ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 4, 1984 Математика

УДК 517.984.52

И. Г. ХАЧАТРЯН

О ФОРМУЛАХ ОБРАЩЕНИЯ, СВЯЗАННЫХ С САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение

Пусть l — дифференциальная операция, заданная на интервале (a, b) $(-\infty < a < b \leqslant \infty)$ по формуле

$$l[y] \equiv p_0 y - \frac{d}{dx}\left[p_1 \frac{dy}{dx} - \cdots - \frac{d}{dx}\left[p_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{d}{dx}\left[p_n \frac{d^n y}{dx^n}\right]\right]\cdots\right], \tag{1}$$

где коэффициенты $p_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, n)$ вещественнозначны и измеримы на интервале (a, b), кроме того, функции

$$p_0(x), p_1(x) \cdots, p_{n-1}(x), \frac{1}{p_n(x)} \tag{2}$$

суммируемы на каждом конечном отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Пусть далее L — некоторый самосопряженный дифференциальный оператор в $L^2(a, b)$, порожденный операцией l.

Хорошо известно (см. [1]—[4]), что разложение по собственным функциям оператора L всегда можно осуществить при помощи фундаментальной системы решений $u_k(x, \lambda)$ $(k=1, 2, \cdots, 2n)$ уравнения

$$l[y] = \lambda y \tag{3}$$

и некоторой матричной функции распределения $\sigma_{2n}(\lambda)$ порядка $2n$. При этом решения $u_k(x, \lambda)$ называются обобщенными собственными функциями оператора L, матрица $\sigma_{2n}(\lambda)$ называется спектральной матрицей оператора L, а соответствующие формулы разложения называются формулами обращения, связанными с оператором L.

При тех или иных предположениях относительно функций (2) получение разложения при помощи минимальной системы обобщенных собственных функций оператора L является важной задачей спектральной теории дифференциальных операторов (см. [1], стр. 9, 10, 270).

Известно (см. [1]), что если конец a интервала (a, b) регулярен (т. е. функции (2) суммируемы на каждом конечном интервале $(a, \alpha] \subset \subset (a, b)$) и оператор L порождается распадающимися краевыми условиями, то соответствующие формулы обращения можно построить при помощи n решений уравнения (3). При дополнительных ограничениях на функции (2) в [5] и [6] (см. также [1], стр. 357—385) методом Б. М. Левитана получены разложения при помощи минимальной системы обобщенных собственных функций оператора L.

В настоящей работе предполагается, что функции (2) для всех $\alpha \in (a, b)$ удовлетворяют одному из следующих трех условий:

Условие 1.

$$\int_a^\alpha \frac{dx}{|p_n(x)|} < \infty,$$

$$\int_a^\alpha |p_{n-1-k}(x)|(x-a)^{2k} \int_a^x \frac{dt\,dx}{|p_n(t)|} < \infty, \quad k=0, 1, \cdots, n-1.$$

Условие 2. При $n \geqslant 2$ для некоторого целого числа $\varkappa$ $(1 \leqslant \varkappa \leqslant < n-1)$

$$\int_a^\alpha \frac{(x-a)^\varkappa}{|p_n(x)|} dx < \infty,$$

$$\int_a^\alpha (x-a)^{2k-\varkappa} h_\varkappa(x) |p_{n-1-k}(x)| dx < \infty, \quad k=0, 1, \cdots, n-1,$$

где

$$h_\varkappa(x) = \int_a^x \frac{(t-a)^\varkappa}{|p_n(t)|} dt + (x-a) \int_x^\alpha \frac{(t-a)^{\varkappa-1}}{|p_n(t)|} dt.$$

Условие 3.

$$\int_a^\alpha \left[\int_x^\alpha \frac{(t-x)^{n-1}}{|p_n(t)|} dt \right]^2 dx < \infty,$$

$$\int_a^\alpha (x-a)^{2k-n} h_n(x) |p_{n-1-k}(x)| dx < \infty, \quad k=0, 1, \cdots, n-1.$$

При каждом из условий 1, 2, 3 для оператора L, порожденного распадающимися краевыми условиями, получены формулы обращения при помощи n решений уравнения (3). Такие формулы обращения можно получить двумя способами. Первый из них—это непосредственное применение метода направляющих функционалов М. Г. Крейна (см. [1]), а второй способ заключается в следующем. Известно (см. [1], [3]), что упомянутая выше матрица $\sigma_{2n}(\lambda)$ выражается через ядро резольвенты оператора L. Если это ядро выразить через решения уравнения (3), то в результате матрица $\sigma_{2n}(\lambda)$ также выразится через решения уравнения (3). Такая формула позволяет заметить, что при подходящем выборе упомянутых выше решений $u_k(x, \lambda)$ в соответствующей матрице $\sigma_{2n}(\lambda)$ все элементы вне первого главного минора $\sigma_n(\lambda)$ n-го порядка равны нулю. Поэтому отмеченные выше общие формулы обращения принимают вид, в котором участвуют только n решений уравнения (3), а именно те решения, которые удовлетворяют в точке $x=a$ краевым условиям, соответствующим оператору L. При применении указанных методов возникающие затруднения носят лишь технический характер и связаны с исследованием поведения решений уравнения (3) при $x \to a$. Однако такое исследование проведено автором в работе [7]. Это позволяет теорему о разложении по собственным функциям и примыкающие к ней предложения сформулировать без доказательств.

