3.21}$$

Той же величиной (3.21) можно оценить сверху третье слагаемое в правой части (3.20). Что касается первого слагаемого, то оно не превосходит величины $e^{c_3} a_n^{(2)}$. Таким образом, утверждение предложения 3.3 следует из оценки (3.10) и того факта, что $0 < \varepsilon < 1/2$.

Лемма 3.4. а) *Для любых $A \in \mathcal{X}_{I_0}$, $\bar{y} \in X$ и $I \in \mathrm{B}(\mathbf{Z})$ такого, что $I \supseteq I_n$*

$$|Q_{I, I_0}(A; \bar{y}) - Q_{I, I_0}^{(1)}(A; \bar{y})| < \varepsilon/6.$$

б) *Пусть P — гиббсовский процесс с потенциалом U. Тогда для любых $A \in \chi^{I_0}$ и $I \in \mathrm{B}(\mathbf{Z})$ такого, что $I \supseteq I_n$*

$$|P(A) - P_n^{(1)}(A)| < \varepsilon/6.$$

Доказательство. Имеем

$$|Q_{I, I_0}(A; \bar{y}) - Q_{I, I_0}^{(1)}(A; \bar{y})| \leqslant |Q_{I, I_0}(A; \bar{y}) - Q_{I, I_0}(A_n(I_0); \bar{y})| +$$

$$+ |Q_{I, I_0}(A_n(I_0); \bar{y}) - Q_{I, I_0}^{(1)}(A; \bar{y})|. \tag{3.22}$$

Первое слагаемое в правой части выражения (3.22) оценивается так же, как и первое слагаемое в правой части выражения (3.20), и таким образом, не превосходит $e^{c_3} a_n^{(2)}$. Далее, в силу предложения 3.3, получаем

$$|Q_{I, I_0}(A_n(I_0); \bar{y}) - Q_{I, I_0}^{(1)}(A; \bar{y})| = [\Xi_I(\bar{y})]^{-1} \Big| \int\limits_{A_n(I_0)} m(d\bar{x}) \{[\Xi_{I, I_0}(\bar{x}; \bar{y}) -$$

$$- \Xi_{I, I_0}^{(1)}(\bar{x}; \bar{y})] - \Xi_{I, I_0}^{(1)}(\bar{x}; \bar{y})[(\Xi_I^{(1)}(\bar{y})^{-1} \Xi_I(\bar{y}) - 1]\} \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5\varepsilon}{51} + [\Xi_I(\bar{y})]^{-1} \Big| \int\limits_{A_n(I_0)} m(d\bar{x}) [\Xi_{I, I_0}(\bar{x}; \bar{y}) - \Xi_{I, I_0}^{(1)}(\bar{x}; \bar{y})] \Big|. \tag{3.23}$$

Вновь используя рассуждения, проведенные при доказательстве предложения 3.3, нетрудно увидеть, что второе слагаемое в правой части (3.23) не превосходит $2e^{c_2}(a_n^{(1)}+a_n^{(2)})$. Таким образом, в силу (3.10)

$$|Q_{I,I_0}(A;\bar{y})-Q^{(1)}_{I,I_0}(A;\bar{y})|\leqslant\frac{5\varepsilon}{51}+2e^{c_2}a_n^{(1)}+3e^{c_2}a_n^{(2)}<\frac{5\varepsilon}{34}. \tag{3.24}$$

Утверждение б) следует из леммы 3.2 и оценки (3.24). Лемма доказана.

Лемма 3.4 представляет собой второй шаг в доказательстве теоремы 1. Рассмотрим бинарный трансляционно-инвариантный потенциал U_n, который задается двумя измеримыми функциями: $V_{1,n}$, $V_{2,n}$ (см. (2.7)), где $V_{1,n}\equiv V_1$, а

$$V_{2,n}(x,x';i)=\begin{cases} V_2(x,x';i), \text{ если } i\leqslant r_n,\\ 0, \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Введем следующие величины (h_n определяется по формулам (2.1), (2.2) с заменой потенциала U на U_n):

$$\Xi^{(2)}_I(\bar{y})=\int\limits_{X_{I_0,n}} m(d\bar{x})\int\limits_{S^{(n)}(I_n^-)} m(d\bar{z}_-)\int\limits_{S^{(n)}(I_n^+)} m(d\bar{z}_+)\,e^{-h(\bar{x})}\times$$

$$\times\exp[-h_n(\bar{x}\,|\bar{z}_-\vee\bar{z}_+)-h_n(\bar{z}_-\vee\bar{z}_+;\bar{y}_{Z\setminus I})], \tag{3.25}$$

