ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIX, № 3, 1984 Математика

УДК 517.53

С. Г. РАФАЕЛЯН

БАЗИСНОСТЬ НЕКОТОРЫХ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ В $L^2(-\sigma, \sigma)$ С ВЕСОМ

В основополагающем исследовании М. М. Джрбашяна [1] и в цикле его дальнейших исследований, подытоженных в монографии [2], была построена теория гармонического анализа для системы лучей комплексной плоскости, обобщающая классическую теорию Фурье-Планшереля. Основой для этого послужили замечательные асимптотические свойства целой функции типа Миттаг—Леффлера

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}\quad(\rho>0,\ -\infty<\mu<+\infty)$$

порядка ρ и типа $\sigma=1$.

В данной статье получен ряд новых результатов о базисности систем функций типа Миттаг-Леффлера, ассоциированных с последовательностями нулей целых функций определенного класса (обобщающего класс целых функций типа синуса). Эти результаты являются дискретными аналогами интегральных преобразований М. М. Джрбашяна с ядрами $E_1(z;\mu)$.

Обозначим через $W_\sigma^{p,\omega}$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1,\ \sigma>0)$ пространство целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant\sigma$ с нормой

$$\|f\|_{p,\omega}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p|x|^\omega\,dx\right\}^{1/p}<+\infty.$$

Классы функций $W_\sigma^{2,\omega}$ и более общие классы были введены М. М. Джрбашяном [3] (см. также [2], гл. VI) и установлена следующая теорема о параметрическом представлении, которая в специальном случае содержит в себе теорему Винера-Пэли.

Теорема А. *Класс $W_\sigma^{2,\omega}$ $(-1<\omega<1,\ \sigma>0)$ совпадает с классом функций, допускающих представление вида*

$$f(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}E_1(izx;\mu)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $\mu=1+\frac{\omega}{2}$ *и* $\varphi(x)\in L^{2,-\omega}(-\sigma,\sigma)$.

Другие представления функций класса в виде интерполяционных разложений были установлены в наших работах [4]—[6].

Чтобы сформулировать основной результат статьи [6] приведем некоторые определения.

Обозначим через $S_\varkappa$ $(-1<\varkappa<1)$ класс целых функций $S(z)$ экспоненциального типа $\leqslant\sigma$ и таких, что при некоторых положительных константах c, C и K (зависящих от функции $S(z)$) выполняются неравенства вида

$$0<c<|S(z)\,z^{-\varkappa}|\,e^{-\sigma|\operatorname{Im} z|}<C<+\infty$$

при $|\operatorname{Im} z|>K$ и $\inf\limits_{z_k\neq z_j}|z_k-z_j|>0$, где $\{z_k\}$ — последовательность нулей функции $S(z)$.

Отметим, что класс целых функций типа синуса Б. Я. Левина ([7], [8])—это подкласс тех функций из S_0, которые не имеют кратных нулей.

Пользуясь методом М. М. Джрбашяна построения биортогональных систем (см., например, [9]), восходящем к давним его работам, совместным с А. Б. Нерсесяном [10], приведем, далее, построение одной системы функций, ассоциированной с функцией $S(z)\in S_\varkappa$ и с ее нулями.

Пусть $S(z)\in S_\varkappa$ и $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность ее корней, перенумерованных в порядке неубывания их модулей. Обозначим через $s_k\geqslant 1$ и $p_k\geqslant 1$ $(k\geqslant 0)$ кратности появления числа z_k соответственно на отрезке $\{z_j\}_0^k$ и во всей последовательности $\{z_j\}_0^\infty$. Очевидно, что $1\leqslant s_k\leqslant p_k<+\infty$.

