ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 3, 1984 Математика

УДК 517.95

Г. Р. АЛЕКСАНДРЯН

ПАРАМЕТРИКС И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе, на примере одного модельного уравнения проводится детальное исследование распространения волнового фронта решения задачи Коши для случая, когда вырождение гиперболичности оператора имеет экспоненциальный характер.

Пусть $x \in \mathbf{R}^1$, $t \in J = [-1, 1]$. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$Pu = u_{tt} - \mu^2(t) u_{xx} - a(t) \frac{\mu^2(t)}{\Lambda(t)} u_x = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=-1} = \varphi_0(x), \quad u_t|_{t=-1} = \varphi_1(x), \tag{2}$$

где $a(t) = \begin{cases} a_1, & t > 0 \\ a_2, & t \leqslant 0 \end{cases}$, $\mu(t) = (\operatorname{sign} t)\, t^{-2} \exp(-|t|^{-1})$, a_1, a_2 — cons t. $\Lambda(t) = \exp(-|t|^{-1})$. Корректность подобной задачи была доказана в [2], где, кроме того, приводилась теорема о распространении волнового фронта решения. Однако эта теорема не давала исчерпывающего ответа на вопрос о том, как именно, в зависимости от младших коэффициентов и начальных данных, распространяется волновой фронт решения. Для случая конечной (степенной) скорости слипания характеристик (см. [1], [4], [5]) в [1] на примере задачи Коши

$$u_{tt} - t^{2k} u_{xx} - at^{k-1} u_x = 0, \quad a = \text{cons } t, \quad k \in N \tag{3}$$

$$u|_{t=-1} = \varphi_0(x), \quad u_t|_{t=-1} = \varphi_1(x), \tag{4}$$

был дан полный анализ распространения волнового фронта решения в зависимости от a и k. В настоящей работе сначала строится параметрикс задачи (1)—(2), а затем приводятся точные теоремы распространения сингулярностей как для задачи Коши (1)—(2) (линия вырождения внутри области), так и для случая, когда данные Коши задаются на самой линии вырождения $t = 0$. При этом оказывается, что в отличие от конечной скорости вырождения главной части оператора P, в рассматриваемом случае сингулярности распространяются в область $t > 0$ вдоль обеих характеристик независимо от $a(t)$, если только $u|_{t=0} \in C^\infty$ (ср. [1]). Кроме того, в работе получено точное описание потери гладкости решения и проведено сравнение полученных результатов с соответствующими оценками, полученными в [5], [6], [9].

1°. Параметрикс и распространение особенностей при $t \leqslant 0$

Обозначим преобразование Фурье $u(t, x)$ по переменной x через $\hat{u}(t, \xi)$. Когда $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1) для $\hat{u}(t, \xi)$ выполнено

$$\hat{u}_{tt} + \left(\mu^2(t)\xi^2 - ia(t)\frac{\mu^2(t)}{\Lambda(t)}\xi\right)\hat{u} = 0. \tag{5}$$

Сделаем замену неизвестной функции $\hat{u}(t, \xi) = t\hat{w}(t, \xi)$, тогда для $\hat{w}(t, \xi)$ имеем

$$\hat{w}_{tt} + \frac{2}{t}\hat{w}_t + \left(\mu^2(t)\xi^2 - ia(t)\frac{\mu^2(t)}{\Lambda(t)}\xi\right)\hat{w} = 0. \tag{6}$$

Далее, замена $\tau = \Lambda(t)\xi$ переводит (6) в уравнение

$$\hat{w}_{\tau\tau} + \frac{1}{\tau}\hat{w}_\tau + \left(1 - \frac{ia}{\tau}\right)\hat{w} = 0. \tag{7}$$

Обозначим $f(z) = e^{z/2} w\left(\frac{z}{2i}\right)$, где $z = 2i\tau$, тогда (7) перейдет в уравнение Куммера

$$zf_{zz} + (1 - z)f_z - \alpha f = 0, \alpha = \frac{1 + a(t)}{2}, \tag{8}$$

линейно независимые решения которого даются парой вырожденных гипергеометрических функций $f_1 = \Psi(\alpha, 1, z)$, $f_2 = e^z \Psi(1 - \alpha, 1, -z)$, где

$$\Psi(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} e^{-i\pi\alpha}\Gamma(1 - \alpha)\int_{-\infty e^{i\varphi}}^{(0+)} e^{-zt} t^{\alpha-1}(1 + t)^{\gamma-\alpha-1} dt, \tag{9}$$

$-\frac{\pi}{2} < \varphi + \arg z < \frac{\pi}{2}$, $\arg t = \varphi$ в начальной точке пути (см. [8]), а $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера. Пусть теперь $t \leqslant 0$, тогда имеем $\alpha = \alpha_2 = \frac{1 + a_2}{2}$, $\Lambda(t) = \exp(t^{-1})$, $\mu(t) = -t^{-2}\exp(t^{-1})$. Из линейной независимости f_1 и f_2 нетрудно видеть, что система функций

$$\hat{u}_1(t, \xi) = te^{-i\Lambda(t)\xi}\Psi(\alpha_2, 1, 2i\Lambda(t)\xi), \tag{10}$$

$$\hat{u}_2(t, \xi) = te^{i\Lambda(t)\xi}\Psi(1 - \alpha_2, 1, -2i\Lambda(t)\xi) \tag{11}$$

при $t \leqslant 0$ образует фундаментальную систему решений уравнения (5). Поэтому решение исходной задачи Коши (1)—(2) в области $-1 \leqslant t \leqslant 0$ запишется в виде

$$u(t, x) = \int\int e^{i\xi(x-y)}[p_0(t, \xi)\varphi_0(y) + p_1(t, \xi)\varphi_1(y)]\,dyd\xi, \tag{12}$$

где

$$p_0(t, \xi) = \frac{1}{W(-1, \xi)}[\hat{u}_{2t}(-1, \xi)\hat{u}_1(t, \xi) - \hat{u}_{1t}(-1, \xi)\hat{u}_2(t, \xi)], \tag{13}$$

$$p_2(t, \xi) = \frac{1}{W(-1, \xi)} [\hat{u}_1(-1, \xi)\, \hat{u}_2(t, \xi) - \hat{u}_2(-1, \xi)\, \hat{u}_1(t, \xi)], \quad (14)$$

$$W(t, \xi) = \begin{vmatrix} \hat{u}_1(t, \xi) & \hat{u}_2(t, \xi) \\ \hat{u}_{1t}(t, \xi) & \hat{u}_{2t}(t, \xi) \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Заметим, что для $\Psi(\alpha, \tilde{\gamma}, z)$ при малых $|z|$ имеет место

$$\Psi(\alpha, \tilde{\gamma}, z) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} [\ln z + \psi(\alpha) - 2\gamma] + o(|z \ln z|), \quad (16)$$

