

УДК 513.8

М. И. КАРАХАНЫАН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОММУТАТОРОВ ЭЛЕМЕНТОВ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

Пусть $B(H)$ — банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на комплексном гильбертовом пространстве H . Классическая теорема Фуглида—Путнама утверждает, что если для пары нормальных операторов $N_1, N_2 \in B(H)$ имеет место условие $N_1 T = T N_2$, где $T \in B(H)$, то $N_1^* T = T N_2^*$ (см., напр., [1], стр. 337). Позднее Р. Муром [2] был получен асимптотический вариант теоремы Фуглида—Путнама: при фиксированных нормальных операторах $N_1, N_2 \in B(H)$ для каждого T с $\|T\| \leq 1$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\|N_1 T - T N_2\| < \delta$ следует $\|N_1^* T - T N_2^*\| < \varepsilon$. В дальнейшем Е. А. Горин и автор в [3] усилили результаты из [2], установив, в частности, следующую теорему: Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 — такие элементы комплексной банаховой алгебры, что

$$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = 0 \text{ и } \|e^{i n_1 - i b_1}\| = o(|n|^{1/2}), \|e^{i a_2 - i b_2}\| = o(|n|^{1/2})$$

при $|n| \rightarrow \infty$. Тогда равномерно в каждом шаре $\|x\| \leq R < \infty$ имеет место неравенство $\|b_1 x - x b_2\| \leq \varphi(\|a_1 x - x a_2\|)$, где $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Недавно Д. Роджерс (см. [4]) показал, что теорема Мура остается справедливой, если в алгебре операторов гильбертова пространства вместо равномерной рассмотреть сильную или слабую операторную топологию.

В работе [5] автор, используя методику работ [3], [4], обобщил результаты из [4] на алгебру ограниченных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве в том же духе, в каком работа [3] обобщает теоремы Фуглида—Путнама—Мура.

В данной работе, как и в [5], исходя из позиций работ [3], [4] будет доказан асимптотический вариант теоремы Фуглида—Путнама для довольно широкого класса топологий, заданных на комплексной банаховой алгебре A . Для дальнейшего нам понадобятся несколько стандартных понятий и определений, которые мы сейчас приведем.

Пусть A — комплексная банахова алгебра и Y — разделяющее элементы алгебры A пространство комплексных линейных непрерывных функционалов (т. е. можно считать, что $Y \subset A^*$). В этом случае говорят, что $\langle A, Y \rangle$ — дуальная пара.

Будем говорить, что пространство Y является A -инвариантным, если для каждого функционала $\varphi \in Y$ и произвольных пар элементов $a, b \in A$ функционал $\varphi_{a,b} \in Y$, где $\varphi_{a,b}(x) = \varphi(axb)$. При этом соответствующую дуальную пару $\langle A, Y \rangle$ будем также называть A -инва-

риантной. Примером A -инвариантной дуальной пары является $\langle A, A^* \rangle$. На алгебре A вместе с исходной рассмотрим также Y -слабую топологию (обозначают $\sigma(A, Y)$), т. е. слабейшую топологию на A , в которой все функционалы из Y и только они непрерывны. Введем также на алгебре A топологию равномерной сходимости на $\sigma(Y, A)$ -ограниченных подмножествах Y , которую обозначают через $\beta(A, Y)$. Обозначим через $\Sigma(Y, A)$ класс всех $\sigma(Y, A)$ -ограниченных подмножеств Y . Отметим, что топология $\beta(A, Y)$ — локально выпуклая топология на A , которая порождается семейством полуном $\{p_K\}$, $K \in \Sigma(Y, A)$, где $p_K(x) = \sup_{\varphi \in K} |\varphi(x)|$, причем база окрестностей нуля задается множествами

$$U = U(K_1, \dots, K_m; \varepsilon) = \{x \in A : \sup_{\varphi \in K_p} |\varphi(x)| < \varepsilon, \text{ где}$$

$$K_p \in \Sigma(Y, A); p = 1, \dots, m\}.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть A — комплексная банахова алгебра $\langle A, Y \rangle$ есть A -инвариантная дуальная пара и a_1, a_2, b_1, b_2 — такие элементы из A , что $[a_j, b_j] = 0$ и $\|e^{i a_j - \lambda b_j}\| = o(|\lambda|^{1/2})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, где $j=1, 2$. Тогда для каждой окрестности нуля U в топологии $\beta(A, Y)$ существует такая окрестность нуля V (в той же топологии), что из условий $x \in A$, $\|x\| \leq 1$ и $a_1 x - x a_2 \in V$, следует $b_1 x - x b_2 \in U$.