$$\Xi^{(2)}_{I,I_0}(\bar{x};\bar{y})=\int\limits_{S^{(n)}(I_n^-)} m(d\bar{z}_-)\int\limits_{S^{(n)}(I_n^+)} m(d\bar{z}_+)\,e^{-h(\bar{x})}\times$$

$$\times\exp[-h_n(\bar{x}\,|\bar{z}_-\vee\bar{z}_+)-h_n(\bar{z}_-\vee\bar{z}_+;\bar{y}_{Z\setminus I})], \tag{3.26}$$

$$Q^{(2)}_{I,I_0}(A;\bar{y})=[\Xi^{(2)}_I(\bar{y})]^{-1}\int\limits_{A_{n(I_0)}} m(d\bar{x})\,\Xi^{(2)}_{I,I_0}(\bar{x};\bar{y}),\quad A\in\mathcal{X}_{I_0} \tag{3.27}$$

и, наконец,

$$P^{(2)}_n(A)=\int\limits_{Y(n)} P(d\bar{y})\,Q^{(2)}_{I,I_0}(\pi_{I_0}A;\bar{y}),\quad A\in\mathcal{X}^{I_0}. \tag{3.28}$$

Лемма 3.5. а) *Для любых* $A\in\mathcal{X}_{I_0}$, $\bar{y}\in Y(n)$ *и* $I\in\mathbf{B}(\mathbf{Z})$ *такого, что* $I\supseteq I_n$

$$|Q^{(1)}_{I,I_0}(A;\bar{y})-Q^{(2)}_{I,I_0}(A;\bar{y})|<\varepsilon/6.$$

б) *Пусть* P *— гиббсовский случайный процесс с потенциалом* U. *Тогда для любых* $A\in\mathcal{X}^{I_0}$ *и* $I\in\mathbf{B}(\mathbf{Z})$ *такого, что* $I\supseteq I_n$,

$$|P^{(1)}_n(A)-P^{(2)}_n(A)|<\varepsilon/6.$$

Доказательство. В силу условия [d] и выбора последовательностей r_n и s_n нетрудно подсчитать, что для любых

$$\bar{x}\in X_{I_0,n},\ \bar{z}_-\in S^{(n)}(I_n^-),\ \bar{z}_+\in S^{(n)}(I_n^+) \text{ и } \bar{y}\in Y(n)$$

$$1 \leqslant \frac{\exp\{-h(\bar{x}) - h_n(x|\bar{z}_- \vee \bar{z}_+) - h_n(\bar{z}_- \vee \bar{z}_+;\ \bar{y}_{Z \setminus I})\}}{\exp\{-h(\bar{x} \vee \bar{z}_- \vee \bar{z}_+;\ \bar{y}_{Z \setminus I})\}} \leqslant e^{a_n^{(3)}}.$$

Интегрируя $m(d\bar{x})$, $m(d\bar{z}_-)$ и $m(d\bar{z}_+)$, находим, что

$$1 \leqslant \frac{\Xi_I^{(2)}(\bar{y})}{\Xi_I^{(1)}(\bar{y})},\ \frac{\Xi_{I,I_0}^{(2)}(\bar{x};\bar{y})}{\Xi_{I,I_0}^{(1)}(\bar{x};\bar{y})} \leqslant e^{a_n^{(3)}}.$$

Отсюда

$$|Q_{I,I_0}^{(1)}(A;\bar{y}) - Q_{I,I_0}^{(2)}(A;\bar{y})| \leqslant \int\limits_{A_n(I_0)} m(d\bar{x})[\Xi_I^{(2)}(\bar{y})]^{-1}\Xi_{I,I_0}^{(1)}(\bar{x};\bar{y}) \times$$

$$\times \left|\frac{\Xi_{I,I_0}^{(2)}(\bar{x};\bar{y})}{\Xi_{I,I_0}^{(1)}(\bar{x};\bar{y})} - \frac{\Xi_I^{(2)}(\bar{y})}{\Xi_I^{(1)}(\bar{y})}\right| \leqslant e^{a_n^{(3)}} - 1.$$

Утверждение а) следует теперь из условия (3.11).

Утверждение б) вытекает из оценки

$$|P_n^{(1)}(A) - P_n^{(2)}(A)| \leqslant \int\limits_{Y(n)} P(d\bar{y})|\, Q_{I,I_0}^{(1)}(\pi_{I_0}A;\bar{y}) - Q_{I,I_0}^{(2)}(\pi_{I_0}A;\bar{y})|$$

и уже доказанного утверждения а). Лемма доказана.

