ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 3, 1984 Математика

УДК 519.212.3

В. К. ОГАНЯН

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИНЫ „ТИПИЧНОГО" РЕБРА СЛУЧАЙНОЙ МОЗАИКИ

Рассматриваются случайные мозаики на плоскости, инвариантные относительно группы всех евклидовых движений плоскости.

Задача состоит в вычислении длины „типичного" ребра мозаики в терминах маркированного точечного процесса $\{P_i, \Psi_i\}$, где $\{P_i\}$ — точечный процесс пересечений ребер мозаики с фиксированной прямой g_0, а маркой Ψ_i служит угол, под которым происходит пересечение в точке P_i.

Эта и аналогичная задача для процессов многоугольников рассматривались Р. В. Амбарцумяном в работе [1] и в его монографии [2].

Использованный в [1] и [2] метод требовал предположений о существовании некоторых пределов эргодического характера.

Цель настоящей статьи показать, что эти предположения можно обойти, если пользоваться надлежащими определениями распределений „типичных" элементов. Эти определения даны в [3] и [4].

Решение вышеупомянутой задачи дает нижестоящая формула (17).

Дополнительно предполагается, что среднее квадрата числа ребер мозаики, пересекающих любое ограниченное борелевское множество, конечно, а также, что с вероятностью 1 мозаика не содержит узлов типа T.

С точки зрения методологии статья продолжает исследования автора в [5], [6], [7] (см. также [8], стр. 821 и [3]) по интегрированию комбинаторных разложений (общая теория комбинаторных разложений приведена в [2]).

Случайной мозаикой на плоскости называется случайное поле отрезков с вероятностью единица, разбивающая плоскость на непустые выпуклые ограниченные многоугольники.

Случайные поля отрезков на плоскости можно определять как случайные точечные поля в пространстве отрезков (см. [9]).

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех мозаик (реализаций);

Вероятность P на $\mathfrak{M}$ (точнее на соответствующей σ-алгебре) называется распределением случайной мозаики.

Вершины многоугольников из m называются узлами мозаики.

Узел Q называется узлом типа T, если существует прямая, проходящая через точку Q и оставляющая все ребра мозаики, исходящие из Q, в одной замкнутой полуплоскости.

Группа M движений полуплоскости индуцирует группу преобразований $\mathfrak{M}$ в себя (группа движений $\mathfrak{M}$). Случайная мозаика $m(w)$

называется однородной и изотропной, если ее распределение P инвариантно относительно этой группы (M-инвариантна).

Хорошо известной M-инвариантной, с вероятностью единица не имеющей узлов типа T, мозаикой является мозаика, порожденная пуассоновским случайным процессом прямых.

§ 1. Комбинаторное разложение для m

Пусть G— пространство всех прямых плоскости. $g \in G$. Обозначим через $[K_R] = |g \in G : g \cap K_R \neq \varnothing|$, где K_R—открытый круг радиуса R с центром в начале координат.

Рассмотрим некоторый элемент $m \in \mathfrak{M}$, не имеющий узлов типа T. Запишем комбинаторную формулу Р. В. Амбарцумяна (см. [9], стр. 15 или [2]) для инвариантной меры $\mu(\cdot)$ множества

$$B_0 = \left\{ g \in [K_R] : \text{прямая } g \text{ не пересекает ни одного отрезка из } m \cap K_R \right\}.$$

Легко убедиться, что $[K_R] \setminus B_0$ принадлежит бюффонову кольцу $B_r(\mathbf{P}_i)$ (см. [9] или [8]), где $\mathbf{P}_i$ — концы отрезков из $m \cap K_R$, лежащих на окружности ∂K_R. Согласно алгоритму, указанному в [9], имеем

$$\mu(B_0) = \mu([K_R]) - 2\sum_i |\chi_i| + \sum_i |d_i| \cdot I_0(d_i) - \sum_i |s_i| \cdot I_0(s_i) \qquad (1)$$

Здесь мы применили следующие обозначения:

$I_0(\tau) = I_{B_0}(\tau) = 1$, если отрезок τ не пересекается с отрезками из $m \cap K_R$; $|\cdot|$— длина отрезка;

Отрезок типа χ есть отрезок из $m \cap K_R$, являющийся хордой круга K_R;

Другие обозначения показаны на рис. 1.