Доказательство. Ввиду того, что K_{σ_p} есть $\sigma(Y, A)$ -ограниченные множества в Y , то существует такое $M > 0$, что для всех $\varphi \in \bigcup_{p=1}^m K_{\sigma_p}$, $|\varphi| \leq M$. Не ограничивая общности будем считать, что

$\|a_j\| \leq 1$, $\|b_j\| \leq 1$, где $j=1, 2$. Пусть $\omega(r) = \max_{j=1,2} \max_{|\lambda|=r} \|e^{i a_j - \lambda b_j}\|$. Так как $\omega(r) = o(r^{1/2})$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $r > 0$, такое, что

$$\frac{M \{[\omega(r) + 1]^2 + 1\}}{r} < \varepsilon.$$

Пусть $\Gamma_r = \{\lambda : |\lambda| = r\}$. Выберем натуральное число n таким, что $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} < e^{-r}$.

Рассмотрим окрестность нуля

$$U = U(K_1, \dots, K_m; \varepsilon) = \{x \in A : \sup_{\varphi \in K_p} |\varphi(x)| < \varepsilon, \text{ где}$$

$$K_p \in \Sigma(Y, A); p = 1, \dots, m\}.$$

Пусть $h_j(\lambda) = \exp(i b_j \lambda)$, где $j=1, 2$. Тогда $h_j(\lambda)$ — равномерно непрерывные функции от λ на Γ_r со значением в A . Поэтому существует такое конечное множество $P \subset \Gamma_r$, что для каждого $\lambda \in \Gamma_r$ при подходе $\gamma \in P$

$$\|h_1(\lambda) - h_1(\gamma)\| + \|h_2(-\lambda) - h_2(-\gamma)\| \leq e^{-r}.$$

Пусть $\delta = \frac{M}{r} e^{-r}$ и

$$V = \{y \in A : \sup |\bar{\varphi}_\gamma (a_1^{k-l-1} y a_2^l)| < \delta; \gamma \in P, l = 0, \dots, k; \\ k = 0, \dots, n; p = 1, \dots, m\},$$

где $\bar{\varphi}_\gamma(z) = \varphi[e^{\gamma b_1} z e^{-(\gamma b_2 - \gamma a_2)}]$, а $\varphi \in \bigcup_{p=1}^m K_{\sigma_p}$. В силу A -инвариантности дуальной пары $\langle A, Y \rangle$ функционал $\bar{\varphi}_\gamma \in Y$. Пусть теперь $x \in A$, $\|x\| \leq 1$, $a_1 x - x a_2 \in V$. Для $\varphi \in \bigcup_{p=1}^m K_{\sigma_p}$ рассмотрим целую функцию

$$f_\varphi(\lambda) = \varphi(h_1(\lambda) x h_2(-\lambda)).$$

Так как $\|h_j(\lambda)\| \leq e^r$, то для $\lambda, \gamma \in \Gamma_r$, где $\gamma \in P$, имеем

$$\|f_\varphi(\lambda) - f_\varphi(\gamma)\| \leq \|\varphi\| (\|h_1(\lambda) - h_1(\gamma)\| + \|h_2(-\lambda) - h_2(-\gamma)\|) e^r \leq M.$$

Отсюда

$$\|f_\varphi\|_r = \max \{ \|f_\varphi(\lambda)\| : |\lambda| = r \} \leq \max \{ \|f_\varphi(\gamma)\| : \gamma \in P \} + M.$$

Оценим $\|f_\varphi(\gamma)\|$, когда $\gamma \in P$

$$\begin{aligned} \|f_\varphi(\gamma)\| &\leq \|\varphi\| \omega^2(r) + \|\varphi\| [e^{\gamma b_1} (e^{-\gamma a_1} x - x e^{-\gamma a_2}) e^{-(\gamma b_2 - \gamma a_2)}] = \\ &= \|\varphi\| \omega^2(r) + \|\varphi_\gamma (e^{-\gamma a_1} x - x e^{-\gamma a_2})\| \leq \\ &\leq \|\varphi\| \omega^2(r) + \sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} |\bar{\varphi}_\gamma [a_1^{k-l-1} (a_1 x - x a_2) a_2^l]| + 2e^{-r} \|\varphi_\gamma\| \leq \\ &\leq \|\varphi\| [\omega^2(r) + 2\omega(r)] + \sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} |\varphi_\gamma [a_1^{k-l-1} (a_1 x - x a_2) a_2^l]|. \end{aligned}$$