§ 4. Завершение доказательства теоремы 1

Прежде всего, сделаем следующее замечание. Во всех интегралах $\int\limits_B m(dx)\exp\{-V_1(\bar{x})\}\cdots$ область интегрирования $B \subseteq \mathbf{R}$ можно заменить на $B \cap \Omega$, где множество Ω введено в (2.8). Введем следующие обозначения: $J_n = \overline{-r_n, r_n - 1}$, $S^{(n)}(J_n) = \Omega^{J_n} \cap \pi_{J_n}\left(\bigcap\limits_{k=-r_n}^{r_n-1} T^k X^{(n)}(0)\right)$, $\mathbf{L}_n^2 = \mathbf{L}^2(S^{(n)}(J_n), m_{J_n}(\cdot))$. Символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ будем обозначать скалярное произведение в пространстве $\mathbf{L}_n^2$. Рассмотрим в $\mathbf{L}_n^2$ интегральный оператор K_n, который задается следующим образом:

$$(K_n F)(\bar{x}) = \int\limits_{S^{(n)}(J_n)} m(d\bar{z})\,\rho_n(\bar{x},\bar{z})\,(F(\bar{z}),\ F \in \mathbf{L}_n^2,$$

где ядро ρ_n имеет вид

$$\rho_n(\bar{x},\bar{z}) = \exp\{-h(\bar{x}_-) - h(\bar{x}_+) - h_n(T^{-r_n}\bar{x}_-|z)_- - h_n\, T^{r_n}\bar{x}_+|\bar{z})\}$$

и где, в свою очередь, $\bar{x}_- = x_{\overline{-r_n,-1}}$, $\bar{x}_+ = x_{\overline{0,r_n-1}}$; $\bar{x}, \bar{z} \in S^{(n)}(J_n)$.

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Оператор K_n (соответственно, сопряженный оператор K_n^*) имеет единственный (с точностью до скалярного множителя) положительный собственный вектор $\Psi_n \in \mathbf{L}_n^2$ (соответственно $\Psi_n^* \in \mathbf{L}_n^2$). Соответствующее собственное значе-*

ние λ_n положительно, невырождено и превосходит модули всех остальных собственных значений оператора K_n (соответственно, K_n^*) в $\mathbf{L}_n^2$.

Доказательство следует из одной теоремы Крейна-Рутмана (см. [13], стр. 58, утверждение β' и стр. 83, замечание в сноске).

Пусть

$$Y_1(n)=\pi_{\overline{n_2, k_1-n_1-1}}(T^{k_1-n_1}X_-^{(n)}) \text{ и } Y_2(n)=\pi_{\overline{k_2+n_1, n_2}}(T^{k_2+n_1-1}X_+^{(n)}).$$

Всюду в дальнейшем мы будем, для краткости, использовать обозначения $t_{1,n}=k_1-n_1+r_n+1$ и $t_{2,n}=k_2+n_1-r_n-1$. Рассмотрим следующие функции:

$$G_n(\overline{x};\overline{y})=\int\limits_{T^{k_1-n_1}C_0^{(n)}} m(dz')\int\limits_{T^{k_2+n_1-1}C_0^{(n)}} m(dz'')\int\limits_{Y_1(n)} m(d\overline{u})\times$$

$$\times\int\limits_{Y_2(n)} m(d\overline{v})e^{-V_1(z')-V_1(z'')}\exp[-h_n(T^{t_{1,n}}\overline{x}_-|z')-h_n(T^{t_{2,n}}\overline{x}_+|z'')-$$

$$-h_n(\overline{u};z'\vee T_1^{t_{1,n}}\overline{x}_-)]\exp[-h_n(\overline{v};z''\vee T^{t_{2,n}}\overline{x}_+)-$$

$$-h_n(z'\vee T^{t_{1,n}}\overline{x}_-\vee\overline{u}|\overline{y}_{\overline{-\infty,n_2-1}}]\exp[-h_n(z''\vee T^{t_{2,n}}\overline{x}_+\vee\overline{v}|\overline{y}_{\overline{n_2+1,\infty}}],$$

$$\overline{x}\in S^{(n)}(J_n),\ \overline{y}\in Y(n)$$

и

$$F_n(\overline{x};A_n(I_0))=\int\limits_{A_n(I_0)} m(d\overline{z})\exp[-h(\overline{x}_-)-h(\overline{x}_+)-h(\overline{z})]\times$$

$$\times\exp[-h_n(T^{k_1}\overline{x}_-\vee T^{k_2}\overline{x}_+|\overline{z})],\ \overline{x}\in S^{(n)}(J_n),\ A\in\mathcal{Z}_{I_0}.$$

Очевидно, что при любых $A\in\mathcal{Z}_{I_0}$ и $\overline{y}\in Y(n)$ функции $G_n(\cdot;\overline{y})$ и $F_n(\cdot;A_n(I_0))\in\mathbf{L}_n^2$.