Затем, используя формулу, в которой матрица $\sigma_n(\lambda)$ выражается через решения уравнения (3), указывается общая схема дальнейшего понижения порядка спектральной матрицы. Конкретное осуществление этой схемы уже требует дополнительного исследования поведения решений уравнения (3) при $x \to b$.

§ 1. Вспомогательные предложения

Всюду в дальнейшем предполагается, что функции (2) удовлетворяют одному из условий 1, 2, 3, и это не будет каждый раз оговариваться.

В настоящем параграфе формулируется ряд предложений, которые доказываются методами, примененными в монографии [1] при доказательстве аналогичных предложений в случае регулярного конца a интервала (a, b). Только в данном случае нужно использовать результаты работы [7], в которой при указанных условиях на функции (2) исследованы поведения при $x \to a$ квазипроизводных $y^{[k]}(x)$ $(k=0, 1, \cdots, 2n-1)$ решения $y(x)$ уравнения $l[y]-\lambda y=f$, где $f \in L^2(a, b)$, и в частности, доказана суммируемость с квадратом любого решения этого уравнения на каждом конечном интервале $(a, \alpha] \subset (a, b)$.

Обозначим

$$[y, z]_x = [y(x), z(x)] = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \{y^{[k]}(x) \overline{z}^{[2n-1-k]}(x) - y^{[2n-1-k]}(x) \overline{z}^{[k]}(x)\}. \quad (4)$$

Для функций y и z, зависящих от параметра λ, будем использовать также обозначение $[y, z]_{x, \lambda}$.

Обозначим через L_0 минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный дифференциальным выражением (1) в пространстве $L^2(a, b)$. Пусть D_0—область определения оператора L_0, а D_0^*— область определения сопряженного к L_0 оператора L_0^*.

Предложение 1. *Для любого решения $z(x)$ уравнения $l[z] = \lambda z$ и для любых чисел $\alpha, \beta \in (a, b)$ $(\alpha < \beta)$ существует функция $y \in D_0^*$ такая, что $y(x) = z(x)$, при $x \in (a, \alpha)$ и $y(x) = 0$, при $x \in [\beta, b)$.*

Предложение 2. *Каждой функции $y \in D_0^*$ соответствует единственное решение $z(x)$ уравнения $l[z]=0$ такое, что $[w, y]_a = [w, z]_a$ для всех $w \in D_0^*$.*

Предложение 3. *Индекс дефекта оператора L_0 есть (m, m), где $n \leqslant m \leqslant 2n$. Область определения D_0 оператора L_0 состоит из тех и только тех функций $y \in D_0^*$, которые удовлетворяют* *условиям* $y^{[k]}(a)=0$ $(k=0,\ 1,\cdots,2n-1)$ *и* $[y,z]_b=0$ *для всех* $z\in D_0^*$.

Предложение 4. *Пусть* $w_1, w_2,\cdots, w_n$ — *некоторые линейно независимые по модулю* D_0 *функции из* D_0^*, *удовлетворяющие для всех* $z\in D_0^*$ *условиям*

$$[w_k, z]_b=0,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

Тогда если функции $y_0, y_1,\cdots, y_n$ *из* D_0^* *удовлетворяют для всех* $z\in D_0^*$ *соотношениям*

$$[y_j, w_k]_a=0,\quad [y_j, z]_b=0,$$

$$k=1,2,\cdots,n;\ j=0,1,\cdots,n,$$

то функции $y_0, y_1,\cdots, y_n$ *линейно зависимы по модулю* D_0.

Предложение 5. *Если индекс дефекта оператора* L_0 *есть* (n,n), *то* $[y,z]_b=0$ *для любых функций* $y, z\in D_0^*$.

Предложение 6. *Область определения* D *всякого самосопряженного расширения* L *оператора* L_0 *с индексом дефекта* (n,n) *есть совокупность всех функций* $y(x)$ *из* D_0^*, *удовлетворяющих условиям*

$$[y, z_k]_a=0,\quad k=1,2,\cdots,n, \tag{5}$$

где $z_1, z_2,\cdots, z_n$ — *некоторые линейно независимые решения уравнения* $l[z]=0$ *такие, что*

$$[z_j, z_k]_a=0,\quad j,k=1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

Обратно, каковы бы ни были линейно независимые решения $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *уравнения* $l[z]=0$, *удовлетворяющие соотношениям* (6), *совокупность всех функций* $y(x)$ *из* D_0^*, *удовлетворяющих условиям* (5), *есть область определения некоторого самосопряженного расширения оператора* L_0.

Предложение 7. *В случае индекса дефекта* (n,n) *одно из самосопряженных расширений оператора* L_0 *определяется краевыми условиями* $y^{[k]}(a)=0$, $k\in Q$, *где множество* Q *определяется следующим образом:*

1) *при выполнении условия* 1

$$Q=\{0,1,\cdots,n-1\};$$

2) *при выполнении условия* 2

$$Q=\{0,1,\cdots,n-2-\varkappa_0,\ n,\ n+1,\cdots,n+\varkappa_0\},\quad \varkappa_0=\left[\frac{\varkappa-1}{2}\right];$$

3) *при выполнении условия* 3

$$Q=\{0,1,\cdots,n-2-n_0,\ n,\ n+1,\cdots,n+n_0\},\quad n_0=\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

$$(Q=\{1\}\ \text{при}\ n=1).$$

В случае индекса дефекта (m, m) $(m > n)$ здесь будут рассматриваться только те самосопряженные расширения оператора L_0, которые определяются распадающимися краевыми условиями.

