ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIX, № 4, 1984 Математика

УДК 517.98

Т. Н. АРУТЮНЯН, С. М. ИВАНЯН

ФИНИТНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛА И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ЙОСТА СИСТЕМЫ ДИРАКА $2n$-го ПОРЯДКА НА ОСИ И ПОЛУОСИ

Рассмотрим систему уравнений Дирака порядка $2n$

$$By' + \Omega(x)\, y = \lambda y \tag{1}$$

на оси или полуоси, где

$$B=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0\end{pmatrix},\ \Omega(x)=\begin{pmatrix} P(x) & Q(x)I \\ IQ(x) & -IP(x)I\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2n}\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0\end{pmatrix},$$

а $P(x)$ и $Q(x)$ n-мерные измеримые матрицы.

Работа посвящена изучению связи между финитностью (точнее „односторонней финитностью“) потенциала $\Omega(x)$ и аналитическими свойствами так называемых матриц-функций Йоста системы (1).

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E}_1(x, \lambda)=\begin{pmatrix} E_n \\ -iI\end{pmatrix} e^{i\lambda x} \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_2(x, \lambda)=\begin{pmatrix} E_n \\ iI\end{pmatrix} e^{-i\lambda x}$$

являются $2n\times n$-матричными решениями системы (1) при $\Omega(x)\equiv 0$, где через E_n мы обозначили n-мерную единичную матрицу.

Обратимся вначале к случаю всей оси. Через $F_j^{\pm}(x, \lambda)$, $j=1, 2$, обозначим $2n\times n$ матричные решения системы (1), которые обладают асимптотикой:

$$F_j^{+}(x, \lambda)\to \mathbf{E}_j(x, \lambda) \text{ при } x\to\infty,\ (-1)^j \operatorname{Im}\lambda\leqslant 0,$$

$$F_j^{-}(x, \lambda)\to \mathbf{E}_j(x, \lambda) \text{ при } x\to-\infty,\ (-1)^j \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0.$$

Такие решения, при условиях

$$\|P(x)\|\leqslant \frac{C}{1+|x|^{2+\varepsilon}},\ \|Q(x)\|\leqslant \frac{C}{1+|x|^{1+\varepsilon}},\ C>0,\ \varepsilon>0 \tag{2}$$

(где $\|\cdot\|$ — евклидова норма матрицы), существуют, единственны и допускают представления:

$$F_j^{+}(x, \lambda)=\mathbf{E}_j(x, \lambda)+\int_x^{\infty} K^{+}(x, t)\, \mathbf{E}_j(t, \lambda)\, dt, \text{ при } (-1)^j \operatorname{Im}\lambda\leqslant 0, \tag{3}$$

$$F_j^{-}(x, \lambda)=\mathbf{E}_j(x, \lambda)+\int_{-\infty}^{x} K^{-}(x, t)\, \mathbf{E}_j(t, \lambda)\, dt, \text{ при } (-1)^j \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0, \tag{4}$$

где $K^+(x, t)$ и $K^-(x, t)$ — $2n$-мерные непрерывные матрицы и, если обозначить

$$K^{\pm}=\begin{pmatrix} K_{11}^{\pm} & K_{12}^{\pm} \\ K_{21}^{\pm} & K_{22}^{\pm} \end{pmatrix},$$

то евклидовы нормы n-мерных матриц $K_{ij}^{\pm}$ удовлетворяют оценкам

$$\|K_{ii}^{\pm}(x, t)\| \leqslant \frac{c(\gamma)}{1+|x+t|^{1+\varepsilon}}, \quad \|K_{ij}^{\pm}(x, t)\| \leqslant \frac{c(\gamma)}{(1+|x|^{1+\varepsilon})(1+|x+t|^{1+\varepsilon})}, \tag{5}$$