Предложение 4.2. *При любых $A\in\mathcal{Z}_{I_0}$, $\overline{y}\in Y(n)$ и $I\in\mathrm{B}(\mathrm{Z})$ такого, что $I\supseteq I_n$, справедливо следующее представление:*

$$Q_{I,I_0}^{(2)}(A;\overline{y})=\frac{\langle K_n^{s_n}F_n(\cdot;A_n(I_0)),\ G_n(\cdot;\overline{y})\rangle}{\langle K_n^{s_n}F_n(\cdot;X_{I_0,n}),\ G_n(\cdot;\overline{y})\rangle}. \tag{4.1}$$

Доказательство мы опускаем. Оно проводится при помощи непосредственной (хотя и несколько громоздкой) выкладки, основанной на определениях величин, входящих в выражение (4.1).

В дальнейшем предполагается, что векторы Ψ_n и Ψ_n^* нормированы так, что $\langle\Psi_n,\Psi_n^*\rangle=1$. Обозначим

$$\widetilde{K}_n=\lambda_n^{-1}K_n,\ \widetilde{G}_n(\overline{x};\overline{y})=\langle G_n(\cdot;\overline{y}),\ \Psi_n\rangle^{-1}G_n(\overline{x};\overline{y})$$

и если $m(A_n(I_0))>0$, то

$$\widetilde{F}_n(\overline{x};A_n(I_0))=\langle F_n(\cdot;A_n(I_0)),\Psi_n^*\rangle^{-1}F_n(\overline{x};A_n(I_0)).$$

Тогда выражение (4.1) перепишется в следующем виде:

$$Q^{(2)}_{I_0 I_n}(A; \bar{y}) = \begin{cases} \tilde{P}_n(A) \dfrac{1 + \langle \tilde{K}_n^{s_n} \tilde{F}_n(\cdot; A_n(I_0)) - \Psi_n, \tilde{G}_n(\cdot; \bar{y}) \rangle}{1 + \langle \tilde{K}_n^{s_n} \tilde{F}_n(\cdot; X_{I_0, n}) - \Psi_n, \tilde{G}_n(\cdot; \bar{y}) \rangle}, & \text{если} \\ \quad m(A_n(I_0)) > 0; \\ 0 - \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{4.2}$$

где

$$\tilde{P}_n(A) = \langle F_n; (X_{I_0, n}), \Psi_n^{*} \rangle^{-1} \langle F_n(\cdot; A_n(I_0)), \Psi_n^{*} \rangle, \ A \in \mathcal{X}_{I_0}. \tag{4.3}$$

Предложение 4.3. *Для любых* $\bar{x} \in S^{(n)}(J_n)$, $\bar{y} \in Y(n)$ и $I \in \mathbf{B}(Z)$ *такого, что* $I \supseteq I_n$, *справедлива оценка*

$$\tilde{G}_n(\bar{x}; \bar{y}) \leqslant \Psi_n^{*}(\bar{x}) \exp\left[2(c_1 + c_2)(r_n + 1) + 4m_0^{(n)} \sum_{k>1} \Phi(k) \sum_{j=1}^{k} m_j^{(n)}\right].$$

Доказательство. Используя условие $V_2 \geqslant 0$ и [d], можно показать, что

$$\frac{\tilde{G}_n(\bar{x}; \bar{y})}{\Psi_n^{*}(\bar{x})} \leqslant \frac{\exp\left[2(c_1 + c_2) + 4m_0^{(n)} \sum_{k>1} \Phi(k) \sum_{j=1}^{k} m_j^{(n)}\right]}{\Psi_n^{*}(\bar{x}) \int\limits_{S^{(n)}(J_n)} m(d\bar{z}) \Psi_n(\bar{z})}. \tag{4.4}$$

Представив знаменатель из правой части последнего неравенства в виде

$$\int\limits_{S^{(n)}(J_n)} m(d\bar{z}) \Psi_n(\bar{z}) \ \Psi_n^{*}(\bar{z}) [(\Psi_n^{*}(\bar{z}))^{-1} \Psi_n^{*}(\bar{x})],$$

оценим снизу отношение $(\Psi_n^{*}(\bar{z}))^{-1} \Psi_n^{*}(\bar{x})$. Справедлива оценка

$$(\Psi_n^{*}(\bar{z}))^{-1} \Psi_n^{*}(\bar{x}) > e^{-2(c_1 + c_2) r_n}. \tag{4.5}$$

В силу того, что $\langle \Psi_n, \Psi_n^{*} \rangle = 1$, знаменатель в правой части (4.4) оценивается снизу величиной $\exp[-2(c_1 + c_2) r_n]$. Предложение 4.3 доказано.