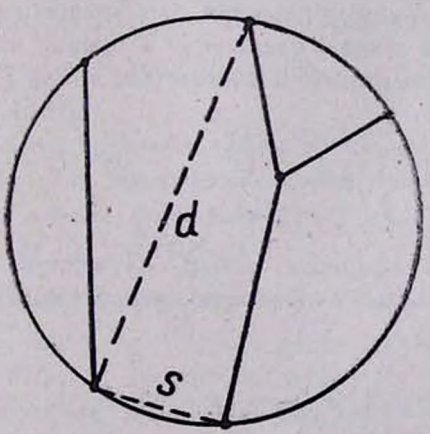


Рис. 1.

Пунктирными линиями отмечены отрезки, соединяющие точки $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}_j \in \partial K_R$, но не принадлежащие $m \cap K_R$. Они могут быть типа d или s. Тип зависит от направления отрезков из $m \cap K_R$, концами которых являются точки $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}_j$. Имеем тип s, если упомянутые отрезки из $m \cap K_R$ лежат в одной полуплоскости относительно пунктирной линии, и тип d—в противном случае.

§ 2. Интегрирование комбинаторного разложения

Будем интегрировать обе части (1) относительно M-инвариатного распределения P случайной мозаики $m(w)$, удовлетворяющего дополнительному условию:

$$P\{w\colon m \text{ имеет узлы типа } T\} = 0.$$

Для уяснения цели, с которой выполняется это интегрирование, рассмотрим интеграл от члена в левой части (1). Мы имеем:

$$a_1 = \int_{\mathfrak{M}} \mu(B_0)\,dP = \int_{\mathfrak{M}} \left(\int_G I_0(\chi(g))\,dg \right) dP = \int_{[K_R]} p_0(\chi(g))\,dg,$$

где $p_0(\chi) = \int_{\mathfrak{M}} I_0(\chi(g))\,dP$ есть вероятность следующего события: $\binom{\chi}{0} = \{$хорда $\chi(g) = g \cap K_R$ не пересекается отрезками из $m \cap K_R\}$. Используя M-инвариантность P и вид элемента инвариантной меры $dg = \frac{\chi}{2\sqrt{D^2-\chi^2}}\,d\chi \cdot d\varphi$ после интегрирования по всем направлениям φ получим

$$a_1 = \pi \cdot \int_0^D \frac{\chi \cdot p_0(\chi)\,d\chi}{\sqrt{D^2-\chi^2}} \quad (D = 2R). \tag{2}$$

Следовательно, интегрирование (1) даст некоторое представление для интеграла (2). Отсюда можно будет получить выражение для $p_0(\chi)$, используя формулу обращения для уравнения типа Абеля.

Проинтегрируем второе слагаемое в правой части (1). Используя один из вариантов формулы Мекке (см. также [3]), мы получим

$$a_2 = \int_{\mathfrak{M}} \left(\sum_i |\chi_i| \right) dP = \lambda \int_{[K_R]} \chi(g)\,dg \int_\chi^\infty (\tau - \chi)\,dF(\tau),$$

где λ—интенсивность процесса ребер случайной мозаики $m(w)$, а $F(\tau)$—распределение длины типичного ребра мозаики $m(w)$. Следовательно

$$a_2 = \pi \cdot \lambda \int_0^D \frac{\chi^2\,d\chi}{\sqrt{D^2-\chi^2}} \int_\chi^\infty (\tau - \chi)\,dF(\tau). \tag{3}$$

Интегрирование двух последних слагаемых в правой части (1) дает:

$$a_3 = \int_{\mathfrak{M}} \left(\sum_i |d_i| \cdot I_0(d_i) - \sum_i |s_i| \cdot I_0(s_i) \right) dP =$$

$$= \int\limits_{[\Delta_R]} \int\limits_{[\Delta_R]} [I_d(\chi_{12}) - I_s(\chi_{12})] \cdot \chi_{12} \cdot \Pi_{\delta_1 \delta_2} \left(\begin{matrix} \chi \\ 0 \end{matrix} \right) \cdot \mu_2(d\delta_1 \cdot d\delta_2). \tag{4}$$

Интегрирование в (4) проводится по множеству $[\Delta_R] \times [\Delta_R]$, где $[\Delta_R]$ есть множество *направленных* отрезков δ, задевающих K_R, причем начало отрезка $\delta \cap K_R = v$ лежит на ∂K_R;

χ_{12}—отрезок, соединяющий точки входа, направленных отрезков δ_1 и δ_2 в K_R;