Положим

$$a_j(z_k)=\frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{dz^j}\,\frac{(z-z_k)^{p_k}}{S(z)}\right\}_{z=z_k}$$

и введем в рассмотрение целые функции

$$\Omega_k(z)=\frac{S(z)}{(s_k-1)!\,(z-z_k)^{p_k-s_k+1}}\sum_{j=0}^{p_k-s_k}a_j(z_k)(z-z_k)^j.$$

Если z_{k_0} является простым нулем функции $S(z)$, то $s_{k_0}=p_{k_0}=1$, $a_0(z_{k_0})=\dfrac{1}{S'(z_{k_0})}$ и, следовательно,

$$\Omega_{k_0}(z)=\frac{S(z)}{S'(z_{k_0})(z-z_{k_0})}.$$

Справедливы следующие утверждения [6]:

1) $\Omega_k^{(s_j-1)}(z_j)=\delta_{k,j}\,(k,j\geqslant 0)$

2) Если $2\varkappa+\omega<1$, то $\Omega_k(z)\in W_\sigma^{2;\omega}$.

В данной работе мы используем следующий результат, который является частным случаем, установленным в работе автора [6] теоремы 3.4.

Теорема В. *Пусть* $\{z_k\}_0^\infty$ — *нули функции* $S(z)\in S_\varkappa$, *где* $-1<2\varkappa+\omega<1$ $(-1<\omega<1)$. *Тогда система функций*

$$\{(1+|z_k|)^{-\omega/2}\Omega_k(z)\}_0^\infty = \{\Phi_k(z)\}_0^\infty$$

образует базис Рисса в пространстве $W_\sigma^{2,\omega}$, *т. е. всякая функция* $f(z)\in W_\sigma^{2,\omega}$ *разлагается в ряд*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\,\Phi_k(z),\quad c_k(f)=f^{(s_k-1)}(z_k)(1+|z_k|)^{\omega},$$

сходящийся в $W_\sigma^{2,\omega}$, *и*

$$\|f\|_{2,\omega}\asymp\|\{c_k\}\|_{l^2}.$$

§ 1. Базисность систем функций типа Миттаг-Леффлера

Пусть $\sigma>0$, $-1<\omega<1$ и $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность нулей некоторой функции $S(z)\in S_\varkappa$, перенумерованная как обычно. Обозначим через $s_k\geqslant 1$ кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$.

Обозначим $L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$ — класс всех измеримых функций в $(-\sigma,\sigma)$ с нормой

$$\|f\|_{L^{2,\omega}}\equiv\left\{\int_{-\sigma}^{\sigma}|f(x)|^2|x|^{\omega}\,dx\right\}^{1/2}<+\infty.$$

Теорема 1.1 *Система функций*

$$\{(1+|z_k|)^{\omega/2}E_1^{(s_k-1)}(iz_k x;\mu)(ix)^{s_k-1}\}_0^\infty\equiv\{G_k(x)\}_0^\infty, \tag{1.1}$$

где $\mu=1+\dfrac{\omega}{2}$ *и* $-1<\omega+2\varkappa<1$ *является базисом Рисса в пространстве* $L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$, *т. е. любая функция* $f(x)\in L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$ *единственным образом разлагается в ряд*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\,G_k(x), \tag{1.2}$$

сходящийся по норме пространства $L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$, *и*

$$\|f\|_{L^{2,\omega}}\asymp\|\{c_k\}\|_{l_2}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Как уже было доказано выше, если $2\varkappa+\omega<1$, то

$$\Phi_k(z)=(1+|z_k|)^{-\omega/2}\Omega_k(z)\in W_\sigma^{2,\omega}\ (0\leqslant k<+\infty).$$

Следовательно, по теореме А. М. М. Джрбашяна существует система функций $\{\varphi_k(x)\}_0^\infty$, $\varphi_k(x)\in L^{2,-\omega}(-\sigma,\sigma)$ такая, что

$$\Phi_k(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}E_1(izx;\mu)\,\varphi_k(x)\,dx, \tag{1.4}$$

где $\mu=1+\dfrac{\omega}{2}$ и каждая функция $\varphi_k(x)$ определяется единственным образом по $\Phi_k(z)$.