где $\psi(\alpha)$ — логарифмическая производная $\Gamma(\alpha)$, γ — постоянная Эйлера (см. [8]). Учитывая (16) и то, что $W(t, \xi)$ не зависит от t, нетрудно показать, что

$$W(t, \xi) = W(0, \xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} [\psi(\alpha) - \psi(1-\alpha) + i\varepsilon\pi] \neq 0, \quad (17)$$

где $\varepsilon = \operatorname{sign} \xi$. Для удобства введем следующие обозначения:

$$H_-(\alpha, \tilde{\gamma}, z) = e^{i\pi\alpha} \Psi(\alpha, \tilde{\gamma}, z), \quad (18)$$

$$H_+(\alpha, \tilde{\gamma}, z) = e^{i\pi(\alpha - \tilde{\gamma})} \Psi(1-\alpha, \tilde{\gamma}, -z), \quad (19)$$

$$J_\pm(\alpha, \tilde{\gamma}, z) = e^{\mp\frac{z}{2}} \frac{d}{dz} [e^{\pm\frac{z}{2}} H_\pm(\alpha, \tilde{\gamma}, z)]. \quad (20)$$

В этих обозначениях нетрудно видеть, что

$$\hat{v}_{1t}(t, \xi) = e^{-i\alpha_1 \pi} e^{-\frac{z}{2}} [H_-(\alpha_2, 1, z) - 2i\xi t^{-1} \Lambda(t) J_-(\alpha_2, 1, z)],$$
$$z = 2i\Lambda(t)\xi \quad (21)$$

$$\hat{u}_{2t}(t, \xi) = e^{i\pi(1-\alpha_2)} e^{z/2} [H_+(\alpha_2, 1, z) - 2i\xi t^{-1} \Lambda(t) J_-(\alpha_2, 1, z)],$$
$$z = 2i\Lambda(t)\xi. \quad (22)$$

Отсюда, учитывая (13), (14) и (17), легко получить следующие выражения для $p_0(t, \xi)$ и $p_1(t, \xi)$:

$$p_0(t, \xi) = \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(1-\alpha_2) e^{i\pi\alpha(1-2\alpha_2)}}{\psi(\alpha_2) - \psi(1-\alpha_2) + i\varepsilon\pi} t \{e^{-\frac{z-z_0}{2}} H_-(\alpha_2, 1, z) \times$$
$$\times [H_+(\alpha_2, 1, z_0) + z_0 J_+(\alpha_2, 1, z_0)] - e^{(z-z_0)/2} H_+(\alpha_2, 1, z_0) \times$$
$$\times [H_-(\alpha_2, 1, z_0) + z_0 J_-(\alpha_2, 1, z_0)]\}, \quad (23)$$

$$p_1(t, \xi) = \frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(1-\alpha_2) e^{i\pi\alpha(1-2\alpha_2)}}{\psi(\alpha_2) - \psi(1-\alpha_2) + i\varepsilon\pi} t [e^{-\frac{z-z_0}{2}} H_-(\alpha_2, 1, z) \times$$
$$\times H_+(\alpha_2, 1, z_0) - e^{(z-z_0/2)} H_+(\alpha_2, 1, z) H_-(\alpha_2, 1, z_0)], \quad (24)$$

$$z = 2i\Lambda(t)\xi, \; z_0 = 2i\Lambda(-1)\xi = \frac{2i\xi}{e}.$$

Заметим, что p_0, p_1 имеют особенности при $\xi=0$, однако для наших целей достаточно ограничиться областью $|\xi|>r>0$. Поэтому, учитывая (12), (23) и (24), нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Параметрикс задачи Коши* (1)—(2) *в области* $-1\leqslant t\leqslant 0$ *задается формулой*

$$u(t,\ x)=\int\int \frac{\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(1-\alpha_2)\,e^{i\pi(1-2\alpha_2)s}}{\psi(z_2)-\psi(1-\alpha_2)+i\xi\pi}\{\varphi_0(y)\,[e^{i\xi\left(x-y-\Lambda(t)+\frac{1}{e}\right)}\times$$

$$\times t\,H_-(\alpha_2,\ 1,\ z)\,(H_+(\alpha_2,\ 1,\ z_0)+z_0\,J_+(\alpha_2,\ 1,\ z_0))-$$

$$-e^{i\xi\left(x-y+\Lambda(t)-\frac{1}{e}\right)}\,t\,H_+(\alpha_2,\ 1,\ z)(H_-(\alpha_2,\ 1,\ z_0)+$$

$$+z_0\,J_-(\alpha_2,\ 1,\ z_0))]+\varphi_1(y)\,[e^{i\xi\left(x-y-\Lambda(t)+\frac{1}{e}\right)}\,t\,H_-(\alpha_2,\ 1,\ z)\times$$

$$\times H_+(\alpha_2,\ 1,\ z_0)-e^{i\xi\left(x-y+\Lambda(t)-\frac{1}{e}\right)}\,tH_+(\alpha_2,\ 1,\ z)\times$$

$$\times H_-(\alpha_2,\ 1,\ z_0)]\}\,dyd\xi\ (\mathrm{mod}\ C^\infty),\qquad(25)$$

$$z=2i\Lambda(t)\,\xi,\ z_0=\frac{2i\xi}{e},$$

Кроме того, заметим, что в силу (16) имеем

$$\lim_{t\to-0}tH_-(\alpha_2,\ 1,\ 2i\Lambda(t)\,\xi)=-\frac{e^{i\pi\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)},\qquad(26)$$

$$\lim_{t\to-0}tH_+(\alpha_2,\ 1,\ 2i\Lambda(t)\,\xi)=-\frac{e^{i\pi\alpha_2(\alpha_2-1)}}{\Gamma(1-\alpha_2)},\qquad(27)$$