Согласно предложению 4.3, имеет место неравенство:

$$|\langle \tilde{K}_n^{s_n} \tilde{F}_n(\cdot; A_n(I_0)) - \Psi_n, \tilde{G}_n(\cdot; \bar{y}) \rangle| \leqslant \langle |\tilde{K}_n^{s_n} \tilde{F}_n(\cdot; A_n(I_0)) - \Psi_n|, \tag{4.6}$$

$$\Psi_n^{*} \rangle \exp\left[2(c_1 + c_2)(r_n + 1) + 4m_0^{(n)} \sum_{k>1} \Phi(k) \sum_{j=1}^{k} m_j^{(n)}\right].$$

Предложение 4.4. *Для любого* $A \in \mathcal{X}_{I_0}$ *такого, что* $m(A_n(I_0)) > 0$, *имеет место оценка*

$$\langle |\tilde{K}_n^{s_n} \tilde{F}_n(\cdot; A_n(I_0)) - \Psi_n|, \Psi_n^{*} \rangle \leqslant 2\left[1 - \frac{1}{2} e^{-5r_n(c_1 + c_2)}\right]^{s_n}.$$

Доказательство. Основу доказательства составляет следующее неравенство:

$$<|\widetilde{K}_n^{s_n}\widetilde{F}_n-\Psi_n|,\ \Psi_n^*>\leqslant\left(1-\frac{1}{2}\ e^{-5(c_1+c_2)r_n}\right)<|\widetilde{K}^{s_n-1}\ \bar{F}_n-\Psi_n|,\ \Psi_n^*>. \tag{4.7}$$

Оно устанавливается при помощи стандартных (хотя и довольно громоздких) рассуждений (см. [15], доказательство леммы 3.4).

Для доказательства предложения 4.4 достаточно применить s'' раз оценку (4.7) и учесть очевидное неравенство $<|\bar{F}_n-\Psi_n|,\ \Psi_n^*>\leqslant 2$.

Лемма 4.5. а) *Для любых* $A\in\chi_{I_0}$, $\bar{y}\in Y(n)$ *и* $I\in\mathbf{B}(\mathbf{Z})$ *такого, что* $I\supseteq I_n$

$$|Q_{I,I_0}^{(2)}(A;\ \bar{y})-\widetilde{P}_n(A)|<\varepsilon/6.$$

б) *Пусть* P*—гиббсовский процесс с потенциалом* U*. Тогда для любого* $A\in\chi^{I_0}$ *и* $I\in B(\mathbf{Z})$ *такого, что* $I\supseteq I_n$

$$|P_n^{(2)}(A)-\bar{P}_n(\pi_{I_0}A)|<\varepsilon/6.$$

Доказательство. Так как случай $m(A_n(I_0))=0$ тривиален, то мы предположим, что $m(A_n(I_0))>0$. Положим $d=c_1+c_2$. Тогда из предложения 4.4 и оценок (4.6) и (3.11) следует, что

$$|<\widetilde{K}_n^{s_n}\bar{F}_n(\cdot;\ A_n\ (I_0))-\Psi_n,\ \bar{G}_n(\cdot;\ \bar{y})>|\leqslant 2e^{-n_n^{(4)}(d)}<\varepsilon/34. \tag{4.8}$$

Из (4.2), (4.8) и в силу того, что $0<\varepsilon<1/2$, получаем

$$|Q_{I,I_0}^{(2)}(A;\bar{y})-P_n(A)|<5\varepsilon/34. \tag{4.9}$$

Утверждение б) следует из (4.8) и леммы 3.2. Лемма 4.5 доказана.

Замечание 3. Выбор $d=c_1+c_2$ продиктован оценкой (4.7).