Так как $a_1 x - x a_2 \in V$, то

$$\sum_{l=0}^{k-1} |\varphi_\gamma [a_1^{k-l-1} (a_1 x - x a_2) a_2^l]| < k\delta,$$

откуда

$$\|f_\varphi(\gamma)\| \leq \|\varphi\| [\omega^2(r) + 2\omega(r)] + r\delta e^r \leq M [\omega(r) + 1]^2.$$

Значит

$$\sup_{\varphi \in K_{\sigma_p}} \|f_\varphi\|_r \leq \sup_{\varphi \in K_{\sigma_p}} \max \{ \|f_\varphi(\gamma)\| : \gamma \in P \} + M \leq M \{ [\omega(r) + 1]^2 + 1 \},$$

где $p = 1, \dots, m$.

Из формулы Коши

$$f'_\varphi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f_\varphi(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda$$

следует

$$\sup_{\varphi \in K_{\sigma_p}} |f'_\varphi(0)| \leq \frac{M [\omega(r) + 1]^2 + 1}{r},$$

где $p = 1, \dots, m$.

Но так как $f'_\varphi(0) = \varphi(b_1 x - x b_2)$, то получаем, что $\sup_{\varphi \in K_{\sigma_p}} |\varphi(b_1 x - x b_2)| < \varepsilon$,

где $p = 1, \dots, m$, т. е. $b_1 x - x b_2 \in U$. Теорема доказана.

Пусть $\langle A, Y \rangle$ — дуальная пара и $\chi(A, Y)$ — локально выпуклая топология на A , согласованная с двойственностью $\langle A, Y \rangle$. Это значит, что пространство, топологически сопряженное к $(A, \chi(A, Y))$, совпадает с Y . Тогда имеет место

Теорема 2. Пусть A — комплексная банахова алгебра $\langle A, Y \rangle$ есть A -инвариантная дуальная пара и $\chi(A, Y)$ — локально выпуклая топология на A , согласованная с двойственностью $\langle A, Y \rangle$. Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 — такие элементы из A , что $[a_j, b_j] = 0$ и $\|e^{ia_j - ib_j}\| = o(|j|^{-1/2})$ при $|j| \rightarrow \infty$, где $j = 1, 2$. Тогда для каждой окрестности нуля U в топологии $\chi(A, Y)$ существует окрестность нуля V (в той же топологии), что из условий $x \in A, \|x\| \leq 1$ и $a_1 x - x a_2 \in V$ следует $b_1 x - x b_2 \in U$.

Доказательство. В самом деле, по теореме о биполяре (см., напр., [6], стр. 160) топология $\chi(A, Y)$, которая согласована с двойственностью $\langle A, Y \rangle$, есть топология равномерной сходимости на классе χ -равностепенно непрерывных подмножеств Y . В силу теоремы Банаха — Алаоглу этот класс состоит в точности из множеств относительно компактных в топологии $\tau(Y, A)$. Остается применить теорему 1.

Используя теорему 2 и тот факт, что пара $\langle A, A^* \rangle$ есть A -инвариантная дуальная пара, получаем

Следствие 1. Пусть A — комплексная банахова алгебра и (A, A^*) — локально выпуклая топология на A , согласованная с двойственностью $\langle A, A^* \rangle$. Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 — такие элементы из A , что $[a_j, b_j] = 0$ и $\|e^{ia_j - ib_j}\| = o(|j|^{-1/2})$ при $|j| \rightarrow \infty$, где $j = 1, 2$. Тогда для каждой окрестности нуля U в топологии $\chi(A, A^*)$ существует окрестность нуля V (в той же топологии), что из условий $x \in A, \|x\| \leq 1$ и $a_1 x - x a_2 \in V$ следует $b_1 x - x b_2 \in U$.

