ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIX, № 4, 1984 Математика

УДК 517.2

Л. ХЕЙНРИХ И Д. ШТОЙЯН

ОБОБЩЕНИЯ ФОРМУЛ ПАЛЬМА—ХИНЧИНА

1. Введение

Формулы Пальма—Хинчина принадлежат к самым старым и хорошо известным формулам теории случайных точечных процессов. Если ф—простой стационарный точечный процесс интенсивности $\lambda\ (0<\lambda<\infty)$ с распределением P и с распределением Пальма P_0, то для вероятности $P_k(t)$ того, что Ф имеет ровно k точек в интервале $(0, t]$, верно соотношение

$$P_k(t)=\lambda\int_0^t[\pi_{k-1}(x)-\pi_k(x)]\,dx,\ k=1,2,\cdots,\ t>0, \tag{1}$$

где

$$\pi_i(x)=P_0(\{\varphi:\varphi((0,x])=i\}),\ i=0,1,\cdots,\ \text{см. [5].}$$

В дифференциальной форме формула (1) имеет вид

$$\frac{d}{dt}P_k(t)=\lambda[\pi_{k-1}(t)-\pi_k(t)]. \tag{2}$$

При этом должны заметить, что функции Пальма—Хинчина $\pi_i(t)$, $i=0, 1,\cdots$, вообще говоря, лишь непрерывны справа и, следовательно, величины $\frac{d}{dt}P_k(t)$ интегрируются как правосторонние производные [6].

Обобщения этих формул для точечных процессов в R^2 доказал Амбарцумян [1], см. также [3], [4]. В октябре 1982 года Р. В. Амбарцумян обратил наше внимание на то, что имеет место обобщение (2), то есть нижестоящая формула (20), в которую входят величины, связанные с 2-х точечным распределением Пальма. Целью этой работы является доказательство одной обобщенной формулы Пальма—Хинчина, которая содержит n-точечные распределение Пальма. Далее мы рассматриваем также точечные процессы в R^d, $d>2$.

2. Обобщенные формулы Пальма—Хинчина

Пусть P—распределение простого точечного процесса в R^d с мерой интенсивности Λ_P

$$\Lambda_P(B)=\int_M\varphi(B)\,P(d\varphi),\ B\in\mathbf{R}^d,$$

$\mathfrak{R}^d$ — борелевская σ-алгебра в R^d. Далее пусть $P^!_x$ — редуцированное пальмовское распределение в точке x, ср. [7]. Распределение $P^!_x$ связано с обычным распределением Пальма в точке x следующим образом:

$$P_x(Y) = P^!_x(\{\varphi : \varphi + \delta_x \in Y\}), \quad Y \in \mathfrak{M}.$$

При этом обозначим как в [2] через M множество всех точечных последовательностей в R^d и $\mathfrak{M}$ соответствующая σ-алгебра, P есть распределение на $[M, \mathfrak{M}]$. Через φ и ψ обозначаются элементы из M. Для любой неотрицательной измеримой функции $h: R^d \times M \to R^1$ верна формула Мекке, см. [2], [7], [8]:

$$\int_M \sum_{x \in \varphi} h(x, \varphi - \delta_x) \, P(d\varphi) = \int_{R^d} \int_M h(x, \varphi) \, P^!_x(d\varphi) \, \Lambda_P(dx). \tag{3}$$

Эта формула делает возможным доказательство различных вариантов формулы Пальма--Хинчина.

Через $b(x, \rho)$ обозначим открытый d-мерный шар с центром в точке x и радиуса ρ. Хотелось бы, чтобы распределение P удовлетворяло условию

$$P(\{\varphi : \varphi(x : x \in R^d, \|x\| = r\}) > 1 \text{ для } r > 0) = 0 \tag{4}$$

($\|x\|$ — евклидово расстояние от x до начала O). Тогда для P-почти всех реализаций φ из Φ верно соотношение

$$I_{\{\psi : \psi(b(O, \rho)) \geq k\}}(\varphi) = \sum_{x \in \varphi} I_{b(O, \rho)}(x) \, I_{\{\psi : \psi(b(O, \|x\|)) = k-1\}}(\varphi), \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{5}$$

причем I_X обозначает индикатор множества X. Если положить величину под знаком суммы в (5) равной $h(x, \varphi - \delta_x)$, то из формулы (3) вытекает следующее

Предложение 1. *При предположении* (4) *для любого* $\rho > 0$ *справедливо*

$$P(\{\varphi : \varphi(b(O, \rho)) \geq k) = \int_{b(O, \rho)} P^!_x(\{\varphi : \varphi(b(O, \|x\|)) =$$
$$= k - 1) \, \Lambda_p(dx), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

Заметим, что стационарность точечного процесса влечет выполнение условия (4).