поэтому из теоремы 1 легко получаем

Следствие 1. *Решение* $u(t,\ x)$ *при* $t\to-0$ *имеет вид*:

$$u(0,\ x)=-\int\int\{c_+(\alpha_2,\varepsilon)\,e^{i\xi\left(x-y+\frac{1}{e}\right)}\,[H_+(\alpha_2,\ 1,\ z_0)+$$

$$+z_0\,J_+(\alpha_2,\ 1,\ z_0)]+c_-(\alpha_2,\varepsilon)\,e^{i\xi\left(x-y-\frac{1}{e}\right)}\,|[H_-(\alpha_2,\ 1,\ z_0)+$$

$$+z_0J_-(\alpha_2,\ 1,\ z_0)]|\,\varphi_0(y)\,dyd\xi-\int\int[c_+(\alpha_2,\varepsilon)\,e^{i\xi\left(x-y+\frac{1}{e}\right)}\times$$

$$\times H_+(\alpha_2,\ 1,\ z_0)+c_-(\alpha_2,\varepsilon)\,e^{i\xi\left(x-y-\frac{1}{e}\right)}\,H_-(\alpha_2,\ 1,\ z_0)]\,\varphi_1(y)\,dyd\xi\ (\mathrm{mod}\ C^\infty),\qquad(28)$$

где

$$c_+(\alpha,\varepsilon)=\frac{\Gamma(1-\alpha)\,e^{i\pi\alpha(1-\alpha)}}{\psi(\alpha)-\psi(1-\alpha)+i\xi\pi},\quad c_-(\alpha,\varepsilon)=-\frac{\Gamma(\alpha)\,e^{-i\pi\alpha^2}}{\psi(\alpha)-\psi(1-\alpha)+i\xi\pi}.\qquad(29)$$

Далее, убедившись в законности дифференцирования асимптотики (16) продифференцируем (25) по t и устремив $t \to -0$, получим

Следствие 2. *Производная $u_t(t, x)$ при $t \to -0$ имеет вид*

$$u_t(0, x) = -\int\int |c_+(\alpha_2, \varepsilon)\varphi_0(y)[e^{i\xi\left(x-y+\frac{1}{e}\right)}(H_+(\alpha_2, 1, z_0)+$$

$$+ z_0 J_+(\alpha_2, 1, z_0))(\ln|2\xi| + d_+(\alpha_2, \varepsilon))] + c_-(\alpha_2, \varepsilon)\varphi_0(y) \times$$

$$\times [e^{i\xi\left(x-y-\frac{1}{e}\right)}(H_-(\alpha_2, 1, z_0) + z_0 J_-(\alpha_2, 1, z_0))(\ln|2\xi| + d_-(\alpha_2, \varepsilon))]\} dy d\xi -$$

$$- \int\int \{c_+(\alpha_2, \varepsilon)\varphi_1(y)[e^{i\xi\left(x-y+\frac{1}{e}\right)} H_+(\alpha_2, 1, z_0)(\ln|2\xi| + d_+(\alpha_2, \varepsilon))] +$$

$$+ c_-(\alpha_2, \varepsilon)\varphi_1(y)[e^{i\xi\left(x-y-\frac{1}{e}\right)} H_-(\alpha_2, 1, z_0)(\ln|2\xi| +$$

$$+ d_-(\alpha_2, \varepsilon))]\} dy d\xi \pmod{C^\infty}, \tag{30}$$

где

$$d_+(\alpha, \varepsilon) = \psi(\alpha) - 2\gamma + i\varepsilon\frac{\pi}{2}, \tag{31}$$

$$d_-(\alpha, \varepsilon) = \psi(1-\alpha) - 2\gamma - i\varepsilon\frac{\pi}{2}. \tag{32}$$

Заметим, что для функции $\Psi(\alpha, \tilde{\gamma}, z)$ имеет место следующее асимптотическое разложение (см. [8]):

$$\Psi(\alpha, \tilde{\gamma}, z) \sim z^{-\alpha}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(\alpha)_k(\alpha - \bar{\gamma} + 1)_k}{k!} z^{-k}\right] \tag{33}$$

при $z \to \infty$ и когда $-\frac{3\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{2}$, где $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$. Поэтому, в силу определения H_+ и H_- для них справедливы следующие асимптотические разложения:

$$H_-(\alpha, 1, z) \sim (e^{\mp i\pi} z)^{-\alpha}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(\alpha)_k^2}{k!} z^{-k}\right], \tag{34}$$

$$H_+(\alpha, 1, z) \sim z^{\alpha-1}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\alpha)_k^2}{k!} z^{-k}\right]. \tag{35}$$

Из (34) и (35) легко видеть, что при каждом фиксированном $t \neq 0$ H_+ и H_- удовлетворяют при достаточно большом $|\xi|$ следующим неравенствам:

$$|\partial_\xi^m H_+(\alpha, 1, 2i\Lambda(t)\xi)| \leqslant c_m(t) \langle\xi\rangle^{\alpha-1-m}, \tag{36}$$

$$|\partial_\xi^m H_-(\alpha, 1, 2i\Lambda(t)\xi)| \leqslant \bar{c}_m(t) \langle\xi\rangle^{-\alpha-m}. \tag{37}$$

Поэтому, $H_+(\alpha, 1, 2i\Lambda(t)\xi)$ и $H_-(\alpha, 1, 2i\Lambda(t)\xi)$ являются эллиптическими символами соответственно из классов $S^{\alpha-1}$ и $S^{-\alpha}$. Учитывая формулы дифференцирования вырожденных гипергеометрических функций

(см. [8]), нетрудно проверить, что $J_+(\alpha, 1, z_0)$ и $J_-(\alpha, 1, z_0)$ принадлежат тем же классам $S^{\alpha-1}$ и $S^{-\alpha}$. Отсюда легко видеть, что как (28), так и (25) при каждом фиксированном $t<0$ представляют собой сумму эллиптических псевдодифференциальных операторов. Далее, учитывая то, что $\Gamma(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ имеют полюсы I-го порядка в точках $\alpha=-n$, $n=0, 1, \cdots$, легко видеть, что $c_+(x_2, \xi)$ и $c_-(x_2, \xi)$ в (28) обращаются в нуль соответственно при $a_2=-2n-1$ и $a_2=2n+1$, $n=0, 1, \cdots$. Отсюда, принимая во внимание свойства эллиптических п.д.о. (см [7]), нетрудно доказать следующую теорему о распространении волнового фронта.