$I_p(\cdot) = 1$, если χ_{12} есть отрезок типа d, $I_s(\cdot) = 1 - I_d(\cdot)$; $\Pi_{\delta_1 \delta_2}$ есть пальмовское распределение процесса $m(w)$, при условии, что отрезки δ_1 и $\delta_2 \in m(w)$ фиксированы;

$\Pi_{\delta_1 \delta_2} \left(\begin{matrix} \chi \\ 0 \end{matrix} \right)$ есть соответствующая вероятность события $\left(\begin{matrix} \chi \\ 0 \end{matrix} \right)$, где

$$\left(\begin{matrix} \chi \\ 0 \end{matrix} \right) = \left\{ \begin{matrix} m\text{: хорда } \chi \text{ круга } K_R, \text{ соединяющая точки} \\ \text{входа в } K_R \text{ отрезков } \delta_1 \text{ и } \delta_2 \text{ не пересе-} \\ \text{кается другими отрезками процесса.} \end{matrix} \right\}$$

μ_2 есть вторая моментная мера случайного процесса ребер мозаики $m(w)$.

§ 3. Переход к „стереологической“ форме записи

На множестве $[\Delta_R] \times [\Delta_R]$ можно использовать координаты $(l_1, l_2, \varphi_1, \varphi_2, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$, где l_i — точка, где отрезок δ_i входит в K_R, φ_i — угол между δ_i и ∂K_R в точке l_i, t_i — длина части отрезка δ_i, лежащая в K_R, τ_i — длина отрезка δ_i $(i = 1, 2)$.

Мы предполагаем, что μ_2 на $[\Delta_R] \times [\Delta_R]$ абсолютно непрерывна относительно $dl_1 dl_2 d\varphi_1 d\varphi_2 dt_1 dt_2 d\tau_1 d\tau_2$, dl_i — элемент длины на ∂K_R, т. е.

$$\mu_2(d\delta_1 d\delta_2) = f \cdot dl_1 dl_2 \cdot d\Phi, \tag{5}$$

где $d\Phi = d\varphi_1 d\varphi_2 dt_1 dt_2 d\tau_1 d\tau_2$.

Мера μ_2 может быть записана также в координатах: $(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$, где x_i есть точка пересечения прямой g_i, на которой лежит отрезок δ_i с фиксированной прямой g_0 и ψ_i есть угол между g_i и g_0 $(i = 1, 2)$. Из (5) следует, что

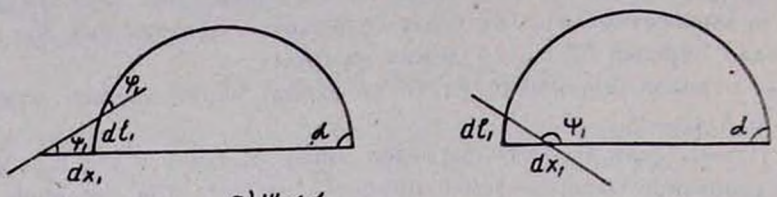
$$\mu_2(d\delta_1, d\delta_2) = f_1 \cdot dx_1 dx_2 d\psi_1 d\psi_2 dt_1 dt_2 d\tau_1 d\tau_2.$$

Мы имеем $f = f(\chi, \varphi_1, \tau_2, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$, где χ — длина хорды, соединяющая точки l_1, $l_2 \in \partial K_R$, и аналогично, $f_1 = f_1(\chi, \psi_1, \psi_2, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$, где $\chi = |x_1 - x_2|$ (следует из M-инвариантности P).

Между f и f_1 имеется связь. Из условия $[dx_i, d\psi_i, dt_i, d\tau_i] = [dl_i, d\varphi_i, dt_i, d\tau_i]$, где $[\nu, \alpha, \beta, \gamma]$ обозначает множество отрезков, которые лежат на прямых, пересекающих отрезок ν, их направления лежат в α, их сдвиги лежат в β, а длины лежат в γ, можно показать, что

$$dx_i = (\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\psi_i - \cos\alpha) \cdot [I(\psi_i < \alpha) - I(\psi_i \geqslant \alpha)] \cdot dl_i, \quad i = 1, 2.$$

$I(\psi_i < \alpha)$, $I(\psi_i \geqslant \alpha)$ суть индикаторы событий, стоящих в скобках. Обозначения показаны на рис. 2 $\left(\sin \alpha = \frac{\gamma}{D}\right)$.



а) $\Psi_1 < \alpha$

Рис. 2.