Следствие 1. *Если точечный процесс интенсивности* λ $(0 < \lambda < \infty)$ *стационарен, то верно*

$$P(\{\varphi : \varphi(b(O, \rho)) \geq k\}) = \int_{b(O, \rho)} P^!_0(\{\varphi : \varphi(b(x, \|x\|)) = k -$$
$$- 1\}) \, dx, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{6}$$

Следствие 2. *В случае стационарного и изотропного точечного процесса для каждого* $k = 1, 2, \cdots$ *верно соотношение*

$$P(\{\varphi:\varphi(b(O,\rho))\geqslant k\})=\frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\lambda\int\limits_0^{\rho}P_0^!\,\{\{\varphi:\varphi(b((r,0,\cdots,0),r)=k-1\}\,r^{d-1}\,dr \tag{7}$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{d}{d\rho}P(\{\varphi:\varphi(b(O,\rho))\geqslant k\})=\frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\lambda\rho^{d-1}P_0^!\,\{\varphi:\varphi(b((\rho,0,\cdots,0),\rho)=k-1\}. \tag{7'}$$

Замечание. Существование (односторонней) производной в (7′) было показано Р. В. Амбарцумяном в [1] для $d=2$. В этом случае Амбарцумян доказал формулу прямым путем. Переход от (7) к (7′) является не тривиальным. При помощи метода в [1] можно доказать (7′) также для $d>2$. В дальнейшем докажем только (7).

Доказательство. Можно показать, что стационарность и изотропность точечного процесса обеспечивает выполнимость (4). Переходя к полярным координатом в (6), получаем

$$P(\{\varphi:\varphi(b(O,\rho))\geqslant k\})=\lambda\int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\cdots\int\limits_0^{\pi}P_0^!\,(\{\varphi:\varphi(b((r,\theta_1,\theta,\cdots,\theta_{d-1}),r))=k-1\})\,r^{d-1}\sin\theta_2\cdots(\sin\theta_{d-1})^{d-2}\,d\theta_{d-1}\cdots d\theta_2\,d\theta_1\,dr.$$

Из изотропности следует для $r>0$, $0\leqslant\theta_1<2\pi$, $0\leqslant\theta_i<\pi$, $i=2,\cdots,d-1$

$$P_0^!(\{\varphi:\varphi(b((r,\theta_1,\cdots,\theta_{d-1}),r)=k-1\})=P_0^!(\{\varphi:\varphi(b((r,0,\cdots,0),r)=k-1\}).$$

Интегрирование по $\theta_1,\cdots,\theta_{d-1}$ приводит к (7).

Пусть для $B\in\mathbf{R}^1$ и $x\in R^1$ в дальнейшем $B^x=B\cap(x,\infty)$ и ${}^xB=B\cap(-\infty,x)$. Для $B\in\mathbf{R}^d$, $x\in R^d$ и $\alpha\in$ единичной сфере R^d пусть

$$B_\alpha^x=B\cap S_\alpha^x,\quad {}^xB_\alpha=(B\setminus B_\alpha^x)\setminus H_\alpha^x,$$

причем S_α^x — открытое подпространство R^d, которое не содержит начала координат O и граничит через гиперплоскость H_α^x, которая содержит x и перпендикулярна к прямой, проходящей через O и α. Так как в дальнейшем α фиксировано, то индекс „α“ опускается. Хотелось бы, чтобы распределение P удовлетворяло условию

$$P(\{\varphi:\varphi(H^x)>1\ \text{для всех}\ x\in R^d\})=0. \tag{8}$$

Совершенно аналогично предложению 1 доказывается следующее

Предложение 2. *При условии* (8) *для любого* $B\in\mathbf{R}^d$ *верно*

$$P(\{\varphi:\varphi(B)\geqslant k\})=\int\limits_B P_x^!(\{\varphi:\varphi(B^x)=k-1\})\,\Lambda_P(dx) \tag{9}$$