Теорема 2. *Волновой фронт решения задачи Коши* (1)—(2) ($WF(u(t))$) *при* $t\in[-1, 0)$ *инвариантен относительно потоков, определяемых гамильтонианами* $H_1=\tau-\mu(t)\xi$ *и* $H_2=\tau+\mu(t)\xi$. *Если* $|(x_0, \xi_0)|=WF(\varphi_0)\cup WF(\varphi_1)$, *то для* $WF(u(0))$ *возможны следующие три случая*:

а) $a_2=-2n-1$, $n=0, 1, \cdots$, *тогда* $WF(u(0))=\left\{\left(x_0+\frac{1}{e}, \xi_0\right)\right\}$,

б) $a_2=2n+1$, $n=0, 1, \cdots$, *тогда* $WF(u(0))=\left\{\left(x_0-\frac{1}{e}, \xi_0\right)\right\}$,

в) *в остальных случаях* $WF(u(0))=\left\{\left(x_0+\frac{1}{e}, \xi_0\right), \left(x_0-\frac{1}{e}, \xi_0\right)\right\}$.

Заметим, что учитывая замкнутость волнового фронта и наличие энергетических оценок образа Фурье решения (1)—(2) (см. [2]), можно, не используя явной формы параметрикса, доказать что $\left(x_0+\frac{1}{e}, \xi_0\right)$, $\left(x_0-\frac{1}{e}, \xi_0\right)\in WF(u(0))\cup WF(u_t(0))$ (см. [2]). Однако для иас особенно важно знать, когда эти точки принадлежат именно $WF(u(0))$.

2°. Параметрикс и распространение особенностей в области $t\geqslant 0$

В виду частичной гипоэллиптичности оператора P, решение задачи Коши (1)—(2) с $t=-1$ до $t=1$ эквивалентно ее решению с $t=-1$ до $t=0$ и далее с $t=0$ до $t=1$. Поэтому рассмотрим следующую задачу Коши:

$$Pv=v_{tt}-\mu^2(t)v_{xx}-a_1\frac{\mu^2(t)}{\Lambda(t)}v_x=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{38}$$

$$v|_{t=0}=\psi_0(x),\ v_t|_{t=0}=\psi_1(x). \tag{39}$$

После частичного преобразования Фурье по переменной x, (38)—(39) перейдет в задачу Коши:

$$\hat{v}_{tt}+\left(\mu^2(t)\xi^2-ia_1\frac{\mu^2(t)}{\Lambda(t)}\xi\right)\hat{v}=0, \tag{40}$$

$$\tilde{v}|_{t=0} = \tilde{\psi}_0(\xi), \quad \tilde{v}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}_1(\xi). \tag{41}$$

Проводя далее преобразования, аналогичные проделанным в 1°, легко видеть, что (40) перейдет в уравнение Куммера и поэтому функции

$$\tilde{v}_1(t, \xi) = te^{-i\Lambda(t)\xi}\Psi(\alpha_1, 1, 2i\Lambda(t)\xi), \tag{42}$$

$$\tilde{v}_2(t, \xi) = te^{i\Lambda(t)\xi}\Psi(1-\alpha_1, 1, -2i\Lambda(t)\xi), \tag{43}$$

где $\alpha_1 = \frac{1}{2}(1+\alpha_1)$, представляют собой фундаментальную систему решений (40). Поэтому, решение $v(t, x)$ запишется в виде

$$v(t, x) = \int\int e^{i\xi(x-y)}[\tilde{p}_0(t, \xi)\psi_0(y) + \tilde{p}_1(t, \xi)\psi_1(y)]\,dy\,d\xi, \tag{44}$$

где

$$\tilde{p}_0(t, \xi) = \frac{1}{W(0, \xi)}[\tilde{v}_{2t}(0, \xi)\tilde{v}_1(t, \xi) - \tilde{v}_{1t}(0, \xi)\tilde{v}_2(t, \xi)], \tag{45}$$

$$\tilde{p}_1(t, \xi) = \frac{1}{W(0, \xi)}[\tilde{v}_1(0, \xi)\tilde{v}_2(t, \xi) - \tilde{v}_2(0, \xi)\tilde{v}_1(t, \xi)]. \tag{46}$$

Дифференцируя (42) и (43) по t, получаем

$$\tilde{v}_{1t}(t, \xi) = e^{-i\Lambda(t)\xi}(1 - t^{-1}\Lambda(t))\Psi(\alpha_1, 1, 2i\Lambda(t)\xi) + \\ + e^{-i\Lambda(t)\xi}2i\xi t^{-1}\Lambda(t)\Psi_z(\alpha_1, 1, 2i\Lambda(t)\xi), \tag{47}$$

$$\tilde{v}_{2t}(t, \xi) = e^{i\Lambda(t)\xi}(1 + t^{-1}\Lambda(t))\Psi(1-\alpha_1, 1, -2i\Lambda(t)\xi) - \\ - 2i\xi t^{-1}\Lambda(t)e^{i\Lambda(t)\xi}\Psi_z(1-\alpha_1, 1, -2i\Lambda(t)\xi). \tag{48}$$

Далее, учитывая асимптотику (16) и законность ее дифференцирования, из (47) и (48) легко получаем

$$\tilde{v}_{1t}(0, \xi) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\left[\ln|2\xi| + i\varepsilon\frac{\pi}{2} + \psi(\alpha_1) - 2\gamma\right], \tag{49}$$

$$\tilde{v}_{2t}(0, \xi) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}\left[\ln|2\xi| - i\varepsilon\frac{\pi}{2} + \psi(1-\alpha_1) - 2\gamma\right], \tag{50}$$

$$\tilde{v}_1(0, \xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}, \quad \tilde{v}_2(0, \xi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}. \tag{51}$$