при $-\infty<\gamma\leqslant x\leqslant t$ для K^+ и при $t\leqslant x\leqslant\gamma<\infty$ для K^-. Ядра $K^{\pm}(x, t)$ связаны с потенциалом $\Omega(x)$ следующим образом:

$$\Omega(x) = BK^+(x, x) - K^+(x, x)B = -(BK^-(x, x) - K^-(x, x)B). \tag{6}$$

Кроме того, существуют $2n$-мерные матрицы-функции $\Phi^{\pm}(t)$ такие, что $K^{\pm}(x, t)$ удовлетворяют интегральным уравнениям:

$$K^+(x, t)+\int_x^{\infty} K^+(x, u)\,\Phi^+(u+t)\,du + \Phi^+(x+t) = 0, \tag{7}$$

$$K^-(x, t)+\int_{-\infty}^{x} K^-(x, u)\,\Phi^-(u+t)\,du + \Phi^-(x+t) = 0^*. \tag{8}$$

Формулы (3), (5), (6), (7) для системы (1) на полуоси получены М. Г. Гасымовым в [1]. Для системы (1) на всей оси формулы (3)—(8) получаются совершенно аналогично методом работы [1]. По поводу этих формул для случая всей оси см. также [2], [3]. Матричные функции $F_j^+(0, \lambda)$, $j=1, 2$, обычно называют матрицами-функциями Йоста системы (1) на полуоси, а $F_j^{\pm}(0, \lambda)$ — на оси. В случае полуоси верна следующая

Теорема 1. *Пусть $\Omega(x)=0$ при $x>R_1>0$. Тогда элементы матриц-функций Йоста $F_j^+(0, \lambda)$, $j=1, 2$, есть целые функции экспоненциального типа $2R_1$. Наоборот, если элементы матриц-функций Йоста $F_j^+(0, \lambda)$ системы (1) на полуоси с потенциалом $\Omega(x)$, удовлетворяющим условиям (2), есть целые функции экспоненциального типа $2R_1$, то $\Omega(x)=0$ при $x>R_1$.*

Непосредственным следствием теоремы 1 и аналогичного предложения в случае отрицательной полуоси является следующее утверждение для случая всей оси:

Теорема 2. *Пусть $\Omega(x)=0$ при $x\overline{\in}[-R_2, R_1]$, $R_1, R_2>0$. Тогда элементы матриц-функций Йоста F_j^+ есть целые функции*

---

* Если обозначить $\Phi^{\pm}=\begin{pmatrix} \Phi_{11}^{\pm} & \Phi_{12}^{\pm} \\ \Phi_{21}^{\pm} & \Phi_{22}^{\pm} \end{pmatrix}$, то евклидовы нормы матриц $\Phi_{ij}^{\pm}$ удовлетворяют оценкам $\|\Phi_{ii}^{\pm}(t)\| < \dfrac{c(\gamma)}{(1+|t|)^{1+\varepsilon}}$, $\|\Phi_{ij}^{\pm}(t)\| < \dfrac{c(\gamma)}{(1+|t|)^{2+\varepsilon}}$ при $-\infty<\gamma<t$ для Φ^+ и $t<\gamma<\infty$ для Φ^-.

экспоненциального типа $2R_1$, *а* F_j^- — *типа* $2R_2$. *Наоборот, если элементы матриц-функций Йоста* F_j^+ *и* F_j^- *системы* (1) *на оси с потенциалом* $\Omega(x)$, *удовлетворяющим условиям* (2), *есть соответственно целые функции экспоненциального типа* $2R_1$ *и* $2R_2$, *то* $\Omega(x)=0$ *при* $x\overline{\in}[-R_2, R_1]$.

Финитность потенциала, как следствие условий, наложенных на функции Йоста системы (1) на оси (при $n=1$), исследовалась в работе [4]. „В другую сторону", т. е. аналитические свойства функций Йоста, вытекающие из финитности потенциала, для уравнения Шрёдингера на полуоси исследованы Т. Редже в [5] (см. также [6]).