Предложение 8. *Распадающиеся краевые условия, которые определяют самосопряженное расширение оператора L_0 с индексом дефекта (m, m), имеют вид*

$$[y, z_k]_a = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n, \tag{7}$$

$$[y, w_k]_b = 0, \quad k = 1, 2, m-n, \tag{8}$$

где $z_1, z_2, \cdots, z_n$ — линейно независимые решения уравнения $l[z]=0$, удовлетворяющие соотношениям

$$[z_j, z_k]_a = 0, \quad j, k = 1, 2, \cdots, n,$$

а $w_1, w_2, \cdots, w_{m-n}$ — линейно независимые по модулю D_0 функции из D_0^*, удовлетворяющие соотношениям

$$w_k^{[\nu]}(a) = 0, \ [w_j, w_k]_b = 0,$$

$$\nu = 0, 1, \cdots, 2n-1; \ k, \quad j = 1, 2, \cdots, m-n.$$

Предложение 9. *Пусть функции $y_1, y_2, \cdots, y_n$ из D_0^* линейно независимы по модулю D_0 и для всех $z \in D_0^*$ удовлетворяют соотношениям*

$$[y_j, y_k]_a = 0, \quad [y_j, z]_b = 0, \quad j, k = 1, 2, \cdots, n.$$

Тогда совокупность D_1 всех функций $y(x)$ из D_0^*, удовлетворяющих для всех $z \in D_0^*$ условиям

$$[y, y_k]_a = 0, \quad [y, z]_b = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

является областью определения некоторого замкнутого симметрического расширгния L_1 оператора L_0. При этом область определения D_1^* сопряженного к L_1 оператора L_1^* есть совокупность всех функций $y(x)$ из D_0^*, удовлетворяющих условиям

$$[y, y_k]_a = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Кроме того, всякое самосопряженное расширение оператора L_1 определяется распадающимися краевыми условиями вида (7) *и* (8), *в которых решения $z_1, z_2, \cdots, z_n$ уравнения $l[z]=0$ соответствуют функциям $y_1, y_2, \cdots, y_n$ в смысле предложения* 2.

В связи с предложением 9 отметим, что в монографии [1] (стр. 274) содержится следующее утверждение: пусть конец a регулярен и индекс дефекта оператора L_0 есть (m, m) $(m > n)$; пусть, далее, $w_1, w_2, \cdots, w_n$ — некоторые линейно независимые по модулю D_0 функции из D_0^*, удовлетворяющие соотношениям

$$[w_j, w_k]_a = 0, \quad [w_j, w_k]_b = 0, \quad j, k = 1, 2, \cdots, n; \tag{*}$$

тогда совокупность всех функций $y(x)$ из D_0^*, удовлетворяющих условиям

$$[y, w_k]_a = 0, \quad k=1, 2, \cdots, n, \tag{**}$$

является областью определения некоторого симметрического расширения оператора L_0.

Очевидно, что такое утверждение неверно. Более того, если к условиям (**) добавить еще условие $[y, z]_b = 0$ для всех $z \in D_0^*$, то опять может не получиться область определения симметрического расширения оператора L_0. Дело в том, что соотношения (*), вообще говоря, не обеспечивают линейную независимость условий (**).

§ 2. Формулы обращения

Пусть

$$\sigma(\lambda) = \|\sigma_{kj}(\lambda)\|_{k,j=1}^n, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

— матричная функция распределения, т. е. при любом λ матрица $\sigma(\lambda)$ эрмитова; при $\lambda' < \lambda''$ разность $\sigma(\lambda'') - \sigma(\lambda')$ — неотрицательно определенная матрица; все функции $\sigma_{kj}(\lambda)$ непрерывны слева. С помощью матричной функции распределения $\sigma(\lambda)$ n-го порядка вводится гильбертово пространство L_σ^2 n-компонентных вектор-функций (см. [1], стр. 239—240 и [2], стр. 290—292).

Обозначим через Λ_σ оператор умножения на независимую переменную в L_σ^2.

Теорема 1. *Пусть самосопряженное расширение L оператора L_0 с индексом дефекта (m, m) определяется распадающимися краевыми условиями (7) и (8), а $u_j(x, \lambda)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ — некоторые линейно независимые решения уравнения $l[u] = \lambda u$, являющиеся целыми функциями параметра λ и удовлетворяющие краевым условиям (7):*

$$[u_j, z_k]_{a,\lambda} = 0, \quad j, k = 1, 2, \cdots, n. \tag{9}$$

Тогда оператору L и системе функций $u_j(x, \lambda)$ соответствует единственная (с точностью до постоянного слагаемого) матричная функция распределения $\sigma(\lambda)$ n-го порядка, такая, что формулы

$$F_j(\lambda) = \int_a^b f(x)\, \overline{u_j}(x, \lambda)\, dx, \quad j=1, 2, \cdots, n, \tag{10}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,j=1}^{n} F_k(\lambda)\, u_j(x, \lambda)\, d\sigma_{kj}(\lambda) \tag{11}$$

устанавливают взаимно обратные изометрические отображения $L^2(a, b)$ на L_σ^2 и L_σ^2 на $L^2(a, b)$ соответственно, переводящие друг в друга операторы L и Λ_σ. При этом интегралы в формулах (10) и (11) сходятся в смысле метрики в L_σ^2 и $L^2(a, b)$ соответственно и

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,j=1}^{n} F_k(\lambda)\,\overline{F_j}(\lambda)\,d\sigma_{kj}(\lambda).$$

Доказательство теоремы можно провести указанными во введении методами с учетом приведенных выше предложений, и мы его опускаем.