и

$$P(\{\varphi:\ \varphi(B)\geqq k\})=\int\limits_B P_x^!(\{\varphi:\ \varphi({}^xB)=k-1\})\ \Lambda_P(dx),\ k=1,2,\cdots. \quad (10)$$

Следствие 3. *Если точечный процесс стационарен и выполнено* (8), *то*

$$P(\{\varphi:\ \varphi(B)\geqq k\})=\lambda\int\limits_B P_0^!(\{\varphi:\ \varphi({}^xB-x)=k-1\})\ dx \quad (11)$$

и

$$P(\{\varphi:\ \varphi(B)\geqq k\})=\lambda\int\limits_B P_0^!(\{\varphi:\ \varphi({}^xB-x)=k-1\})\ dx,\ k=1,2,\cdots. \quad (12)$$

В частном случае $d=1$ и $B=(0, t]$ имеют место соотношения

$$P(\{\varphi:\varphi((0, t])\geqq k\})=\lambda\int\limits_0^t P_0^!(\{\varphi:\ \varphi(0, x])=k-1\})\ dx \quad (13)$$

и

$$P(\{\varphi:\ \varphi((0,t])\geqslant k\})=\lambda\int\limits_0^t P_0^!(\{\varphi:\ \varphi((-x, 0))=k-1\})\ dx,\ k=1,2,\cdots. \quad (14)$$

В силу того, что

$$P_0(\{\varphi:\ \varphi((0, x])=i\})=P_0^!(\{\varphi:\ \varphi((0, x])=i)\ \ i=0, 1, 2,\cdots,$$

из (13) следует соотношение (1).

3. Формулы Пальма—Хинчина с n-точечным распределением Пальма

Мы рассмотрим обобщения формул Пальма—Хинчина, в которые входят n-точечные распределения Пальма. Они получаются заменой распределения P распределением Пальма.

Следствие 4. *Пусть* $d=1$, *точечный процесс стационарен и 2-го порядка (т. е. моментная мера 2-го порядка радонова) с плотностью 2-го порядка* $\rho^{(2)}$. *Тогда*

$$P_k(t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^x \Delta^2\pi^{(2)}(y, x)\ \rho^{(2)}(y)\ dydx,\ k=2, 3,\cdots, \quad (15)$$

$$P_1(t)=\lambda t+\int\limits_0^t\int\limits_0^x \Delta^2\pi_1^{(2)}(y, x)\ \rho^{(2)}(y)\ dydx,$$

и

$$P_0(t)=1-\lambda t+\int\limits_0^t\int\limits_0^x \Delta^2\pi_0^{(2)}(y, x)\ \rho^{(2)}(y)\ dydx,$$

где

$$\Delta^2 \pi_k^{(2)} = (\pi_{k-2}^{(2)} - \pi_{k-1}^{(2)}) - (\pi_{k-1}^{(2)} - \pi_k^{(2)}), \quad \pi_{-2}^{(2)} = \pi_{-1}^{(2)} = 0$$

и

$$\pi_i^{(2)}(y, x) = P_{0y}^!(\{\varphi: \varphi((y, x]) = i\}), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, \; x > y.$$

Доказательство. Мы докажем формулу (15). Из формулы (9) для специального распределения $P_0^!$ следует равенство:

$$P_0^!(\{\varphi: \varphi(0, t]) > k\}) = \int_0^t (P_0^!)_x^! (\{\varphi: \varphi((x, t]) = k-1\}) \, \Lambda_{P_0^!}(dx). \tag{16}$$

Мера интенсивности $\Lambda_{P_0^!}$ для $P_0^!$ выражается через $\rho^{(2)}$ следующим образом:

$$\Lambda_{P_0^!}(B) = \int_B \rho^{(2)}(x) \, dx/\lambda.$$

Согласно [7] верно $(P_0^!)_x^! = P_{0x}^!$, причем $P_{0x}^!$ обозначает редуцированное 2-х точечное распределение Пальма для Φ. Так же как (1) вытекает из (11), из (16) вытекает соотношение

$$\pi_k(t) = \int_0^t [\pi_{k-1}^{(2)}(x, t) - \pi_k^{(2)}(x, t)] \, \rho^{(2)}(x) \, dx/\lambda. \tag{17}$$