Завершим теперь доказательство теоремы 1. Согласно утверждениям а) лемм 3.4, 3.5 и 4.5, для любых $\bar{y}\in Y(n)$, $A\in\chi_{I_0}$ и $I\in\mathbf{B}(\mathbf{Z})$ такого, что $I\supseteq I_n$, имеет место оценка $|Q_{I,I_0}(A;\ \bar{y})-\bar{P}_n(A)|<\varepsilon/2$. Перепишем последнее неравенство в виде

$$\bar{P}_n(A)-\varepsilon/2<Q_{I,I_0}(A;\ \bar{y})<\widetilde{P}_n(A)+\varepsilon/2. \tag{4.10}$$

На множестве $\mathbf{B}(\mathbf{Z})$ рассмотрим естественное отношение порядка, определяемое по теоретико-множественному включению. Множество $\mathbf{B}(\mathbf{Z})$ с таким отношением порядка является направленным. Через $\lim\limits_{I\uparrow\mathbf{Z}}$, $\overline{\lim\limits_{I\uparrow\mathbf{Z}}}$ и $\underline{\lim\limits_{I\uparrow\mathbf{Z}}}$ будем обозначать, соответственно, предел, верхний и нижний пределы по этому направленному множеству. Из (4.10) получаем, что при любых $A\in\chi_{I_0}$ и $\bar{y}\in Y(n)$

$$\overline{\lim_{I\uparrow\mathbf{Z}}}\,Q_{I,I_0}(A;\ \bar{y})-\underline{\lim_{I\uparrow\mathbf{Z}}}\,Q_{I,I_0}(A;\ \bar{y})<\varepsilon. \tag{4.11}$$

Обозначим $Y^* = \bigcap_{n\geq 1} Y(n)$. Нетрудно убедиться в том, что $Y^* \neq \varnothing$. Пусть $\bar{y} \in Y^*$. Тогда $\varepsilon > 0$ в (4.11) может быть взято произвольным, что означает существование $\lim_{I \uparrow Z} Q_{I,I_0}(A; \bar{y})$. Этот предел мы обозначим через $O_{I_0}(A; \bar{y})$. Для любых $A \in \chi_{I_0}$, $\bar{y} \in Y^*$ и $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n имеет место оценка $|O_{I_0}(A; \bar{y}) - \bar{P}_n(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, в силу утверждений б) лемм 3.4, 3.5 и 4.5, для любого $I \in \mathbf{B}(\mathbf{Z})$ такого, что $I \supseteq I_n$, имеем $|P(A) - \bar{P}_n(\pi_I, A)| < \varepsilon/2$, $A \in \chi^{I_0}$. Окончательно получаем $|P(A) - O_{I_0}(\pi_{I_0} A; \bar{y})| < \varepsilon$. В силу произвольности ε, отсюда следует единственность гиббсовского случайного процесса с потенциалом U. Теорема 1 доказана.

§ 5. „Условные“ гиббсовские процессы. Доказательство теорем 2 и 3

Введем множество $\hat{X} = X \setminus \bigcap_k \bigcup_{n>k} \bar{X}_+^{(n)} = \bigcup_k \bigcap_{n>k} X_+^{(n)} \in \chi$. Рассмотрим гиббсовский случайный процесс P с потенциалом U. Отметим, что $P(\hat{X}) = 1$.

Определение 4. Случайным процессом над $\mathbf{Z}_-$ назовем произвольную вероятностную меру на измеримом пространстве $(X, \chi^{\mathbf{Z}_-})$.

Как и ранее, для произвольной вероятностной меры P_- на $(X, \chi^{\mathbf{Z}_-})$ и любой борелевской σ-алгебры $\chi' \subset \chi^{\mathbf{Z}_-}$ существует условное распределение $\mathbf{P}_-(\cdot|\chi') = \{[P_-(\cdot|\chi')](\bar{y})\}$. Пусть $I \in \mathbf{B}(\mathbf{Z}_-)$ ($\mathbf{B}(\mathbf{Z}_-)$ — совокупность конечных подмножеств $\mathbf{Z}_-$). Сужение вероятностной меры $[P_-(\cdot|\chi^{\mathbf{Z}_- \setminus I})](\bar{y})$ на σ-алгебру χ^I индуцирует вероятностную меру на (X_I, χ_I). Эту индуцированную меру, по аналогии с предыдущим, обозначим через $P_{-,I}(\cdot; \bar{y})$.

Определение 5. Пусть $\bar{y} \in X$. Случайный процесс P_- над $\mathbf{Z}_-$ называется условным гиббсовским случайным процессом над $\mathbf{Z}_-$ с потенциалом U при условии $\bar{y}_{\mathbf{Z}_+}$, если при любом $I \in \mathbf{B}(\mathbf{Z}_-)$ для P_- — почти всех $\bar{z} \in X$

$$P_{-,I}(A; \bar{z}) = Q_I(A; \bar{z}_{\mathbf{Z}_-} \vee \bar{y}_{\mathbf{Z}_+}), \quad A \in \chi_I,$$

где величина $Q_I(A; \cdot)$ введена в (2.6).