Замечания. 1. Так как Y — слабая топология $\tau(A, Y)$ и топология Макки $\tau(A, Y)$ согласованы с двойственностью $\langle A, Y \rangle$, теорема 2 верна, в частности, для этих топологий, которые являются крайними в классе топологий, согласованных с двойственностью, т. е. $\sigma(A, Y) \leq \chi(A, Y) \leq \tau(A, Y)$.

2. В случае, когда $Y = A^*$, топология $\tau(A, A^*)$ совпадает с исходной топологией банахова пространства на A и следствие 1 дает вышеуказанный результат из [3], который обобщает результаты Мура из [2].

3. В случае, когда $A = B(H)$ и $Y = F$, где F — пространство операторов конечного ранга, то каждый оператор $T \in F$ может быть реализован как линейный функционал на $B(H)$ и F — слабая топология, порождаемая этими функционалами, т. е. топология $\tau(B(H), F)$ есть в точности слабая операторная топология, и мы получаем результат Д. Роджерса из [4].

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $A = B(H)$. В случае, когда $Y = B(H)^*$ или $Y = J_1$, где J_1 — идеал операторов с конечным следом, Y — слабая топология, задает соответственно слабо банахову топологию и ультраслабую операторную топологию на $B(H)$.

В этих случаях U является A -инвариантным и используя теорему 2, получаем

Следствие 2. Пусть N_1 и N_2 — нормальные операторы из $B(H)$, тогда для каждой окрестности нуля U в слабо банаховой или ультраслабой операторной топологии существует окрестность нуля V (в соответствующей топологии), что из условий $T \in B(H)$, $\|T\| \leq 1$ и $N_1 T - T N_2 \in V$, следует $N_1^* T - T N_2^* \in U$.

Следствие 3. Пусть f — комплекснозначная непрерывная функция на объединении спектров нормальных операторов N_1 и N_2 из $B(H)$. Тогда для каждой окрестности нуля U в слабо банаховой (или ультраслабой операторной) топологии существует окрестность нуля V , в соответствующей топологии, что из условий $T \in B(H)$, $\|T\| \leq 1$ и $N_1 T - T N_2 \in V$, следует $f(N_1) T - T f(N_2) \in U$.

Следствие 1 позволяет, учитывая прием, принадлежащий С. Берберяну [7], получить для слабо банаховой или ультраслабой операторной топологии обобщение асимптотической теоремы Фуглида—Путнама для субнормальных операторов, как это делается в [8] для нормальных операторов.

Теорема 3. Пусть N_1 и N_2^* — субнормальные операторы из $B(H)$. Тогда для каждой окрестности нуля U в слабо банаховой (или ультраслабой операторной) топологии существует такая окрестность нуля V в соответствующей топологии, что из условия $T \in B(H)$, $\|T\| \leq 1$ и $N_1 T - T N_2^* \in V$, следует $N_2^* T - T N_1^* \in U$.

Доказательство. Нормальные расширения C_{N_1} и $C_{N_2^*}$, соответственно, операторов N_1 и N_2^* , действующих в $H \oplus H$, таких, что сужение на $H \oplus \{0\}$, соответственно, есть N_1 и N_2^* , будем искать в виде

$$C_{N_1} = \begin{pmatrix} N_1 & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix} \text{ и } C_{N_2^*} = \begin{pmatrix} N_2^* & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Определим подмножество

$$\tilde{U} = \left\{ \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} : T_k \in U, k=1, 2, 3, 4 \right\} \subset B(H \oplus H).$$

Тогда $\tilde{U}$ является окрестностью нуля в $B(H \oplus H)$ в той топологии (слабо банаховой, ультраслабой), в которой U — окрестность нуля в $B(H)$. В силу следствия 1 существует такая окрестность нуля $\tilde{V}$ на $H \oplus H$ в соответствующей топологии, что из условий $\tilde{T} \in B(H \oplus H)$, $\|\tilde{T}\| \leq 1$ и $C_{N_1} \tilde{T} - \tilde{T} C_{N_2^*}^* \in \tilde{V}$ следует $C_{N_1}^* \tilde{T} - \tilde{T} C_{N_2^*} \in \tilde{U}$.

$$\text{Определим } V = \left\{ T : \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \tilde{V} \right\}.$$