После (s_j-1)-кратного дифференцирования по z из (1.4) получим

$$\Phi_k^{(s_j-1)}(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma} E_1^{(s_j-1)}(izx;\,\mu)(ix)^{s_j-1}\,\varphi_k(x)\,dx=$$

$$=(1+|z_j|)^{-\omega/2}\int_{-\sigma}^{\sigma} G_j(x)\,\varphi_k(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Так как функция $\Omega_k(z)$ обладает интерполяционными свойствами $\Omega_k^{(s_j-1)}(z_j)=\delta_{k,\,j}$, то

$$\Phi_k^{(s_j-1)}(z_j)=(1+|z_j|)^{-\omega/2}\,\delta_{k,\,j}.$$

Отсюда и из (1.5) получаем

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} G_j(x)\,\varphi_k(x)\,dx=\delta_{k,\,j}$$

и, следовательно, система функций $\{\varphi_k(x)\}_0^\infty$ образует с последовательностью $\{G_k(x)\}_0^\infty$ биортогональную систему.

Из теоремы А следует, что оператор

$$C\varphi=\int_{-\sigma}^{\sigma} E_1(izx;\,\mu)\,\varphi(x)\,dx,\quad \mu=1+\frac{\omega}{2}$$

отображает $L^{2,-\omega}$ на $W_\sigma^{2,\omega}$, а из теоремы 4.3 монографии [2] следует ограниченность оператора C.

С другой стороны, система функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ образует базис Рисса в $W_\sigma^{2,\omega}$. Следовательно, система функций $\{\varphi_k(x)\}_0^\infty$ также является базисом Рисса в пространстве $L^{2,-\omega}(-\sigma,\sigma)$. Так как эта система функций биортогональна с системой (1.1), то система (1.1) также образует базис Рисса в $L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$ (см. [11]). Поэтому, если $f\in L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$ и в метрике $L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$

$$f(x)=\sum_0^\infty c_k(f)\,G_k(x),$$

где

$$c_k(f)=\int_{-\sigma}^{\sigma} f(x)\,G_k(x)\,dx,\quad k=0,\,1,\,2,\cdots,$$

то

$$\|f\|_{L^{2,\omega}}\asymp\|\{c_k\}\|_{l^2}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим два специальных случая этой теоремы, которые представляют особый интерес.

1. Пусть $\omega=0$ ($\mu=1$) и $\varkappa\neq 0$. Тогда в виду того, что $E_1(z;1)=e^z$, система (1.1) переходит в систему $\{e^{iz_k x}(ix)^{s_k-1}\}_0^\infty$ и получим следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность нулей некоторой функции $S(z)\in S_\varkappa$, где $-\frac{1}{2}<\varkappa<\frac{1}{2}$ и s_k — кратность появления числа z_j на отрезке $\{z_j\}_0^k$. Тогда система функций*

$$\{e^{iz_k x}(ix)^{s_k-1}\}_0^\infty$$

образует базис Рисса в $L^2(-\sigma,\sigma)$.

Отметим, что в случае $\varkappa=0$ теорема 1.2 переходит в известную теорему Б. Я. Левина (см. [7], [8], [12]). А если положим $s_k=1$ и $-\frac{1}{2}<\varkappa<\frac{1}{2}$ — эта теорема примыкает к некоторым результатам работы [13]. Окончательный результат (необходимое и достаточное условие того, чтобы семейство экспонент $\{e^{iz_k x}\}_0^\infty$ образовывало базис Рисса в $L^2(-\sigma,\sigma)$, получен в работе Б. С. Павлова [14] (см. также [15]).

2) При $-1<\omega<1$, $\varkappa=0$ и $s_k=1$ из теоремы (1.1) следует

Теорема 1.3. *Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность нулей функции $S(z)$ типа синуса. Тогда система функций*

$$\{(1+|z_k|)^{\omega/2}E_1(iz_k x;\ \mu)\}_0^\infty,$$

где $\mu=1+\frac{\omega}{2}$, образует базис Рисса в $L^{2,\omega}(-\sigma,\sigma)$.