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть $\Omega(x)=0$ при $x>R_1$. Тогда легко видеть, что при $x>R_1$, $F_1^+(x,\lambda)=\mathbf{E}_1(x,\lambda)$, $F_2^+(x,\lambda)=\mathbf{E}_2(x,\lambda)$. Из представлений (3) следует что

$$\int_x^\infty K^+(x,t)\begin{pmatrix} E_n \\ -iI\end{pmatrix} e^{i\lambda t}dt=\int_x^\infty K^+(x,t)\begin{pmatrix} E_n \\ iI\end{pmatrix} e^{-i\lambda t}dt=0$$

при всех $x>R_1$. Отсюда и из непрерывности матрицы $K^+(x,t)$ следует, что при всех $t\geqslant x>R_1$ имеют место равенства

$$K^+(x,t)\begin{pmatrix} E_n \\ -iI\end{pmatrix}=0,\ K^+(x,t)\begin{pmatrix} E_n \\ iI\end{pmatrix}=0,$$

т. е.

$$K^+(x,t)\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ -iI & iI\end{pmatrix}=0,$$

из которого, очевидно, следует, что

$$K^+(x,t)=0 \text{ при всех } t\geqslant x>R_1.$$

Полагая в уравнении (8) $t=x$, имеем

$$\Phi^+(2x)+K^+(x,x)+\int_x^\infty K^+(x,u)\,\Phi^+(u+x)\,du=0, \tag{9}$$

откуда следует, что $\Phi^+(t)=0$ при $t>2R_1$. Рассмотрим теперь уравнение (8) при $x=0$:

$$\Phi^+(t)+K^+(0,t)+\int_0^\infty K^+(0,u)\,\Phi^+(u+t)\,du=0. \tag{10}$$

Отсюда очевидным образом следует, что $K^+(0,t)=0$ при $t>2R_1$. При $x=0$ представление (3) принимает вид:

$$F_j^+(0,\lambda)-\mathbf{E}_j(0,\lambda)=\int_0^\infty K^+(0,t)\,\mathbf{E}_j(t,\lambda)\,dt=\int_0^{2R_1} K^+(0,t)\,\mathbf{E}_j(t,\lambda)\,dt.$$

Функции $F_j^+(0,\lambda)-\mathbf{E}_j(0,\lambda)$ можно рассматривать как преобразование Фурье финитной функции. Из теоремы Винера-Пели [7] следует, что элементы матриц-функций $F_j^+(0,\lambda)-\mathbf{E}_j(0,\lambda)$ есть целые функции экспоненциального типа-$2R_1$. Поскольку $\mathbf{E}_j(0, \lambda)$ являются постоянными матрицами, то прямое утверждение теоремы 1 доказано.

Перейдем к доказательству обратного утверждения. Из представления (3) при $x=0$ имеем

$$F_1^+(0, \lambda) - \mathbf{E}_1(0, \lambda) = \int_0^\infty K^+(0, t)\begin{pmatrix} E_n \\ -iI \end{pmatrix} e^{i\lambda t}\, dt.$$

Так как матрица $F_1^+(0, \lambda) - \begin{pmatrix} E_n \\ -iI \end{pmatrix}$ является преобразованием Фурье матрицы $K^+(0, t)\begin{pmatrix} E_n \\ -iI \end{pmatrix}$, элементы которой согласно оценкам (5) принадлежат и $L_1(-\infty, \infty)$ и $L_2(-\infty, \infty)$ (можно предполагать что на отрицательной полуоси $K^+(0, t) \equiv 0$), то и ее элементы на действительной оси принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$. Согласно теореме Винера—Пели $K^+(0, t)\begin{pmatrix} E_n \\ -iI \end{pmatrix} = 0$ почти всюду при $t > 2R_1$. Из (3) имеем также

$$F_2^+(0, \lambda) - \begin{pmatrix} E_n \\ iI \end{pmatrix} = \int_0^\infty K^+(0, t)\begin{pmatrix} E_n \\ iI \end{pmatrix} e^{-i\lambda t}\, dt.$$

Из аналогичных рассуждений следует, что $K^+(0, t)\begin{pmatrix} E_n \\ iI \end{pmatrix} = 0$ при $t > 2R_1$. Следовательно $K^+(0, t) = 0$ почти всюду при $t > 2R_1$. Из непрерывности $K^+(0, t)$ следует, что $K^+(0, t) = 0$ при всех $t > 2R_1$.