Формулы (10) и (11) называются формулами обращения, связанными с оператором L, а $\sigma(\lambda)$ называется спектральной матрицей оператора L.

Сформулируем теперь несколько следствий теоремы 1, которые доказываются таким же образом, как аналогичные утверждения доказываются в [1].

Следствие 1. Спектр оператора L состоит из точек роста матричной функции $\sigma(\lambda)$, причем собственными значениями являются точки разрыва этой функции.

Следствие 2. Кратность спектра оператора L не превосходит n.

Следствие 3. Непрерывная слева спектральная функция (разложение единицы) E_λ оператора L определяется по формуле

$$E_\lambda f(x) = \int_{-\infty}^{\lambda} \sum_{k,j=1}^{n} F_k(\mu)\,u_j(x,\mu)\,d\sigma_{kj}(\mu),$$

при этом для любого конечного интервала $\Delta = [\lambda', \lambda'')$ разность $E_\Delta = E_{\lambda''} - E_{\lambda'}$ есть интегральный оператор с ядром

$$E(x,t;\Delta) = \int_\Delta \sum_{k,j=1}^{n} u_j(x,\lambda)\,\overline{u_k}(t,\lambda)\,d\sigma_{kj}(\lambda). \tag{12}$$

Следствие 4. Для резольвенты R_μ ($\operatorname{Im}\mu \neq 0$) оператора L и ее ядра $R(x,t;\mu)$ имеют место интегральные представления

$$R_\mu f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,j=1}^{n} \frac{F_k(\lambda)}{\lambda-\mu}\,u_j(x,\lambda)\,d\sigma_{kj}(\lambda), \tag{13}$$

$$R(x,t;\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,j=1}^{n} u_j(x,\lambda)\,\overline{u_k}(t,\lambda)\,\frac{d\sigma_{kj}(\lambda)}{\lambda-\mu}. \tag{14}$$

При этом интеграл в (13) сходится равномерно относительно x на каждом конечном отрезке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, а интеграл в (14) сходится в смысле метрики в $L^2(a,b)$ относительно каждой из переменных x и t при фиксированной второй переменной.

Очевидно, что $R_\mu R_\mu^*$ есть интегральный оператор с ядром

$$G(x,t;\mu) = \int_a^b R(x,\xi;\mu)\,\overline{R}(t,\xi;\mu)\,d\xi. \tag{15}$$

Обозначим через $G_{\nu s}(x, t; \mu)$ квазипроизводные функции $G(x, t; \mu)$ ν-го порядка по x и s-го порядка по t. Функции $G_{\nu s}(x, t; \mu)$ ($\nu, s = 0, 1, \cdots, 2n-1$) непрерывны в области $a < x, t < b$.

Следствие 5. Имеет место формула

$$G_{\nu s}(x, t; \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k, j=1}^{n} u_j^{[\nu]}(x, \lambda) \overline{u_k^{[s]}(t, \lambda)} \frac{d\sigma_{kj}(\lambda)}{|\lambda - \mu|^2}, \tag{16}$$

$$\nu, s = 0, 1, \cdots, 2n-1,$$

в которой интеграл сходится равномерно по совокупности обеих переменных x и t в каждом конечном квадрате $\alpha \leqslant x, t \leqslant \beta$, $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

§ 3. Формула для спектральной матрицы

Пусть оператор L и функции $u_j(x, \lambda)$ ($j = 1, 2, \cdots, n$) те же, что и в теореме 1. Подчиним функции $u_j(x, \lambda)$ дополнительным условиям

$$[u_j, v_k]_{a, \lambda} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k \neq j, \end{cases} \quad k, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{17}$$

где функции $v_k(x)$ ($k = 1, 2, \cdots, n$) — некоторые решения уравнения $l[y] = 0$, которые вместе с решениями $z_k(x)$ ($k = 1, 2, \cdots, n$) образуют фундаментальную систему, причем функции $z_k(x)$ те же, что и в краевых условиях (7).

Выведем формулу, в которой спектральная матрица $\sigma(\lambda)$ выражается через решения $y_k(x, \mu) \in L^2(a, b)$ ($k = 1, 2, \cdots, m$) уравнения $l[y] = \mu y$ ($\operatorname{Im} \mu \neq 0$). С этой целью рассмотрим функции (см. (4), (12), (15))

$$P_{kj}(x, t; \Delta) = [v_k(t), [v_j(x), E(x, t; \Delta)]],$$

$$Q_{kj}(x, t; \mu) = [v_k(t), [v_j(x), G(x, t; \mu)]],$$

$$k, j = 1, 2, \cdots, n,$$

которые, как нетрудно убедиться, непрерывны в области $a \leqslant x, t < b$.

Из формул (12) и (16) имеем

$$P_{\nu s}(x, t; \Delta) = -\int_{\Delta} \sum_{k, j=1}^{n} [u_j, v_s]_{x, \lambda} [v_\nu, u_k]_{t, \lambda} d\sigma_{kj}(\lambda), \tag{18}$$

$$Q_{\nu s}(x, t; \mu) = -\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k, j=1}^{n} [u_j, v_s]_{x, \lambda} [v_\nu, u_k]_{t, \lambda} \frac{d\sigma_{kj}(\lambda)}{|\lambda - \mu|^2}. \tag{19}$$

Очевидно, что формула (18) справедлива также для значений $x = t = a$. Учитывая непрерывность функции $Q_{\nu s}(x, t; \mu)$ в области $a \leqslant x, t < b$, в силу неравенства Коши—Буняковского и теоремы Дини получим, что интеграл в (19) сходится равномерно по совокупности обеих переменных x и t в каждом конечном квадрате $a \leqslant x, t \leqslant \alpha$, $\alpha \in (a, b)$.