Поэтому из (49)—(51) и (45), (46) для $\tilde{p}_0(t, \xi)$ и $\tilde{p}_1(t, \xi)$ имеем:

$$\tilde{p}_0(t, \xi) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_1)}{\psi(\alpha_1) - \psi(1-\alpha_1) + i\varepsilon\pi}\left\{-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}\left[\ln|2\xi| - i\varepsilon\frac{\pi}{2} + \right.\right. \\ \left. + \psi(1-\alpha_1) - 2\gamma\right]te^{-i\Lambda(t)\xi}\Psi(\alpha_1, 1, z) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\left[\ln|2\xi| + i\varepsilon\frac{\pi}{2} + \right. \\ \left.\left. + \psi(\alpha_1) - 2\gamma\right]te^{i\Lambda(t)\xi}\Psi(1-\alpha_1, 1, -z)\right\}, \tag{52}$$

$$\overline{p}_1(t,\xi)=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_1)}{\psi(\alpha_1)-\psi(1-\alpha_1)+i\varepsilon\pi}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}te^{i\Lambda(t)\xi}\Psi(1-\alpha_1,1,-z)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}te^{-i\Lambda(t)\xi}\Psi(\alpha_1,1,z)\right], \tag{53}$$

где $z=2i\Lambda(t)\xi$, $\varepsilon=\operatorname{sign}\xi$. Таким образом, учитывая (44) и (52), (53) нетрудно проверить, что верна следующая

Теорема 3. *Параметрикс задачи Коши* (38)—(39) *задается формулой*:

$$v(t,x)=\iint c_-(\alpha_1,\varepsilon)\,e^{i\xi(x-y-\Lambda(t))t}\ln|2\xi|\,H_-(\alpha_1,1,2i\Lambda(t)\xi)\times$$

$$\times\psi_0(y)\,dyd\xi+\iint c_-(\alpha_1,\varepsilon)\,d_-(\alpha_1,\varepsilon)\,e^{i\xi(x-y-\Lambda(t))}\,tH_-(\alpha_1,1,2i\Lambda(t)\xi)\times$$

$$\times\psi_0(y)\,dyd\xi+\iint c_-(\alpha_1,\varepsilon)\,e^{i\xi(x-y-\Lambda(t))}\,tH_-(\alpha_1,1,2i\Lambda(t)\xi)\times$$

$$\times\psi_1(y)\,dyd\xi+\iint c_+(\alpha_1,\varepsilon)\,e^{i\xi(x-y+\Lambda(t))}\,t\ln|2\xi|\,H_+(\alpha_1,$$

$$1,2i\Lambda(t)\xi)\psi_0(y)\,dyd\xi+\iint c_+(\alpha_1,\varepsilon)\,d_+(\alpha_1,\varepsilon)\,e^{i\xi(x-y+\Lambda(t))}\times$$

$$\times tH_+(\alpha_1,,1\ 2i\Lambda(t)\xi)\,\psi_0\,dyd\xi+\iint c_+(\alpha_1,\varepsilon)\times$$

$$\times e^{i\xi(x-y+\Lambda(t))}\,tH_+(\alpha_1,1,2i\Lambda(t)\xi)\,\psi_1(y)\,dyd\xi\ (\mathrm{mod}\ C^\infty), \tag{54}$$

где $c_\pm$, $d_\pm$ *определяются выражениями* (29), (31), (32).

Учитывая (54) и эллиптичность символов $H_\pm(\alpha,1,2i\Lambda(t)\xi)$, мы сразу можем, для случая $\psi_0(x)\in C^\infty$ описать распространение сингулярностей $v(t,x)$, а именно справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть* $WF(\psi_1)=\{y_0,\eta_0)\}$, $\psi_0(x)\in C^\infty$, *тогда*: а) *если* $\alpha_1=-2n-1$, $n=0,1,\cdots$, *т. е.* $c_+(\alpha_1,\varepsilon)=0$, *то* $WF(v(t))=$ $=\{(y_0+\Lambda(t),\eta_0)\ |t\geqslant 0\}=\widetilde{\Gamma}_+(y_0,\eta_0)$, б) *если* $\alpha_1=2n+1$, $n=0,1,\cdots$, *т. е.* $c_-(\alpha_1,\varepsilon)=0$, *то* $WF(v(t))=\{(y_0-\Lambda(t),\eta_0)\ |t\geqslant 0\}=\overline{\Gamma}_-(y_0,\eta_0)$, в) *для остальных* α_1 $WF(v(t))=\overline{\Gamma}_+(y_0,\eta_0)\cup\overline{\Gamma}_-(y_0,\eta_0)$.

Для исследования параметрикса (54) рассмотрим следующий оператор:

$$Au(x)=\iint e^{i\xi(x-y)}\,a(\xi)\ln|\xi|\,u(y)\,dyd\xi, \tag{55}$$

где $a(\xi)$—классический эллиптический символ из класса S^m. Заметим, что A не является эллиптическим псевдодифференциальным оператором, поскольку его главный символ в обычном понимании равен 0. Одна-

ко, проводя конструкцию доказальства теоремы о распространении волнового фронта для интегральных операторов Фурье (см. [7]), нетрудно доказать, что $WF(Au) \subset WF(v)$. Далее, замечая, что аналогичное включение можно доказать и для оператора

$$Bv(z) = \int\int e^{i\eta_1(x-t)} \frac{1}{\ln|\eta_1|\, a(\eta_1)} v(t)\, dt d\eta \tag{56}$$

и то, что $B = A^{-1} + R$, где $S^{-\infty} \ni R$ — сглаживающий оператор, сразу получаем, что $WF(v) = WF(Au)$. Таким образом, каждое слагаемое в (54) ведет себя как эллиптический п.д.о., поэтому нетрудно проверить справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $|(y_0, \eta_{i0})| = WF(\psi_0) \cup WF(\psi_1)$. *Тогда*: 1) *если* $\psi_0 \in C^\infty$, *то* $WF(v(t)) = \widetilde{\Gamma}_+(y_0, \eta_{i0}) \cup \widetilde{\Gamma}_-(y_0, \eta_{i0})$, 2) *если* $\psi_0(x) \in C^\infty$, *то* $WF(v(t))$ *описывается теоремой 4.*

Таким образом, в отличие от конечной скорости слипания характеристик, в рассматриваемом случае особенности распространяются вдоль обеих характеристик для любой постоянной a_1, если только $\psi_0(x) \in C^\infty$.