В другом специальном случае, когда

$$S(z)=E_1(i\sigma z;\ \mu)-E_1(-i\sigma z;\ \mu),\quad (-1<\mu<2)$$

теорема 1.1 была анонсирована в статье автора [4].

§ 2. Построение биртогональной системы

В этом параграфе будем предполагать, что z_k являются нулями целой функции

$$S_1(z;\ \nu)=E_1(i\sigma z;\ \nu)-E_1(-i\sigma z;\ \nu),\quad (0<\nu<2). \tag{2.1}$$

Пользуясь асимптотическими свойствами функции $E_1(z;\ \nu)$ (см. [2], гл. III) нетрудно показать, что $S_1(z;\ \nu)\in S_{1-\nu}$. С другой стороны, из (2.1) следует, что функция $S_1(z;\ \nu)$ допускает представление вида

$$S_1(z;\ \nu)=2\,iz\,E_{1/2}(-\sigma^2 z^2;\ 1+\nu). \tag{2.2}$$

Как сообщил мне М. М. Джрбашян, им недавно было установлено, что все нули функции $E_{1/2}(z;\ \mu)$ при $1\leqslant\mu<3$ простые и вещественные. Отсюда и из (2.2) вытекает, что все нули функции $S_1(z;\ \nu)$ при $1\leqslant\nu<2$ также простые и вещественные. В работе [4] нам было лишь известно, что у функции $S_1(z;\ \nu)$ нули будут простыми и вещественными только, начиная с некоторого номера.

Вместе с (11) рассмотрим системы вида

$$\{E_1(iz_k x;\ \mu)\,|x|^{\mu-1}\}_0^\infty \equiv \{e_\mu(x;\ iz_k)\}_0^\infty, \tag{2.3}$$

где $\{z_k\}_0^\infty$ — нули функции $S_1(z;\ \nu)$.

Из теоремы 1.1 следует, что если $-\frac{1}{2}<\mu-\nu<\frac{1}{2}$, то система (2.3) образует базис Рисса в $L^2(-\sigma,\ \sigma)$.

Теперь следуя методу, примененному М. М. Джрбашяном в работе [16], займемся построением биортогональной с (2.3) системы. Для этого нам понадобится одна важная формула из монографии [2] (гл. III, (1—21)). Для любых комплексных λ, λ^* и α, $\beta>0$ справедлива следующая формула:

$$\int_0^\sigma x^{\alpha-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ \alpha)\,(\sigma-x)^{\beta-1}E_\rho(\lambda^*(\sigma-x)^{1/\rho};\ \beta)\,dx =$$

$$=\frac{\lambda E_\rho(\sigma^{1/\rho}\lambda;\ \alpha+\beta)-\lambda^* E_\rho(\sigma^{1/\rho}\lambda^*;\ \alpha+\beta)}{\lambda-\lambda^*}\,\sigma^{\alpha+\beta-1}. \tag{2.4}$$

Полагая $\rho=1$, $\alpha=\mu$, $\beta=1+\nu-\mu$ и пользуясь равенством

$$zE_1(z;\ \mu+1)=E_1(z;\ \mu)-1/\Gamma(\mu),$$

формулу (2.4) можем записать в таком виде

$$\int_0^\sigma x^{\mu-1}E_1(\lambda x;\ \mu)\,(\sigma-x)^{\beta-1}E_1(\lambda^*(\sigma-x;\ \beta)\,dx =$$

$$=\frac{E_1(\sigma\lambda;\ \nu)-E_1(\sigma\lambda^*;\ \nu)}{\lambda-\lambda^*}\,\sigma^{\nu-1}. \tag{2.5}$$

Вместо λ, λ^* подставим соответственно $-\lambda$, $-\lambda^*$ и полученную формулу прибавим к (2.5), тогда