Существенную роль в ходе доказательства теорем 2 и 3 играет следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть U удовлетворяет условиям [a]—[e]. Тогда для любого $\bar{y} \in X$ существует единственный условный гиббсовский случайный процесс $P_- = P_-(\cdot; \bar{y})$ над $\mathbf{Z}_-$ с потенциалом U при условии $\bar{y}_{\mathbf{Z}_+}$. Если P — гиббсовский случайный процесс с тем же потенциалом U, то для P — почти всех $\bar{y} \in X$*

$$P_-(\cdot;\ \bar y) = [P(\cdot|\mathcal{X}^{Z_+})](\bar y). \tag{5.1}$$

Доказательство теоремы 4 мы опускаем. Оно проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Перейдем к доказательству теорем 2 и 3. Из рассуждений §§ 3 и 4 следует

Предложение 5.1. *Пусть P — гиббсовский процесс с потенциалом U. Для каждого $\varepsilon>0$ существует $n \in Z_+$ такое, что для любых $k_1, k_2 \in Z$, $k_1 < k_2$, любого $I \in B(Z)$ такого, что $I \supseteq \overline{k_1 - n_1, k_2 + n_1}$ и любых $A \in \mathcal{X}^{\overline{k_1 k_2}}$ и $\bar y \in Y(n)$*

$$|Q_{I,\overline{k_1,k_2}}(\pi_{\overline{k_1 k_2}}A;\ \bar y) - P(A)| < \varepsilon/3.$$

В свою очередь, из предложения 5.1 выводится следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Пусть P (соответственно, $P_-(\cdot;\ \bar y)$, $\bar y \in \hat X$) — гиббсовский случайный процесс с потенциалом U (соответственно, условный гиббсовский случайный процесс над Z_- с потенциалом U при условии $\bar y_{Z+}$). Тогда для каждого $\varepsilon>0$ существует $n \in Z_+$ такое, что для любого $\bar y \in \hat X \cap X_+^{(n)}$*

$$\sup_{m>n_1} \mathrm{Var}\,[P_-^{\overline{-m,-n_1}}(\cdot;\ \bar y),\ P^{\overline{-m,-n_1}}] < \varepsilon. \tag{5.2}$$

Доказательство теоремы 2. Трансляционная инвариантность гиббсовского процесса легко вытекает из следующего равенства (см. § 4):

$$P(A) = O_{I_0}(\pi_{I_0}A;\ \bar y),\ A \in \mathcal{X}^{I_0},\ I_0 \in B(Z),\ \bar y \in Y^*.$$

В самом деле, положив $\bar y = (y_i,\ i \in Z)$ с $y_i = y_0$ при всех $i \in Z$, мы получаем из определения $O_{I_0}(\cdot;\ \bar y)$, что при любом $j \in Z$

$$O_{I_0}(\pi_{I_0}A;\ \bar y) = O_{I_0+j}(\pi_{I_0+j}(T^j A);\ \bar y),\ \text{т. е. } P(A) = P(T^j A),\ A \in \mathcal{X}^{(0)}.$$

Заметим теперь, что свойство усиленного перемешивания процесса P является следствием леммы 5.2, ввиду равенства (5.1) и того факта, что $P(\hat X \cap \mathcal{X}_+^{(n)}) = 1$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. В ходе доказательства мы будем использовать стандартные понятия и обозначения из эргодической теории (см., например, [11], [12], [14]). Пусть η_0—счетное разбиение пространства X с элементами $B_n^{(0)} = \{\bar y \in X:\ y_0 \in [n, n+1)\}$, $n \in Z$ и пусть $\{\eta_i,\ i \in Z_+\}$—возрастающая последовательность счетных разбиений, измеримых относительно σ-алгебры $\chi^{(0)}$ и таких, что $\eta_i > \eta_0$ и разбиение $\bigvee_{i>0} \bigvee_{j \in Z} T^j \eta_i$ есть разбиение на отдельные точки mod P. В силу теоремы 2 из [14], нам достаточно проверить, что каждое из разбиений η_i является слабо бернуллиевским (см. [11]). В свою очередь, для этого достаточно доказать следующее. Для любого $\varepsilon>0$ можно указать $n' \in Z_+$ такое, что при любом $N' \in Z_+$ для каждого из элементов $D_n^{\overline{1,N'+1}}$ разбиения $\bigvee_{j=1}^{N'+1} T^j \eta_i$ за исключением множества элементов суммарной P-меры, меньшей ε, выполнено неравенство

$$\mathrm{Var}\,[P^{\overline{-N-n',-n'}}(\cdot\,|D_k^{\overline{1,N'+1}}),\ P^{\overline{-N'-n,-n'}}]<\varepsilon, \qquad (5.3)$$