Следовательно, формула (19) справедлива также для значений $x=t=a$. В силу условий (18) и (19) имеем

$$P_{\nu s}(a,\ a;\ \Delta)=\int\limits_{\Delta} d\sigma_{\nu s}(\lambda),$$

$$Q_{\nu s}(a,\ a;\ \mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_{\nu s}(\lambda)}{|\lambda-\mu|^2}. \tag{20}$$

Из полученных формул следует, что

$$\sigma_{\nu s}(\Delta)=P_{\nu s}(a,\ a;\ \Delta), \tag{21}$$

$$\sigma_{\nu s}(\Delta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|\varepsilon|}{\pi}\int\limits_{\Delta} Q_{\nu s}(a,\ a;\ \lambda+i\varepsilon)\ d\lambda, \tag{22}$$

где $\Delta=[\lambda',\ \lambda'')$ — произвольный конечный интервал и $\sigma(\Delta)=\sigma(\lambda'')-\sigma(\lambda')$, причем в формуле (22) концы интервала Δ не являются собственными значениями оператора L, а ε — вещественный параметр.

Формула (22) (см. в связи с ней [1], стр. 275 и [3], стр. 304) получается из (20) применением формулы обращения Стильтьеса.

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 о единственности матричной функции $\sigma(\lambda)$ следует именно из формул (21) или (22).

Теперь формулы (20) и (22) представим в другом виде, более удобном для приложений.

Известно (см. [1], стр. 216—229), что ядро $R(x,\ t;\ \mu)$ резольвенты оператора L при фиксированном t, рассматриваемое как функция от x, является решением уравнения $l[y]=\mu y$ на каждом из интервалов $(a,\ t]$ и $[t,\ b)$, удовлетворяет краевым условиям (7), (8) и принадлежит $L^2(a,\ b)$. Поэтому при $a<x\leqslant t$ ядро $R(x,\ t;\ \mu)$ есть линейная комбинация функций $u_j(x,\ \mu)$:

$$R(x,\ t;\ \mu)=\sum_{j=1}^{n} u_j(x;\ \mu)\ \overline{g}_j\ (t,\ \overline{\mu}),\ \ x\leqslant t. \tag{23}$$

Однако $R_{\mu}^{*}=R_{\overline{\mu}}$, поэтому $\overline{R}(t,\ x;\ \mu)=R(x,\ t;\ \overline{\mu})$. Следовательно

$$R(x,\ t;\ \mu)=\sum_{j=1}^{n} g_j\ (x,\ \mu)\ \overline{u}_j\ (t,\overline{\mu}),\ \ x\geqslant t. \tag{24}$$

Из формулы (24) следует, что функции $g_j(x,\ \mu)$ являются решениями уравнения $l[y]=\mu y$, принадлежат $L^2(a,\ b)$ и удовлетворяют краевым условиям (8):

$$[g_j,\ w_k]_{b,\ \mu}=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-n;\ j=1,\ 2,\cdots,\ n. \tag{25}$$

Выясним условия, которым должны удовлетворять функции $g_j(x,\ \mu)$ в точке $x=a$. С этой целью используем равенство

$$R_{\nu 0}(x,\ x+0;\ \mu)-R_{\nu 0}(x,\ x-0;\ \mu)=\begin{cases}0 \text{ при } 0\leqslant\nu\leqslant 2n-2,\\ 1 \text{ при } \nu=2n-1,\end{cases} \tag{26}$$

где через $R_{\nu s}(x, t; \mu)$ обозначена квазипроизводная функции $R(x, t; \mu)$ ν-го порядка по x и s-го порядка по t. Если учесть формулы (23), (24) и брать последовательные квазипроизводные обеих частей равенства (26), то получим

$$\sum_{j=1}^{n}[u_j^{[\nu]}(x, \mu)\,\overline{g}_j^{[s]}(x, \overline{\mu})-g_j^{[\nu]}(x, \mu)\,\overline{u}_j^{[s]}(x, \overline{\mu})]=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при } \nu+s\neq 2n-1,\\ 1 & \text{при } \nu+s=2n-1,\ 0\leqslant s<n-1.\end{cases} \tag{27}$$

Используя формулу (27), легко убедиться в справедливости равенств

$$\sum_{j=1}^{n}\{[u_j, z_k]_{x,\mu}[v_s, g_j]_{x,\overline{\mu}}-[g_j, z_k]_{x,\mu}[v_s, u_k]_{x,\overline{\mu}}\}=$$

$$=-[v_s, z_k]_x, \quad k, s=1, 2, \cdots, n. \tag{28}$$

С учетом условий (9) и (17) из равенств (28) получим

$$[g_j, z_k]_{a,\mu}=-[v_j, z_k]_a, \quad k, j=1, 2, \cdots, n. \tag{29}$$

Поскольку функции $u_j(x, \mu)$ удовлетворяют условиям (9), то для любых μ' и μ''

$$[u_k(x, \mu'), u_j(x, \mu'')]_{x=a}=0.$$

Однако в силу формулы Лагранжа (см. [1], стр. 192) выражение $[u_k(x, \mu), u_j(x, \overline{\mu})]$ не зависит от x и поэтому

$$[u_k(x, \mu), u_j(x, \overline{\mu})]=0.$$

Учитывая это, из равенства (27) получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{u}_j(x, \overline{\mu})[g_j(x, \mu), u_k(x, \overline{\mu})]=\overline{u}_k(x, \overline{\mu}). \tag{30}$$