Подставив (17) в (1), получим (15):

$$P_k(t) = \int_0^t \int_0^x [\pi_{k-2}^{(2)}(y, x) - 2\pi_{k-1}^{(2)}(y, x) + \pi_k^{(2)}(y, x)] \, \rho^{(2)}(y) \, dy dx.$$

Следствие 5. *При условиях следствия 4 верно*

$$P_k(t) = \int_0^t \int_0^x \Delta^2 \tilde{\pi}_k^{(2)}(0, y) \, \rho^{(2)}(y) \, dy dx, \quad k = 2, 3, \cdots, \tag{18}$$

где

$$\tilde{\pi}_i^{(2)}(0, t) = P_{0t}^!(\{\varphi: \varphi(0, t)) = i\}), \quad i = 0, 1, 2, \cdots.$$

Доказательство. Из формулы (1) следует

$$P_k(t) = \lambda \int_0^t \Delta^2 q_{k+1}(x) \, dx, \tag{19}$$

где

$$q_k(x) = P_0^!(\{\varphi: \varphi((0, x]) \geq k\}), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

Имеет место также следующая формула (ср. с (5)):

$$I_{\{\psi: \psi(0, x]) \geq k\}}(\varphi) = \sum_{y \in \varphi} I_{(0, x]}(y) \, I_{\{\psi: \psi(0, y)) = k-1\}}(\varphi).$$

Отсюда следует соотношение (ср. вывод (3))

$$q_k(x)=\int\limits_0^x (P_0^!)_y^! (\{\varphi: \varphi((0,y))=k-1\})\, \Lambda_{P_0^!}(dy)=$$

$$=\int\limits_0^x \bar{\pi}_{k-1}^{(2)}(0,y)\,\rho^{(2)}(y)\,dy/\lambda.$$

Отсюда и из (19) следует (18).

Следствие 6. *Если выполнены условия следствия* 4, $\pi_l(x, t)$ *непрерывно дифференцируемы по* t *и* $\rho^{(2)}(x)$ *непрерывна, тогда верны соотношения*

$$P_k^{\cdot}(t)=\Delta^2\bar{\pi}_k^{(2)}(0,t)\,\rho^{(2)}(t),\quad k=2,3,\cdots, \tag{20}$$

$$P_k^{\cdot\cdot}(t)=\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}\,\Delta^2\pi_k^{(2)}(x,t)\,\rho^{(2)}(x)\,dx,\quad k=3,4,\cdots \tag{21}$$

и

$$P_2^{\cdot}(t)=\rho^{(2)}(t)+\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}\,\Delta^2\pi_2^{(2)}(x,t)\,\rho^{(2)}(x)\,dx. \tag{22}$$

Доказательство. Из (15) для $\tau>0$ имеем

$$\frac{P_k^{\cdot}(t+\tau)-P_k^{\cdot}(t)}{\tau}=\frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau}\Delta^2\pi_k^{(2)}(x,t+\tau)\,\rho^{(2)}(x)\,dx+$$

$$+\int\limits_0^t \frac{1}{\tau}\left(\Delta^2\pi_k^{(2)}(x,t+\tau)-\Delta^2\pi_k^{(2)}(x,t)\right)\rho^{(2)}(x)\,dx.$$

Очевидно верны предельные соотношения

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\pi_k^{(2)}(x,t+\tau)=0,\quad k=1,2,\cdots$$

и

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\pi_0^{(2)}(x,t+\tau)=1,\ \text{для}\ x\in(t,t+\tau).$$

Итак, предельным переходом ($\tau\to 0$) получаем, что правые части (20) и (21) равны соответственно (22). Следствие доказано.

Пусть теперь Ф—стационарный процесс восстановления, функция распределения расстояния F которого имеет непрерывную плотность f. В этом случае $\Lambda_{P_0^!}$ выражается через функцию восстановления

$$h(x)=\frac{d}{dx}E_{P_0^!}\Phi((0,x])=\sum_{k=1}^{\infty}f^{(k)*}(x).$$

Следствие 7. Имеет место следующая формула:

$$\bar{\pi}_k^{(2)}(0,t)=\frac{f(k+1)^*(t)}{h(t)},\quad k=0,1,2,\cdots. \tag{23}$$