где $P^{\overline{-N'-n'-n'}}(\cdot\,D_k^{\overline{1,N'+1}})$ — сужение на σ-алгебру $\mathfrak{A}^{\overline{-N'-n',n'}}$ условного распределения $P(\cdot\,|D_k^{\overline{1,N'+1}})$, заданного формулой

$$P(A\,|\,D_k^{\overline{1,N'+1}})=[P(D_k^{\overline{1,N'+1}})]^{-1}P(A\cap D_k^{\overline{1,N'+1}}).$$

Неравенство (5.3) доказывается при помощи рассуждений, аналогичных тем, которые применялись при доказательстве теоремы 3 из [15]. Теорема 3 доказана.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса,
Московский институт проблем
передачи информации АН СССР

Поступила 5.VIII.1982

ՅՈՒ. Ռ. ԴԱՇՅԱՆ, ՅՈՒ. Մ. ՍՈՒԽՈՎ. Դիսկրետ ժամանակով պատահական պրոցեսների մի դասի գիբսյան նկարագրությունը (*ամփոփում*)

Ներկա հոդվածում ապացուցվում է տրված պոտենցիալին համապատասխանող, այսպես կոչված, գիբսյան պատահական պրոցեսի գոյության և միակության թեորեմ։ Մեր կողմից դիտարկվում է դիսկրետ ժամանակով և իրական արժեքներով պրոցեսի դեպքը։ Ի տարբերություն եղած նախկին արդյունքների, այստեղ ուսումնասիրվող պրոցեսի իրագործումների տարածությունը կոմպակտ չի։ Ցույց է տրված, որ պրոցեսը, որի մասին խոսվում է, բավարարում է թույլ կախվածության հատկության, որը մեր կողմից անվանվում է ուժեղացված խառնվածություն։ Վերջապես, ապացուցված է մեր պրոցեսի էրգոդիկ հատկությունները, այն է, բեռնուլլիությունը։

Yu. R. DASHIAN, Yu. M. SUHOV. *Gibbs description of a class of random processes with discrete time* (summary)

In this paper a theorem is proved on existence and uniqueness of the so colled Gibbs random processes corresponding to a given potential. We consider the case of processes with discrete time and real values. Unlike the previous results in this direction, the spece of realizations of the process is not assumed compact. It is shown, that the processes in question, satisfy some property of weak dependence. Lastly Bernoulli ergodic properties of the processes are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Л. Добрушин*. Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием, Функц. анализ и его прил., 2, № 4, 1968, 31—43.
2. *Р. Л. Добрушин*. Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов, Функц. анализ и его прил., 2, № 4, 1968, 44—57.
3. *Р. Л. Добрушин*. Гиббсовские случайные поля. Общий случай, Функц. анализ и его прил., 3, № 1, 1969, 27—35.
4. *O. L. Lanford, D. Ruelle*. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics, Commun. Math. Phys., 13, № 3, 1969, 194—215.
5. *D. Ruelle*. Superstable interactions in classical statistical mechanics, Commun. Math. Phys., 18, № 2, 1970, 127—159.
6. *Р. Л. Добрушин*. Условия отсутствия фазовых переходов в одномерных классических системах, Мат. сб., 93, № 1, 1974, 29—49.
7. *Ю. Р. Дашян, Ю. М. Сухов*. К вопросу о гиббсовском описании случайных процессов с дискретным временем, ДАН СССР, 243, № 3, 1978, 513—516.

8. *K. Matthes*, T. *Kerstan*, *T. Mecke*. Infinitely divisible point processes, Ch., N. Y., Br., Tor.: J. Wilay & Sons, 1978.

9. *И. И. Гихман*, *А. В. Скороход*. Теория случайных процессов, М., «Физматгиз». 1971.

10. *И. А. Ибрагимов*, *Ю. А. Розанов*. Гауссовские случайные процессы, М., «Наука», 1970.

11. *Д. Орнстейн*. Эргодическая теория, случайность и динамические системы, М., «Мир», 1978.

12. *И. Д. Корнфельд*, *Я. Г. Синай*, *С. В. Фомин*. Эргодическая теория, М., «Физматгиз». 1980.

13. *М. Г. Крейн*, *М. А. Рутман*. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН, 3, № 1, 1948, 3—95.

14. *D. Ornstein*. Two Bernoulli shifts with are isomorphic, Adv. Math., 5, 1971, 329—348.

15. *Yu. M. Suhov*. Random point processes and DLR equations, Commun. Math. Phys., 50, № 2, 1976, 113—132.