Так как выражение $[g_j(x, \mu), u_k(x, \overline{\mu})]$ не зависит от x, то из (30) получим соотношения

$$[g_j(x, \mu), u_k(x, \overline{\mu})]=\begin{cases}1 & \text{при } k=j,\\ 0 & \text{при } k\neq j,\end{cases} \quad k, j=1, 2, \cdots, n. \tag{31}$$

Таким образом, функции $g_j(x, \mu)$ в точке $x=a$ удовлетворяют условиям (29), которые эквивалентны условиям (31). Эквивалентность этих условий следует из соотношений

$$[y, z_k]_a=-\sum_{j=1}^{n}[v_j, z_k]_a[y, u_j]_{a,\mu}, \quad k=1, 2, \cdots, n,$$

где $y(x)$ — произвольная функция из D_0^*, причем

$$\det\|[v_j, z_k]_a\|_{k, j=1}^{n}\neq 0.$$

Из формул (15), (23) и (24) при $x\leqslant t$ имеем

$$G(x, t; \mu)=\sum_{k, j=1}^{n}g_k(x, \mu)\,\overline{g}_j(t, \mu)\int_a^x\overline{u}_k(\xi, \overline{\mu})\,u_j(\xi, \overline{\mu})d\xi+$$

$$+\sum_{k,j=1}^{n} u_k(x,\mu)\,\overline{g}_j(t,\mu)\int_x^t \overline{g}_k(\xi,\overline{\mu})\,u_j(\xi,\overline{\mu})\,d\xi+$$

$$+\sum_{k,j=1}^{n} u_k(x,\mu)\,\overline{u}_j(t,\mu)\int_t^b \overline{g}_k(\xi,\overline{\mu})\,g_j(\xi,\overline{\mu})\,d\xi.$$

Беря последовательные квазипроизводные обеих частей этого равенства и учитывая соотношения (27), получим

$$G_{\nu s}(x,t;\mu)=\sum_{k,j=1}^{n} g_k^{[\nu]}(x,\mu)\,\overline{g}_j^{[s]}(t,\mu)\int_a^x \overline{u}_k(\xi,\overline{\mu})u_j(\xi,\overline{\mu})\,d\xi+$$

$$+\sum_{k,j=1}^{n} u_k^{[\nu]}(x,\mu)\,\overline{g}_j^{[s]}(t,\mu)\int_x^t \overline{g}_k(\xi,\overline{\mu})\,u_j(\xi,\overline{\mu})\,d\xi+$$

$$+\sum_{k,j=1}^{n} u_k^{[\nu]}(x,\mu)\,\overline{u}_j^{[s]}(t,\mu)\int_t^b \overline{g}_k(\xi,\overline{\mu})\,g_j(\xi,\overline{\mu})\,d\xi.$$

Из полученного равенства следует, что

$$-Q_{\nu s}(x,t;\mu)=$$

$$=\sum_{k,j=1}^{n}[g_k,v_s]_{x,\mu}[v_\nu,g_j]_{t,\mu}\int_a^x \overline{u}_k(\xi,\overline{\mu})\,u_j(\xi,\overline{\mu})\,d\xi+$$

$$+\sum_{k,j=1}^{n}[u_k,v_s]_{x,\mu}[v_\nu,g_j]_{t,\mu}\int_x^t \overline{g}_k(\xi,\overline{\mu})\,u_j(\xi,\overline{\mu})\,d\xi+$$

$$+\sum_{k,j=1}^{n}[u_k,v_s]_{x,\mu}[v_\nu,u_j]_{t,\mu}\int_t^b \overline{g}_k(\xi,\overline{\mu})\,g_j(\xi,\overline{\mu})\,d\xi.$$

Учитывая условия (17), в частности, получим формулу

$$Q_{\nu s}(a,a;\mu)=\int_a^b g_\nu(\xi,\mu)\,\overline{g}_s(\xi,\mu)\,d\xi, \tag{32}$$

где учтено также равенство $Q_{\nu s}(x,t;\mu)=\overline{Q_{\nu s}(x,t;\overline{\mu})}$ (см. (19)).

По условию индекс дефекта оператора L_0 есть (m, m). Поэтому уравнение $l[y]=\mu y$ ($\operatorname{Im}\mu\neq 0$) имеет ровно m линейно независимых решений $y_k(x,\mu)$ ($k=1, 2,\cdots, m$), принадлежащих $L^2(a, b)$. Но тогда функции $g_j(x,\mu)$ представляются в виде

$$g_j(x,\mu)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_{jk}(\mu)\,y_k(x,\mu),\quad j=1, 2,\cdots, n. \tag{33}$$

Учитывая равенства (25) и (29), при каждом j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ для функций $\gamma_{jk}(\mu)$ получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk}(\mu)\,[y_k,\ w_s]_{b,\mu} = 0, \qquad s=1, 2, \cdots, m-n, \tag{34}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk}(\mu)\,[y_k,\ z_s]_{a,\mu} = -[v_j,\ z_s]_a, \qquad s=1, 2, \cdots, n. \tag{35}$$

Если же вместо (29) использовать равенство (31), то получим, что функции $\gamma_{jk}(\mu)$ удовлетворяют системе уравнений (34) и

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk}(\mu)\,[y_k(x,\ \mu),\ u_s(x,\ \overline{\mu})] = \begin{cases} 1 \text{ при } s=j, \\ 0 \text{ при } s\neq j, \end{cases} \quad s=1, 2, \cdots, n. \tag{36}$$

Определитель каждой из систем уравнений (34), (35) и (34), (36) отличен от нуля. Действительно, в противном случае, как нетрудно убедиться, получим, что невещественное число μ является собственным значением самосопряженного оператора L, что невозможно.