Лемма 1. $f(\gamma, \varphi_1, \varphi_2, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) = f_1(\gamma, \psi_1, \psi_2, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$.

$$(\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\psi_1 - \cos\alpha)\cdot(\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\psi_2 - \cos\alpha)\cdot[I_d(\gamma) - I_s(\gamma)]$$

(так как $I_d(\gamma) - I_s(\gamma) = [I(\psi_1 < \alpha) - I(\psi_1 \geqslant \alpha)][I(\psi_2 < \alpha) - I(\psi_2 \geqslant \alpha)]$).

Применяя M-инвариантность P и лемму 1, (4) можно записать в виде

$$a_3 = \pi_2 D^2 \int_0^D \frac{\gamma \cdot d\gamma}{\sqrt{D^2 - \gamma^2}} B_D(\gamma), \tag{6}$$

где

$$B_D(\gamma) = \int_{\Delta_1} \Pi_{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix}\gamma\\0\end{pmatrix}(\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\psi_1 - \cos\alpha)\cdot(\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\psi_2 - \cos\alpha)\cdot f_1\cdot d\Phi, \tag{7}$$

$$\Delta_1 = \{(\psi_1, \psi_1, t_1, t_2, \tau_1, \tau_2):\ \psi_1 \in [0, \pi),\ \psi_2 \in [0, \pi),\ \tau_1 \in (0, \infty),$$
$$\tau_2 \in (0, \infty),\ t_1 \in (0, \tau_1),\ t_2 \in (0, \tau_2)\}.$$

Из (2), (3) и (4), (6) окончательно, получаем

$$\int_0^D \frac{[\gamma \cdot p_0(\gamma) + 2\lambda\gamma^2 \cdot C(\gamma)]\, d\gamma}{\sqrt{D^2 - \gamma^2}} = D + D^2 \cdot \int_0^D \frac{\gamma \cdot B_D(\gamma)\, d\gamma}{\sqrt{D^2 - \gamma^2}}, \tag{8}$$

где

$$C(\gamma) = \int_\gamma^\infty (\tau - \gamma)\, dF(\tau).$$

§ 4. Обращение стохастического разложения (8)

Заметим, что соотношение (8) имеет вид уравнения Абеля:

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)\, ds}{\sqrt{x^2 - s^2}} = \Gamma(x).$$

Решение этого уравнения хорошо известно:

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx^2}\left[\int_0^{x^2}\frac{\Gamma(t)\,d(t^2)}{\sqrt{x^2-t^2}}\right]. \tag{9}$$

Следовательно, соотношение (8) можно обратить:

$$p_0(\chi) + 2\chi\int_\chi^\infty (\tau-\chi)\,dF(\tau) = 1 + \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx^2}\left[\int_0^{\chi^2}\frac{t^2\,d(t^2)}{\sqrt{\chi^2-t^2}}\int_0^t \frac{u\,du}{\sqrt{t^2-u^2}}B_t(u)\right]. \tag{10}$$

Функции $\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix}$ и f_1 не зависят от t. Применяя теорему Фубини, мы можем последнее слагаемое в (10) преобразовать следующим образом:

$$\frac{d}{d\chi^2}\left[\int_0^{\chi^2}\frac{t^2\,d(t^2)}{\sqrt{\chi^2-t^2}}\int_0^t\frac{u\,du}{\sqrt{t^2-u^2}}B_t(u)\right] = \frac{d}{d\chi^2}\int_0^{\chi^2} u\,du\int_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}\cdot f_1\,d\Phi \times$$

$$\times\left[\pi\cdot u^2\cdot\operatorname{ctg}\psi_1\cdot\operatorname{ctg}\psi_2 - 2u\sqrt{\chi^2-u^2}\cdot(\operatorname{ctg}\psi_1+\operatorname{ctg}\psi_2)+\frac{\pi}{2}(u^2-\chi^2)\right]$$

$$\left(\text{выше мы использовали } \int_{u^2}^{\chi^2}\frac{d(t^2)}{\sqrt{\chi^2-t^2}\sqrt{t^2-u^2}} = \pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\chi^2\int_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix}\cdot f_1\cdot\operatorname{ctg}\psi_1\cdot\operatorname{ctg}\psi_2\,d\Phi - \int_0^\chi\frac{u^2\,du}{\sqrt{\chi^2-u^2}}\int_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}\times$$

$$\times f_1(\operatorname{ctg}\psi_1+\operatorname{ctg}\psi_2)\,d\Phi - \frac{\pi}{2}\int_0^\chi u\,du\int_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}f_1\,d\Phi. \tag{11}$$