3°. Параметрикс и распространение волнового фронта при $-1 \leqslant t \leqslant 1$

Комбинируя результаты теоремы 3 и следствий 1, 2, т. е. подставляя (28) и (30) в (54), легко получаем выражение параметрикса задачи (1)—(2) в области $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Теорема 6. *Параметрикс задачи Коши* (1)—(2) *при* $t \geqslant 0$ *задается формулой*:

$$u(t, x) = -\int c_-(\alpha_1, \varepsilon)\, e^{i\xi(x-y-\lambda(t))}\, tH_-(\alpha_1, 1, z)(\ln|2\xi| + d_-(\alpha_1, \varepsilon)) \times$$

$$\times |c_+(\alpha_2, \varepsilon')\, e^{i\xi'\left(y-\eta+\frac{1}{e}\right)} [H_+(\alpha_2, 1, z_0') + z_0' J_+(\alpha_2, 1, z_0')] \varphi_0(\eta) + c_-(\alpha_2, \varepsilon') \times$$

$$\times e^{i\xi'\left(y-\eta_1-\frac{1}{e}\right)} [H_-(\alpha_2, 1, z_0') + z_0' J_-(\alpha_2, 1, z_0')] \varphi_0(\eta) + c_+(\varepsilon_2, \varepsilon')\, e^{i\xi'\left(y-\eta+\frac{1}{e}\right)} \times$$

$$\times H_+(\alpha_2, 1, z_0')\, \varphi_1(\eta_1) + c_-(\alpha_2, \varepsilon')\, e^{i\xi'\left(y-\eta_1-\frac{1}{e}\right)} H_-(\alpha_2, 1, z_0')\, \varphi_1(\eta)|\, d\eta d\xi' dy d\xi -$$

$$- \int [c_-(\alpha_1, \varepsilon)\, e^{i\xi(x-y-\lambda(t))}\, tH_-(\alpha_1, 1, z) + c_+(\alpha_1, \varepsilon)\, e^{i\xi(x-y+\lambda(t))} t \times$$

$$\times H_+(\alpha_1, 1, z)] \{c_+(\alpha_2, \varepsilon')\, \varphi_0(\eta) [e^{i\xi'\left(y-\eta+\frac{1}{e}\right)} (H_+(\alpha_2, 1, z_0') +$$

$$+ z_0' J_+(\alpha_2, 1, z_0'))(\ln|2\xi'| + d_+(\alpha_2, \varepsilon'))] + c_-(\alpha_2, \varepsilon')\, \varphi_0(\eta) \times$$

$$\times |e^{i\xi'\left(y-\eta_1-\frac{1}{e}\right)} (H_-(\alpha_2, 1, z_0') + z_0' J_-(\alpha_2, 1, z_0'))(\ln|2\xi'| + d_-(\alpha_2, \varepsilon'))] +$$

$$+c_+(\alpha_2,\varepsilon')\varphi_1(\eta)[e^{i\xi'\left(y-\eta+\frac{1}{e}\right)}H_+(\alpha_2,1,z_0')(\ln|2\xi'|+d_+(\alpha_2,\varepsilon'))]-$$

$$-c_-(\alpha_2,\varepsilon')\varphi_1(\eta)[e^{i\xi'\left(y-\eta-\frac{1}{e}\right)}H_-(\alpha_2,1,z_0')(\ln|2\xi'|+d_-(\alpha_2,\varepsilon'))]]\,d\eta d\xi' dy\,d\xi -$$

$$-\int[c_+(\alpha_1,\varepsilon)e^{i\xi(\tau-y+\Lambda(t))}tH_+(\alpha_1,1,z)(\ln|2\xi|+d_+(\alpha_1,\varepsilon))]\times$$

$$\times\{c_+(\alpha_2,\varepsilon')e^{i\xi'\left(y-\eta+\frac{1}{e}\right)}[H_+(\alpha_2,1,z_0')+z_0'J_+(\alpha_2,1,z_0')]\varphi_0(\eta)+$$

$$+c_-(\alpha_2,\varepsilon')e^{i\xi'\left(y-\eta-\frac{1}{e}\right)}[H_-(\alpha_2,1,z_0')+z_0'J_-(\alpha_2,1,z_0')]\varphi_0(\eta)+$$

$$+c_+(\alpha_2,\varepsilon')e^{i\xi'\left(y-\eta+\frac{1}{e}\right)}H_+(\alpha_2,1,z_0')\varphi_1(\eta)+c_-(\alpha_2,\varepsilon')\times$$

$$\times e^{i\xi'\left(y-\eta-\frac{1}{e}\right)}H_-(\alpha_2,1,z_0')\varphi_1(\eta)]\,d\eta\,d\xi'\,dyd\xi\ (\mathrm{mod}\ C^\infty),\qquad(57)$$

где $z=2i\Lambda(t)\xi$, $z_0'=\dfrac{2i\xi'}{e}$. *При* $t<0$ *параметрикс задается формулой* (25).

Для получения описания волнового фронта решения задачи Коши при $-1\leqslant t\leqslant 1$ достаточно теперь применить последовательно теоремы 2 и 5. Но прежде, для простоты введем следующие обозначения:

$$\Gamma_\pm(x_0,\xi_0)=\left\{\left(x_t\mp\left(\Lambda(t)-\frac{1}{e}\right),\ \xi_0\right)\Big|t\in|-1,\ 0)\right\},$$

$$\widetilde{\Gamma}_\pm(y_0,\eta_0)=\{(y_0\pm\Lambda(t),\ \eta_0)\ |t\in[0,\ 1]\}.$$

Теорема 7. *Пусть* $|(x_0,\xi_0)|=WF(\varphi_0)\cup WF(\varphi_1)$, *тогда*: а) *если* $\alpha_2\neq\pm(2n+1)$, $n=0,1,\cdots$, *то* $WF(u(t))=\Gamma_+(x_0,\xi_0)\cup\Gamma_-(x_0,\xi_0)\cup$ $\cup\widetilde{\Gamma}_\pm\left(x_0+\frac{1}{e},\xi_0\right)\cup\widetilde{\Gamma}_\pm\left(x_0-\frac{1}{e},\xi_0\right)$, б) *если* $\alpha_2=-2n-1$ *и при этом* $\alpha_1=-2k-1$, $k=0,1,\cdots$, *то*

$$WF(u(t))=\Gamma_+(x_0,\xi_0)\cup\Gamma_-(x_0,\xi_0)\cup\widetilde{\Gamma}_\pm\left(x_0+\frac{1}{e},\xi_0\right)\cup$$

$$\cup\widetilde{\Gamma}_+\left(x_0-\frac{1}{e},\xi_0\right),$$

б)$_2$ *если* $\alpha_2=-2n-1$ *и при этом* $\alpha_1=2k+1$, $k=0,1,\cdots$, *то*