В силу (33) формула (32) принимает вид

$$Q_{\nu s}(a,\ a;\ \mu) = \sum_{k,\ j=1}^{m} \gamma_{\nu k}(\mu)\,\overline{\gamma}_{sj}(\mu)(y_k,\ y_j)_\mu,$$

где

$$(y_k,\ y_j)_\mu = \int_a^b y_k(x,\ \mu)\,\overline{y}_j(x,\ \mu)\,dx.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Пусть самосопряженное расширение L оператора L_0 с индксом дефекта $(m,\ m)$ определяется распадающимися краевыми условиями (7), (8), и пусть $u_j(x,\ \lambda)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ — решения уравнения $l[u]=\lambda u$, удовлетворяющие условиям (9) и (17). Тогда для спектральной матрицы $\sigma(\lambda)$ оператора L, соответствующей системе функций $u_j(x,\ \lambda)$, и для ядра $R(x,\ t;\ \mu)$ резольвенты оператора L имеют место формулы*

$$\sum_{k,\ j=1}^{m} \gamma_{\nu k}(\mu)\,\overline{\gamma}_{sj}(\mu)(y_k,\ y_j)_\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{\nu s}(\lambda)}{|\lambda-\mu|^2}, \quad \operatorname{Im}\mu \neq 0,$$

$$\sigma_{\nu s}(\Delta) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\varepsilon|}{\pi} \int_\Delta \left\{ \sum_{k,\ j=1}^{m} \gamma_{\nu k}(\lambda+i\varepsilon)\,\overline{\gamma}_{sj}(\lambda+i\varepsilon)\,(y_k,\ y_j)_{\lambda+i\varepsilon} \right\} d\lambda, \tag{37}$$

$$R(x,\ t;\ \mu) = \sum_{k=1}^{m} \overline{y}_k(t,\ \overline{\mu}) \sum_{j=1}^{n} \overline{\gamma}_{jk}(\overline{\mu})\ u_j(x,\ \mu), \quad a<x\leqslant t<b, \tag{38}$$

где $y_k(x,\ \mu)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$ — произвольная система линейно независимых решений уравнения $l[y]=\mu y$, принадлежащих $L^2(a,\ b)$; $\gamma_{jk}(\mu)$ — решения системы уравнений (34), (35) или эквивалентной ей системы (34), (36); Δ — произвольный конечный интервал, концы *которого не являются собственными значениями оператора L, ε — вещественный параметр.*

Замечание 2. Если функции $\gamma_{jk}(\mu)$ определить из системы уравнений (34), (36), то в представлении (38) ядра $R(x, t; \mu)$ дополнительные ограничения (17) на решения $u_j(x, \mu)$ не являются существенными.

§ 4. Отбор и нормировка минимальной системы обобщенных собственных функций в непрерывном спектре

В разложении (11) функции $f \in L^2(a, b)$ использована система $u_j(x, \lambda)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ обобщенных собственных функций оператора L, которая, вообще говоря, не является минимальной. Формула (37) позволяет указать некоторый метод получения разложения при помощи минимальной системы обобщенных собственных функций оператора L. С этой целью будем исходить из следующих предположений:

1) Непрерывный спектр оператора L есть замыкание множества $M = \bigcup_r \Delta_r$, где интервалы $\Delta_r = (\lambda_r', \lambda_r'')$ не пересекаются и не содержат собственных значений.

2) При всех $\operatorname{Im}\mu > 0$ линейно независимые решения $y_k(x, \mu) \in L^2(a, b)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$ уравнения $l[y] = \mu y$ подобраны и пронумерованы так, что для любого отрезка $\Delta \subset M$ положительной длины соотношения

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varepsilon}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=m(\Delta)+1}^{m} \int_{\Delta} \gamma_{\nu k}(\lambda + i\varepsilon)\, \overline{\gamma}_{sj}(\lambda + i\varepsilon)(y_k, y_j)_{\lambda + i\varepsilon}\, d\lambda + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=m(\Delta)+1}^{m} \sum_{j=1}^{m(\Delta)} \int_{\Delta} \gamma_{\nu k}(\lambda + i\varepsilon)\, \overline{\gamma}_{sj}(\lambda + i\varepsilon)(y_k, y_j)_{\lambda + i\varepsilon}\, d\lambda \right\} = 0,$$

$$\nu, s = 1, 2, \cdots, n, \tag{39}$$

имеют место с минимальным числом $m(\Delta)$.

3) Число $m(\Delta)$ постоянно на каждом интервале Δ_r, т. е. $m(\Delta) = m_r$ для всех отрезков $\Delta \subset \Delta_r$ положительной длины.

4) Для любого интервала Δ_r равномерно по λ на каждом отрезке $\Delta \subset \Delta_r$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \gamma_{\nu k}(\lambda + i\varepsilon) = \gamma_{\nu k}(\lambda), \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n;\ 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{40}$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\lambda_r}^{\lambda} (y_k, y_j)_{\xi + i\varepsilon}\, d\xi = \rho_{kj}(\lambda), \quad 1 \leqslant k, j \leqslant m, \tag{41}$$

где λ_r — фиксированное число из интервала Δ_r.