Лемма 2.

$$\int_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}\cdot f_1\,d\Phi = \frac{d^2}{du^2}[p_0(u)].$$

Используя лемму 2 мы преобразуем последнее слагаемое в (11) к виду

$$\int_0^\chi u\,du\int_{\Delta_1}\Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}\cdot f_1\,d\Phi = \chi\cdot p_0'(\chi) - p_0(\chi) + 1.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

Предложение. *Пусть P--M-инвариантная случайная мозаика, для которой вторая моментная мера μ_2 локально финитна и имеет плотность, а также с вероятностью единица отсутствуют узлы типа T.*

Тогда для производной $p_0'(\chi)$ имеем следующее представление

$$p_0'(\chi) = -2\lambda \int_{\chi}^{\infty} (\tau - \chi)\, dF(\tau) + \chi \cdot \int_{\Delta_1} \Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix} \operatorname{ctg}\psi_1 \cdot \operatorname{ctg}\psi_2 \cdot f_1\, d\Phi -$$

$$- \frac{2}{\pi \cdot \chi} \int_0^{\chi} \frac{u^2\, du}{\sqrt{\chi^2 - u^2}} \int_{\Delta_1} \Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix} \cdot f_1 \cdot (\operatorname{ctg}\psi_1 + \operatorname{ctg}\psi_2)\, d\Phi. \qquad (12)$$

Рассмотрим последнее слагаемое (обозначим его через a_4) в (12). Если мы сделаем дополнительное предположение, что $m(w)$ инвариантно относительно отражений, тогда a_4 обращается в нуль. Однако сравнение (12) с результатом статьи [6] показывает, что $a_4 = 0$ и без дополнительного предположения инвариантности относительно отражений.

Замечание.

$$\int_{\Delta_1} \Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix} \cdot f_1 \cdot \operatorname{ctg}\psi_i\, d\Phi = 0, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, мы имеем

$$\int_{\chi}^{\infty} (\tau - \chi)\, dF(\tau) = -\frac{1}{2\lambda} p_0'(\chi) + \frac{\chi}{2\lambda} \int_{\Delta_1} \Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix} \operatorname{ctg}\psi_1 \cdot \operatorname{ctg}\psi_2 \cdot f_1\, d\Phi.$$

Отсюда дифференцированием получаем

$$F(\chi) = 1 - \frac{p_0'(\chi)}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \frac{d}{d\chi}\left[\chi \cdot \int_{\Delta_1} \Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix} \operatorname{ctg}\psi_1 \cdot \operatorname{ctg}\psi_2 \cdot f_1 \cdot d\Phi\right]. \qquad (13)$$

В интеграле правой части (13) можно провести интегрирование по переменным $(\tau_1, \tau_2, t_1, t_2)$. Результат запишется в терминах случайного точечного процесса $\{\mathbf{P}_i, \psi_i\}$ на фиксированной прямой g_0, где $\{\mathbf{P}_i\}$ — точечный процесс пересечений мозаики с прямой g_0, а ψ_i — угол, под которым происходит пересечение в точке $\mathbf{P}_i$.

Результат будет иметь вид

$$\int_{\Delta} \Pi_{\delta_1\delta_2}\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix} \cdot \operatorname{ctg}\psi_1 \cdot \operatorname{ctg}\psi_2 \cdot f_1 d\Phi = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{ctg}\psi_1 \cdot \operatorname{ctg}\psi_2 \cdot P\left(\begin{matrix}\chi\\0\end{matrix}\Big/ \chi, \psi_1, \psi_2\right) \times$$

$$\times f_2\, d\psi_1, d\psi_2, \qquad (14)$$

где $f_2(\chi, \psi_1, \psi_2)$ — плотность второй моментной меры процесса $\{\mathbf{P}_i, \psi_i\}$, $P\left(\begin{matrix}\chi\\0\end{matrix}\Big/ \chi, \psi_1, \psi_2\right)$ — условная вероятность события $\begin{pmatrix}\chi\\0\end{pmatrix}$ при условии, что точки $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ находятся на расстоянии χ и марки в точках $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ равны ψ_1 и ψ_2 соответственно.

Покажем, что правую часть (13) можно записать в терминах аспределения „типичного“ маркированного интервала процесса $\{\mathbf{P}_i, \psi_i\}$ (ресм. [2], главу 9). Обозначим через $W(x)$ функцию распределения

длины „типичного“ интервала I, а через $f(\chi, \psi_1, \psi_2)$ — совместную плотность распределения тройки (I, ψ_1, ψ_2).