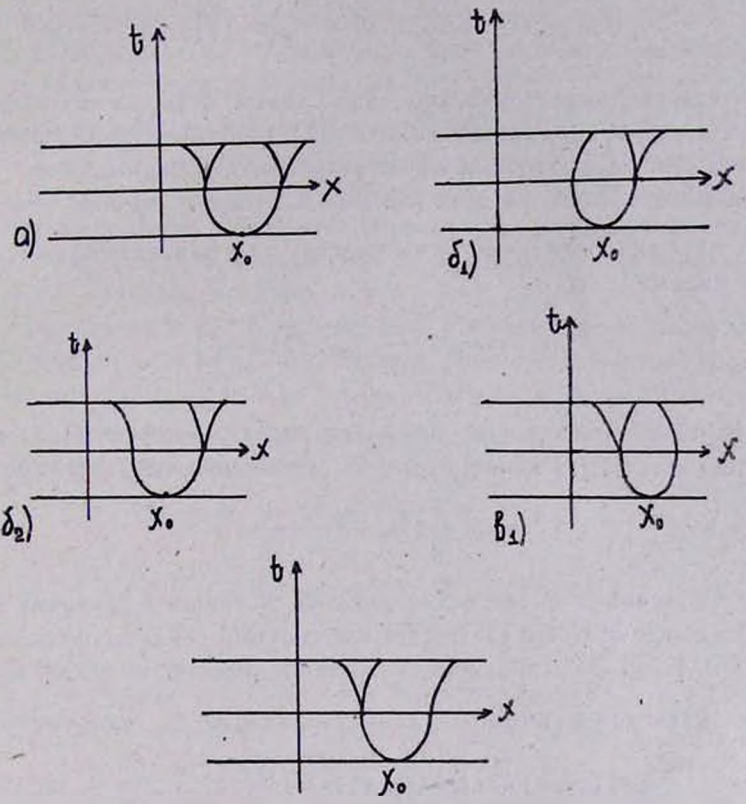
$$WF(u(t))=\Gamma_+(x_0,\xi_0)\cup\Gamma_-(x_0,\xi_0)\cup\widetilde{\Gamma}_\pm\left(x_0+\frac{1}{e},\xi_0\right)\cup\widetilde{\Gamma}_-\left(x_0-\frac{1}{e},\xi_0\right),$$

в)$_1$ *если* $\alpha_2=2n+1$, $n=0,1,\cdots$ *и при этом* $\alpha_1=2k+1$. $k=0,1,\cdots$, *то*

$$WF(u(t))=\Gamma_+(x_0,\xi_0)\cup\Gamma_-(x_0,\xi_0)\cup\widetilde{\Gamma}_\pm\left(x_0-\frac{1}{e},\xi_0\right)\cup\Gamma_-\left(x_0+\frac{1}{e},\xi_0\right),$$

B_2) *если* $a_2=2n+1$, $n=0, 1, \cdots$ *и при этом* $a_1=-2k-1$, $k=0, 1, \cdots, m$

$$WF(u(t)) = \Gamma_+(x_0, \xi_0) \cup \Gamma_-(x_0, \xi_0) \cup \overline{\Gamma}_{\pm}\left(x_0 - \frac{1}{e}, \xi_0\right) \cup \widetilde{\Gamma}_{+}\left(x_0 + \frac{1}{e}, \xi_0\right).$$



4°. Пространства корректности задачи Коши

В работе Алиньяка [5] рассматривается задача Коши, аналогичная (38)—(39), но с $\mu(t)=t^{l}$. В этом случае доказывается, что решение $v(t, x)$ представимо в виде $v=N_1\psi_0 + M_1\psi_1$, где N_1 и M_1 — непрерывные операторы, обладающие следующими свойствами:

$$N_1 ; H_s \to C_t^r(J_0; H_{s-n_1(l)-r}), \tag{58}$$

$$M_1 : H_s \to C_t^r(J_0; H_{s-m_1(l)-r}), \tag{59}$$

где через $C_t^r(J_0; H_s)$ обозначен класс r-раз непрерывно дифференцируемых отображений из $J_0=[0,1]$ в H_s, а

$$n_1(l) = \sup\left(0, -\frac{1}{2} l (l+1)^{-1} + \frac{1}{2}(l+1)^{-1} |a_1 \mu^2(t) (\Lambda(t))^{-1} t^{1-l}|\right), \tag{60}$$

$$m_1(l) = n(l) - (l+1)^{-1}. \tag{61}$$

Заметим, что рассматриваемый нами случай бесконечной (экспоненциальной) скорости слипания характеристик формально соответствует тому, что $l \to \infty$. Тогда в силу (60), (61) потери гладкости, соответствующие N_1 и M_1, будут стремиться к следующему:

$$n_1(l),\ m_1(l) \underset{l\to\infty}{\to} \sup\left(0, \frac{1}{2}(|a_1|-1)\right). \tag{62}$$

Однако, как это будет показано ниже, таким образом полученная потеря гладкости не учитывает некоторой дополнительной потери, возникающей при рассмотрении экспоненциального вырождения главной части оператора P. В работах [3], [9] получены оценки сверху для индекса корректности $\tilde{m}$ и, в частности, для задачи (38)—(39), согласно [9], имеем:

$$\tilde{m} \leqslant \max\left\{1, \frac{1}{2}(a_1-1)+\frac{3}{2}\right\}. \tag{63}$$

В [6] получены оценки снизу для индекса корректности $\hat{m}$ и, применяя результаты [6] к оператору P, легко получить оценку:

$$\hat{m} \geqslant \frac{1}{2}(|a_1|-1)-\frac{1}{2}. \tag{64}$$

Для получения более естественного и точного описания потери гладкости в задаче Коши (38)—(39), рассмотрим следующие пространства $B_{p,k}$ (см. [10]). Это пространства распределений w таких, что образ Фурье $\hat{w}$ является функцией, удовлетворяющей следующему условию

$$\|w\|_{p,k} = \left(\frac{1}{2\pi}\int |k(\xi)\,\hat{w}(\xi)|^p\,d\xi\right)^{1/p} < \infty, \tag{65}$$

где $k(\xi)$ — медленно растущая весовая функция, т. е. $k(\xi) > 0$ и существует положительная постоянная C такая, что

$$k(\xi+\eta) \leqslant (1+C|\xi|)^N k(\eta) \tag{66}$$

для некоторого $N \in \mathbf{Z}^+$.