Тогда множество V — окрестность нуля в $B(H)$ в той же топологии, что $\tilde{V}$ в $B(H \oplus H)$. Пусть $T \in B(H)$ с $\|T\| \leq 1$ и $N_1 T - T N_2^* \in V$, тогда $\tilde{T} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B(H \oplus H)$, и так как

$$C_{N_1} \bar{T} - \bar{T} C_{N_2}^* = \begin{pmatrix} N_1 T - T N_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \bar{V},$$

то имеем

$$C_{N_1}^* \bar{T} - \bar{T} C_{N_2} = \begin{pmatrix} N_1^* T - T N_2^* & -N T_{12} \\ P_{12}^* \bar{T} & 0 \end{pmatrix} \in \bar{U},$$

откуда $N_1^* T - T N_2^* \in U$. Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 24.V.1983

Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆԻԱՆ. Կոմպոտատորների ասիմպտոտիկ հատկությունները բանախյան հան-
րահարկներում (ամփոփում)

Տվյալ հոդվածում ստացված է մասնավորապես հետևյալ արդյունքը: Դիցուք A -ն բանախ-
յան հանրահարկ է, $\chi(A, A^*)$ — լոկալ ուռուցիկ տոպոլոգիա է A -ի վրա, որը համաձայնեցված է
 $\langle A, A^* \rangle$ երկակիության հետ: Դիցուք a_1, a_2, b_1, b_2 — նայնսիսի տարրեր են A -ից, որ $[a_j, b_j] = 0$
և $\|e^{\lambda a_j - \lambda b_j}\| = o(|\lambda|^{-1/2})$ երբ $|\lambda| \rightarrow \infty$, որտեղ $j = 1, 2$. Այդ դեպքում գոյի կամայական U շր-
ջակայքի համար $\chi(A, A^*)$ տոպոլոգիայում գոյություն ունի այնպիսի շրջակայք V շրջակայք
(նույն տոպոլոգիայում), որ եթե $x \in A$, $\|x\| < 1$ և $a_1 x - x a_2 \in V$, ապա $b_1 x - x b_2 \in U$.

Այս արդյունքը թույլ է տալիս ստանալ Ֆուգլեդ-Պուտնամի ասիմպտոտիկ թեորեմի դա-
նազան տարրերակները նորմալ և սուբնորմալ օպերատորների համար:

M. I. KARAHANIAN. *The asymptotic properties of the Banach
algebras element's commutators (summary)*

The asymptotic properties of the commutators are proved. Let A be a complex Banach algebra and $\chi(A, A^*)$ — local convex topology on A , concordant with duality $\langle A, A^* \rangle$. Let a_1, a_2, b_1, b_2 — be such elements in A , that $[a_j, b_j] = 0$, and $\|e^{\lambda a_j - \lambda b_j}\| = o(|\lambda|^{-1/2})$ for $|\lambda| \rightarrow \infty$, where $j = 1, 2$. Then for the each neighbourhood of zero in the topology $\chi(A, A^*)$ there exists a neighbourhood V of zero (in the same topology) that from conditions $x \in A$, $\|x\| < 1$ and $a_1 x - x a_2 \in V$ follows $b_1 x - x b_2 \in U$. This result generalizes the asymptotic versions of the Fuglede and Putnam theorem about the normal and subnormal Hilbert space operator commutators.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Рудин. Функциональный анализ, М., «Мир», 1975.
2. R. Moore. An asymptotic Fuglede theorem., Proc. Amer. Math. Soc., 50, 1975. 138—148.
3. Е. А. Горин, М. И. Караханян. Асимптотический вариант теоремы Фугляда—Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр, Матем. заметки, 22, № 2, 1977, 179—189. РЖМат, 1977, 12Б911.
4. D. D. Rogers. On Fuglede's theorem and operator topologies, Proc. Amer. Math. Soc., 75, № 1, 1979, 32—36.
5. М. И. Караханян. Асимптотический вариант теоремы Фугляда—Путнама о коммутаторах линейных ограниченных операторов в сильной и слабой операторных топологиях, ДАН Арм.ССР, 78, № 5, 1981, 265—268.
6. Х. Шефер. Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971.
7. S. K. Berberian. Note on a theorem of Fuglede and Putnam., Proc. Amer. Math. Soc., 10, 1959, 175—182.
8. T. Furuta. Normality can be relaxed in the asymptotic Fuglede—Putnam theorem., Proc. Amer. Math. Soc., 79, № 4, 1980, 593—596.