Из формулы Пальма следует, что

$$p_0^*(\chi) = a \cdot w'(\chi), \tag{15}$$

где a — интенсивность точечного процесса пересечений $\{x_i\}$.

Легко убедиться, что

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{ctg}\psi_1 \cdot \operatorname{ctg}\psi_2 \cdot P\left(\begin{matrix}\chi \\ 0\end{matrix}\middle/ \chi, \psi_1, \psi_2\right) f_2\, d\psi_1 d\psi_2 = a\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{ctg}\psi_1 \cdot \operatorname{ctg}\psi_2 \cdot f \cdot \psi_1 d\psi_2. \tag{16}$$

Используя (14), (15), (16), формулу (13) можно записать в терминах распределения „типичного“ маркированного интервала

$$F(\chi) = 1 - \frac{1}{a} w'(\chi) + \frac{1}{a}\frac{d}{d\chi}\left[\chi \cdot \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{ctg}\psi_1 \cdot \operatorname{ctg}\psi_2 \cdot f(\chi, \psi_1, \psi_2)\, d\psi_1 d\psi_2\right]. \tag{17}$$

Формула (17) дает решение нашей основной задачи.

Последняя формула совпадает с формулой (37) в [1], которая была получена методом усреднения тождества типа Плейеля, требовавшим существование некоторых пределов эргодического характера.

Следствие 1. Если распределение „типичного“ маркированного ичтервала такого, что I, ψ_1 и ψ_2 независимы, то формула (17) принимает вид:

$$F(\chi) = 1 - \frac{1}{a} W'(\chi).$$

Следствие 2. Если к условиям следствия 1 добавить условие, что „типичный“ интервал имеет экспоненциальное распределение, то $F(\chi)$ также имеет экспоненциальное распределение с тем же средним.

Ереванский государственный
университет

Поступила 23.VI.1983

Վ. Կ. ՕՀԱՆՅԱՆ. Պատահական խճանկարի «տիպիկ» կողի երկարության բաշխման մասին. (*ամփոփում*)

Դիտարկվում են համասեռ և իզոտրոպ պատահական խճանկարներ հարթության վրա։ Ապացված է բանաձև, որը թույլ է տալիս «տիպիկ» կողի երկարության բաշխումը հաշվել $\{P_i, \psi_i\}$ պիտակավորված կետային պրոցեսի տերմիններով, որպես պիտակ ψ_i վերցված է այն անկյունը, որի տակ տեղի է ունենում հատումը P_i կետում։

V. K. OGANIAN. *On distribution of the length of the "typical" edge of a random tesselation* (summary)

Random tesselations, with distribution invariant with respect to the group of enclidean motions of the plane are considered. The main result is a formula giving the length distribution of the "typical" edge of a random tesselation in terms of the

marked point process of intersections $\{P_i, \psi_i\}$, induced on a line, where P_i is an intersection point, ψ_i is the corresponding angle.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. V. Ambartzumian.* Convex polygons and Random Tesselations. В сборнике: "Stochastic Geometry"John Wiley, New York (editors E. F. Harding and D. G. Kendall), 1974, 176—191.
2. *R. V. Ambartzumian.* Combinatorial Integral Geometry: with applycations to Mathematical Stereology. John Wiley, 1982.
3. *R. V. Ambartzumian.* Probability distributions in stereology of Random geometrical processes. In Recent Trends in Mathematics, Reinhardbrunn (collection of papers). Teubner Texte zur Mathematik, 1982, Band 50, Leipzig, 5—12.
4. *R. V. Ambartzumian.* Factorization in integral and stochastic Geometry. Teubner Texte zur Mathematik, 1984.
5. *В. К. Оганян.* Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных полей отрезков, ДАН Арм.ССР, 68, № 3, 1979, 150—154.
6. *В. К. Оганян.* Комбинаторные принципы в стохастической геометрии и случайных полей отрезков, в сборнике [9], 81—106.
7. *V. K. Oganian.* On Palm distributions of processes of lines in the plane. Teubner Texte zur Mathematik, 1984.
8. *R. V. Ambartzumian.* Stochastic Geometry from the standpoint of integral geometry, Appl. prob. 9, 1977, 792—823.
9. *Р. В. Амбарцумян* (редактор) Комбинаторные принципы в стохастической геометрии, Сборник статей, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1980.