Сделав замену переменной $u + t = \xi$ в интеграле уравнения (10), запишем его в виде

$$K^+(0, t) + \int_t^\infty K^+(0, \xi - t)\, \Phi^+(\xi)\, d\xi + \Phi^+(t) = 0. \tag{11}$$

Покажем теперь, что существуют матрица $\Gamma(t) \in L_1(0, \infty)$ и число $\beta > 0$ такие, что решение уравнения (11) задается формулой

$$\Phi^+(t) = -K^+(0, t) - \int_t^\infty \Gamma(\xi - t)\, e^{\beta(\xi - t)} K^+(0, \xi)\, d\xi. \tag{12}$$

Если это будет доказано, то из (12) будет следовать, что $\Phi^+(t) = 0$ при $t > 2R_1$ и, в свою очередь, из уравнения (9) получим, что $K^+(x, x) = 0$ при $x > R_1$. Теперь из равенства (6) будет следовать, что $\Omega(x) = 0$ при $x > R_1$.

Таким образом, для окончания доказательства теоремы 1 нам достаточно доказать формулу (12). Подставляя в (11) вместо $\Phi^+(t)$ правую часть выражения (12), для левой части уравнения (11) получаем выражение

$$M(t) = -\int_t^\infty K^+(0, \xi - t)\, K^+(0, \xi)\, d\xi - \int_t^\infty \Gamma(\xi - t)\, e^{\beta(\xi - t)} K^+(0, \xi)\, d\xi -$$

$$-\int_{t}^{\infty} K^{+}(0,\xi-t)\int_{\xi}^{\infty}\Gamma(u-\xi)e^{\beta(u-\xi)}K^{+}(0,u)\,du\,d\xi. \tag{13}$$

Надо доказать, что $M(t)\equiv 0$ при определенном выборе Γ и β. Умножая обе стороны (13) на $e^{\beta t}$ и вводя обозначения

$$A(t)=\begin{cases}-K^{+}(0,t)e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases},\ \Gamma_1(t)=\begin{cases}\Gamma(t), & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$$R(t)=\begin{cases}K^{+}(0,t)e^{\beta t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases},\quad M_1(t)=\begin{cases}M(t)e^{\beta t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

перепишем (13) в виде

$$M_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\xi-t)R(\xi)\,d\xi-\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_1(\xi-t)R(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}A(\xi-t)\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_1(u-\xi)R(u)\,du\,d\xi.$$

Заметим, что из того, что $K^{+}(0,t)=0$ при $t>2R_1$, следует, что все слагаемые правой части последнего равенства принадлежат $L_1(-\infty,\infty)$. Поэтому, применяя к обеим частям преобразование Фурье в $L_1(-\infty,\infty)$, будем иметь (учитывая свойства преобразования Фурье свертки):

$$\widehat{M}_1(-\lambda)=\widehat{A}(\lambda)\widehat{R}(-\lambda)-\widehat{\Gamma}_1(\lambda)\widehat{R}(-\lambda)+\widehat{A}(\lambda)\widehat{\Gamma}_1(\lambda)\widehat{R}(-\lambda),$$

или

$$\widehat{M}_1(-\lambda)=-\{[E_{2n}-\widehat{A}(\lambda)][E_{2n}+\widehat{\Gamma}_1(\lambda)]-E_{2n}\}\widehat{R}(-\lambda), \tag{14}$$