Доказательство. Из (18) следует

$$\bar{\pi}_k^{(2)}(0,t)=\frac{1}{\rho^{(2)}(t)}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\pi_k^{(2)}(x,t)\,\rho^{(2)}(x)\,dx,\ k=1,2,\cdots, \tag{24}$$

и

$$\bar{\pi}_0^{(2)}(0,t)=1+\frac{1}{\rho^{(2)}(t)}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\pi_0^{(2)}(y,t)\,\rho^{(2)}(y)\,dy. \tag{25}$$

На основе свойств процессов восстановления имеем

$$\pi_k^{(2)}(x,t)=P_x(\{\varphi:\varphi)(x,t])=k\})=P_0(\{\varphi:\varphi((0,t-x])=k\})=$$

$$=\pi_k(t-x)=F^{(k)*}(t-x)-F^{(k+1)*}(t-x)$$

и

$$h(x)=f(x)+\cdots+f^{(k)*}(x)+(f^{(k)*}*h)(x),\ k=1,2,\cdots,$$

и

$$\rho^{(2)}(x)=\lambda h(x).$$

Вместе с (24) и (25) это непосредственно дает формулу (23).

В заключение упомянем еще об одном обобщении. Пусть Φ — стационарный простой точечный процесс в R^1 с плотностью n-го порядка $\rho^{(n)}(x_1,\cdots,x_{n-1})$. Тогда для $k=n,n+1,\cdots$ верно

$$P_k(t)=\int_0^t\int_0^{x_n}\int_{x_1}^{x_n}\cdots\int_{x_{n-2}}^{x_n}(\Delta^n\pi_k^{(n)})(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)\times$$

$$\times\rho^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\,dx_{n-1}\cdots dx_2\,dx_1 dx_n,$$

где

$$\pi_k^{(n)}(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)=P^!_{0,x_1,\cdots,x_{n-1}}(\{\varphi:\varphi((x_{n-1},x_n])=k\}).$$

Эти формулы выводятся последовательным применением формулы (3) и правил обращения с n-точечным распределением Пальма.

Факультет математики,
Горная Академия Фрайберг
ГДР

Поступила 26.IV.1983

Լ. ՀԵՅՆՐԻԽ, Դ. ՇՏՈՅԱՆ. Պալմ-Խինչինի բանաձևերի ընդհանրացումներ (*ամփոփում*)

Աշխատանքում բերված է R^d-ում կետային պրոցեսների համար Պալմ-Խինչինի բանաձևի որոշ ընդհանրացումներ: Այնուհետև կետային պրոցեսների համար R-ում ապացուցված են ընդհանրացված Պալմ-Խինչինի բանաձևերը, որոնց մեջ մտնում են Պալմի երկու և n-կետանոց բաշխումները: Որպես մասնավոր դեպք քննարկվում են վերականգնման պրոցեսները:

L. HEINRICH, D. STOYAN. *On generalized Palm—Kchinchin formulae* (summary)

In this paper some generalizations of the Palm—Kchinchin for mulae for point processes in R^d are derived; For point processes in R^1 some generalizations of Palm—Kchinchin formulae are proved, where two-and n-point distributions enter. As a special case the renewal processes are discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. В. Амбарцумян.* Однородные и изотропные случайные точечные поля на плоскости, Math. Nachr. 70, 1976, 365—385.
2. *Й. Керстан, К. Маттес и Й. Мекке.* Безгранично делимые точечные процессы, «Наука», М., 1982.
3. *В. К. Оганян.* Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных полей отрезков. В сб.: «Комбинаторные принципы в стохастической геометрии» (под ред. Р. В. Амбарцумяна), Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1980, 81—106.
4. *Г. С. Сукиасян.* О процессах хорд на прямых, пересекающих случайные поля кругов на плоскости, ДАН Арм.ССР, 70, 1980, 297—300.
5. *А. Я. Хинчин.* Математические методы теории массового обслуживания, Труды ин-та им. Стеклова, т. 49, Изд. АН СССР, 1955.
6. *D. J. Daley and R. K. Milne.* Orderliness, intensities and Palm—Khinchin equations for multivariate point processes, J. Appl. Prob., 12, 1975, 383—389.
7. *K.—H. Hanisch.* Inversion formulae for n-fold Palm distributions of point processes in LCS—spaces, Math. Nachr., 10, 1982, 171—179.
8. *J. Mecke.* Stationäre zufällige Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen Z Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 9, 1967, 36—58.