Теперь, используя теорему 3, нетрудно описать потерю гладкости в задаче (38)—(39), а именно справедливо следующее

Предложение 1. *Решение задачи Коши* (38)—(39) *представимо в виде* $v = N\psi_0 + M\psi_1$, *причем* N, M — *непрерывные операторы, действующие в следующих пространствах*:

$$N: H_s \to C_t^r([0,1],\ B_{2,k_1}), \tag{67}$$

$$M: H_s \to C_t^r([0,1],\ H_{s-r-\tilde{m}_1}) \tag{68}$$

для любого $s \in \mathbf{R}^1$ *и* $r \in \mathbf{Z}^+$, *где*

$$k_1 = k_1(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(s-\tilde{m}_1-r)}(1+\ln(1+|\xi|)), \tag{69}$$

$$\tilde{m}_1 = \max\left(0, \frac{1}{2}(|a_1| - 1)\right). \tag{70}$$

Таким образом, это предложение показывает неправомерность предельного перехода (62) для вычисления потери гладкости в задаче (38)—(39), если $\varphi_0(x) \in C^\infty$ и необходимость рассмотрения в пространствах $B_{p,k}$ задачи Коши для таких операторов.

Рассмотрим теперь задачу Коши (1)—(2) при $-1 \leqslant t \leqslant 0$. Заметим, что в силу (25) нетрудно проверить, что при $t < 0$ потери гладкости нет вообще, и это связано с тем, что в области $t < 0$ оператор P строго гиперболичен. Гладкость теряется по достижении линии вырождения $t = 0$. Используя следствия 1, 2 нетрудно проверить справедливость следующего предложения.

Предложение 2. *Существуют такие операторы P_i, Q_i $(i = 1, 2)$, что $u(0, x)$ и $u_t(0, x)$ могут быть записаны соответственно, в виде $u(0, x) = P_1\varphi_0 + Q_1\varphi_1$, $u_t(0, x) = P_2\varphi_0 + Q_2\varphi_1$, причем P_i, Q_i $(i = 1, 2)$ — непрерывные линейные операторы, действующие в следующих пространствах*:

$$P_1: H_s \to H_{s - \tilde{m}_2'}, \quad Q_1: H_s \to H_{s - \tilde{m}_1'}, \tag{71}$$

$$P_2: H_s \to B_{2, k_2'}, \quad Q_2: H_s \to B_{2, k_1'}, \tag{72}$$

где

$$\tilde{m}_1' = \max\left\{0, \frac{1}{2}(|a_2| - 1)\right\}, \quad \tilde{m}_2' = \frac{1}{2}(|a_2| + 1). \tag{73}$$

$$k_i' = k_i'(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}\left(s - \tilde{m}_i'\right)}(1 + \ln(1 + |\xi|)) \quad (i = 1, 2). \tag{74}$$

Что же касается потери гладкости в (1)—(2) при $-1 \leqslant t \leqslant 1$, то она складывается из потерь гладкости, возникающих при решении (1)—(2) от $t = -1$ до $t = 0$ и далее от $t = 0$ до $t = 1$, описываемые предложениями 1 и 2.

В заключение выражаю искреннюю признательность А. Б. Нерсесяну, обратившему мое внимание на уравнение (1) и К. А. Ягджяну за полезные обсуждения.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15.VI.1983

Գ. Ռ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ. Մի մոդելային հավասարման Կոշու խնդրի պարամետրիկսը և լուծման ալիքային ճակատը (*ամփոփում*)

Աշխատանքում կառուցված է մի մոդելային հիպերբոլական հավասարման պարամետրիկսը այն դեպքում, երբ բնութագրիչների շոշափումը ունի էքսպոնենցիալ բնույթ և այնուհետև բերված են ալիքային ճակատի տարածման ճշգրիտ թեորեմներ։

Պարզվում է, որ ի տարբերություն [1]-ում դիտարկված դեպքից, եզակիությունները այստեղ միշտ էլ տարածվում են դեպի $t>0$ տիրույթը երկու բնութագրիչների երկայնությամբ անկախ a-ի արժեքից։ Բացի այդ ստացված է ողորկության կորուստի ճշգրիտ նկարագրությունը և նրա համեմատումը [5], [6], [9]-ում բերված գնահատականների հետ։

G. R. ALEXANDRIAN. *Parametrix and propagation of the wave front to a Cauchy problem for a model hyperbolic equation* (summary)

The paper investigates a weakly hyperbolic equation with exponentional degeneration of hyperbolicity. First the parametrix of the Cauchy problem is constructed and some theorems on propagation of the wave front are proved. In contrast to the case investigated in [1] here the singularities propagats into domain $t > 0$ along both characteristics for any α. Besides that, exact description of the loss of regularity is given. The results are compared with those of [5], [6], [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. Tanıguchi, Y. Tozaki.* A hyperbolic equation with double characteristics which has a solution with branching singularities, Math. Japonica, 25, № 3, 1980, 279—300.
2. *Г. Р. Александрян, К. А. Ягджян.* Условия корректности задачи Коши и распространение особенностей решений уравнений с кратными характеристиками, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 18, № 2, 1983, 134—149.
3. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм. ССР ,«Математика», 3, № 2, 1968, 79—100.
4. *O. A. Oleinik.* On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Commum, Pure Appl. Math., 23, № 6, 1979, 359—386.
5. *S. Alinhac.* Parametrix et propogation des singularites pour on problem de Cauchy a multiplicite variable Asterisque, 34—35, 1976, 3—36.
6. *T. Mandai.* On energy inequalities and regularity of solutions to weakly hyperbolic Cauchy problems, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 18, 1982, 607—660.
7. *M. Taylor.* Pseudodifferential operators, Princeton Mathematical Series, 34, 1981.
8. *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции, 1, «Наука», 1973.
9. *Г. Р. Оганесян.* Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений с коэффициентами, зависящими только от временной переменной, Изв.. АН Арм.ССР, «Математика», 16, № 4, 1981, 301—331.
10. *Л. Хёрмандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», 1965.