где через $\widehat{F}$ обозначено преобразование Фурье функции F. Число β можно выбрать настолько большим, чтобы

$$\|\widehat{A}(\lambda)\|=\left\|\int_{-\infty}^{\infty}A(t)e^{-i\lambda t}dt\right\|=\left\|\int_{-\infty}^{\infty}K^{+}(0,t)e^{-\beta t}e^{-i\lambda t}dt\right\|<1,$$

т. е. чтобы матрица $E_{2n}-\widehat{A}(\lambda)$ была обратима. Тогда, согласно теореме Винера ([8], стр. 18), существует матрица $\Gamma_1(t)$ с элементами из $L_1(-\infty,\infty)$ такая, что

$$[E_{2n}-\widehat{A}(\lambda)]^{-1}=E_{2n}+\widehat{\Gamma}_1(\lambda),$$

причем, если $A(t)=0$ при $t<0$, то тем же свойством обладает и $\Gamma_1(t)$. Теперь уже ясно, что при таком выборе $\Gamma_1(t)$, а следовательно и $\Gamma(t)$, из (14) получаем $\widehat{M}_1(-\lambda)\equiv 0$, откуда, в свою очередь, следует $M_1(t)\equiv 0$. Таким образом, доказано, что формула (12) задает решение уравнения (11), т. е. теорема 1 полностью доказана.

Авторы выражают признательность И. Г. Хачатряну за полезные обсуждения.

Ереванский государственный университет,
Институт энергетики Армянской ССР

Поступила 22.IX.1982
и 14.XI.1983

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ս. Մ. ԻՎԱՆՅԱՆ. Առանցքի և կիսաառանցքի վրա որոշված 2*n* չափանի Դիրակի համակարգի պոտենցիալի ֆինիտությունը և Իոստի ֆունկցիաների անալիտիկ հատկությունները *(ամփոփում)*

Դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգի համար առանցքի դեպքում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 2. $\Omega(x) = 0,\ x > R_1 > 0\ (x < -R_2 < 0)$, *այն և միայն այն դեպքում, երբ* $F_j^+(0, \lambda), (F_j^-(0, \lambda)), j=1, 2,$ *Իոստի ֆունկցիաները էքսպոնենցիալ* $2R_1(2R_2)$ *տիպի ամբողջ ֆունկցիաներ են։*

Նույն արդյունքը (եթե հաշվի չառնենք փակագծերում գրվածը) ապացուցված է կիսաառանցքի դեպքում։

T. N. HARUTUNIAN, S. M. IVANIAN. *The finiteness of the potential and analytic properties of the lost functions of the 2n-order Dirac system on the axis and halfaxis* (summary)

For the system of differential equations (1) in case of the axis the following theorem is proved:

Theorem 2. $\Omega(x) = 0,\ x > R_1 > 0,\ (x < -R_2 < 0)$, if and only if the lost functions $F_j^+(0, \lambda)$ $(F_j^-(0, \lambda))$, $j = 1, 2$, are entire functions of exponential type $2R_1$ $(2R_2)$.

The same result (witnout brackets) is proved in the case of halfaxis.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Гасымов.* Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка 2*n*, Труды ММО, т. 19, 1968.
2. *И. С. Фролов.* Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси, ДАН СССР, 207, № 1, 1972, 44—47.
3. *С. Г. Велиев, Ф. Г. Максудов.* Обратная задача теории рассеяния для несамосопряженного оператора Дирака на всей оси, Спектральная теория операторов, изд-во «Элм», Баку, 1977.
4. *М. А. Асланов, А. Н. Соловьёв.* Условия финитности потенциала в обратной задаче теории рассеяния для несамосопряженного оператора Дирака на всей оси, Рукопись депонирована в ВИНИТИ, № 111-80ДЕП, 1981.
5. *T. Regge.* Analytic properties of the scattering matrix, Nuovo Cimento, 8, № 5, 1958, 671—679.
6. *В. де Альфаро, Т. Редже.* Потенциальное рассеяние, «Мир», 1966.
7. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», 1966.
8. *М. Г. Крейн, И. Ц. Гохберг.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, вып. 2 (80), 1958.