При указанных предположениях $m_r \leqslant n$. Действительно, если $y_k(x, \mu) = g_k(x, \mu)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$, где функции $g_k(x, \mu)$ те же, что и в § 3, то для чисел $\gamma_{kj}(\mu)$ имеем

$$\gamma_{kj}(\mu)=\begin{cases}1 \text{ при } 1\leqslant j\leqslant n \text{ и } k=j,\\ 0 \text{ при } n+1\leqslant j\leqslant m \text{ или } 1\leqslant j\leqslant n \text{ и } k\neq j.\end{cases}$$

Поэтому при таком выборе решений $y_k(x, \mu)$ соотношения (39) с числом $m(\Delta)=n$ заведомо выполняются.

В силу (40) и (41) из формул (37) для любого отрезка $\Delta\subset\Delta_r$ имеем

$$\sigma_{\nu s}(\Delta)=\int\limits_{\Delta}\sum_{k,\ j=1}^{m_r}\gamma_{\nu k}(\lambda)\,\overline{\gamma}_{sj}(\lambda)\,d\rho_{kj}(\lambda),\quad 1\leqslant\nu,\ s\leqslant n. \tag{42}$$

Обозначим

$$\varphi_j(x, \lambda)=\sum_{s=1}^{n}\overline{\gamma}_{sj}(\lambda)\,u_s(x, \lambda),\quad j=1, 2,\cdots, m.$$

Отметим, что в силу формулы (38) и замечания 2 функции $\varphi_j(x, \lambda)$ не зависят от выбора решений $u_s(x, \lambda)$, удовлетворяющих краевым условиям (9). Положим

$$\Phi_k(\lambda)=\int\limits_a^b f(x)\,\overline{\varphi}_k(x, \lambda)\,dx=\sum_{j=1}^{n}\gamma_{jk}(\lambda)\,F_j(\lambda),$$

$$k=1, 2,\cdots, m,$$

где функции $F_j(\lambda)$ определяются по формуле (10). В силу (42)

$$\int\limits_{\Delta_r}\sum_{k,\ j=1}^{n}F_k(\lambda)\,u_j(x, \lambda)\,d\sigma_{kj}(\lambda)=\int\limits_{\Delta_r}\sum_{k,\ j=1}^{m_r}\Phi_k(\lambda)\,\varphi_j(x, \lambda)\,d\rho_{kj}(\lambda).$$

Учитывая это, из формулы (11) получаем

$$f(x)=\sum_r\int\limits_{\Delta_r}\sum_{k,\ j=1}^{m_r}\Phi_k(\lambda)\,\varphi_j(x, \lambda)\,d\rho_{kj}(\lambda)+$$

$$+\sum_k\psi_k(x)\int\limits_a^b f(t)\,\overline{\psi}_k(t)\,dt, \tag{43}$$

где $\{\psi_k(x)\}$—ортонормированная система всех собственных функций оператора L.

Таким образом, для получения разложения (43) с минимальными числами m_r вопрос сводится к подходящему выбору решений $y_k(x, \mu)$ и вычислению пределов (41).

Отметим, что полученные в [5] и [6] разложения можно вывести также указанным здесь способом, причем заменив условие суммируемости функций (2) на интервале $(a, \alpha]\subset(a, b)$ одним из условий 1, 2, 3.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.V.1981

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ օպերատորների հետ կապված շրջման բանաձևերի մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է $L^2(a, b)$ $(-\infty<a<b<\infty)$ տարածությունում $2n$ կարգի ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ L օպերատորը, որը որոշվում է անջատվող եզրային պայմաններով։ Ընդ որում L օպերատորի գործակիցների վրա դրվում են պայմաններ, որոնց դեպքում (a, b) միջակայքի ծայրակետերը ընդհանրապես սինգուլյար են։ Արտածվում են L օպերատորի հետ կապված շրջման բանաձևեր այդ օպերատորի n ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների միջոցով։ Արտածվում է նաև որոշ բանաձև L օպերատորի սպեկտրալ մատրիցի համար։ Նշվում է L օպերատորի ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների մինիմալ սիստեմի միջոցով վերլուծության ստանալու մի մեթոդ։

I. G. KHACHATRIAN. *On inversion formulas connected with self-adjoint differential operators* (summary)

In the space $L^2(a, b)$ $(-\infty < a < b < \infty)$ a self-adjoint differential operator L of order $2n$ which determined by decomposing boundary conditions is considered. We pose some restrictions on the coefficients of the operator L under which both ends of the interval (a, b) are in general singular. We derive inversion formulas connected with the operator L by means of n generalized eigenfunctions of that operator. A formula for the spectral matrix of the operator L is obtained as well and a method of expansion by minimal system of generalized eigenfunctions of the operator L is derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Наймарк.* Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.
2. *Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1966.
3. *Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., ИИЛ, 1958.
4. *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян.* Введение в спектральную теорию, М., «Наука», 1970.
5. *И. М. Рапопорт.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Киев, Изд-во АН УССР, 1954.
6. *М. В. Федорюк.* Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов, Труды ММО, 15, 1966, 296—345.
7. *И. Г. Хачатрян.* Изучение решений обыкновенного сингулярного дифференциального уравнения, Изв. АН Арм.ССР, серия матем., 17, № 3, 1982, 159—181.

2—724