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}|x|^{\mu-1}E_1(\lambda x;\ \mu)\,(\sigma-|x|)^{\beta-1}E_1(\lambda^*(\sigma-|x|)\,sgn\,x;\ \beta)\,dx=$$

$$=\frac{S_1(-i\lambda;\ \nu)+S_1(i\lambda^*,\ \nu)}{\lambda-\lambda^*}\,\sigma^{\nu-1}.$$

Подставляя здесь $\lambda^*=iz_k$ и пользуясь обозначениями (2.3), из последнего равенства будем иметь

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}e_\mu(x;\ \lambda)\,e_\beta((\sigma-|x|)\,sgn x;\ iz_k)\,dx=\frac{S_1(-i\lambda;\ \nu)}{\lambda-iz_k}\,\sigma^{\nu-1}. \tag{2.6}$$

Так как $\lambda=iz_k$ является простым нулем функции $S_1(-i\lambda;\ \nu)$, то

$$\frac{S_1(-i\lambda;\ \nu)}{\lambda-iz_k}\bigg|_{\lambda=iz_n}=\begin{cases}-iS_1'(z_n;\ \nu), & n=k\\ 0\qquad\qquad, & n\neq k.\end{cases}$$

Следовательно, отсюда и из (2.6)

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} e_\mu(x;\ iz_n)\, e_\beta((\sigma-|x|)\operatorname{sgn} x;\ iz_k)\,dx = \begin{cases} -iS_1'(z_n;\ \nu)\,\sigma^{\nu-1}, & n=k \\ 0, & n\neq k. \end{cases}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.1. *Система функций*

$$\left\{\frac{i}{\sigma^{\nu-1}\,S_1'(z_k;\ \nu)}\, e_\beta((\sigma-|x|)\operatorname{sgn} x;\ iz_k)\right\}_{k=0}^{\infty},\quad (\beta=1+\nu-\mu)$$

биортогональна с системой (2.3) *на* $(-\sigma,\ \sigma)$.

В случае $\mu=1$ $(\beta=\nu)$ система функций $\{e_\mu(x;\ iz_k)\}_0^\infty$ переходит в систему $\{e^{iz_kx}\}_0^\infty$ и получаем следующее

Следствие. *Системы функций*

$$\{e^{iz_kx}\}_0^\infty;\ \left\{\frac{i}{\sigma^{\nu-1}\,S_1'(z_k;\ \nu)}\, e_\nu((\sigma-|x|)\operatorname{sgn} x;\ iz_k)\right\}_0^\infty \equiv$$

$$\equiv\left\{\frac{i}{\sigma^{\nu-1}\,S_1'(z_k;\ \nu)}\, E_1(iz_k((\sigma-|x|\operatorname{sgn} x;\ \nu)(\sigma-|x|^{\nu-1}\right\}_0^\infty,$$

которые образуют базис Рисса (после нормировки) в $L^2(-\sigma,\ \sigma)$, *биортогональны на* $(-\sigma,\ \sigma)$.

§ 3. Специальные краевые задачи

В этом параграфе мы покажем, что система (2.3) является системой собственных функций краевой задачи для специального интегро-дифференциального оператора.

1°. Приведем определение и ряд свойств операторов интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувиля (более подробно эти свойства с доказательствами изложены в монографии [2]):

а) Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $L(-l,\ l)$ $(0<l<\infty)$. Интегралом от f порядка $s\,(s>0)$ называют функцию

$$D^{-s}f(x)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^x |x-t|^{s-1}f(t)\,dt,\quad x\in(-l,\ l). \tag{3.1}$$

Известно, что

1°. Для любого $s\,(s>0)$ функция $D^{-s}f(x)$ определена почти всюду на $(-l,\ l)$ и принадлежит классу $L(-l,\ l)$.

2°. В каждой точке Лебега функции $f(x)$ и, следовательно, почти всюду на $(-l,\ l)$

$$\lim_{s\to+0} D^{-s}f(x)=f(x).$$

Ввиду свойства 2° вполне естественно определение оператора $D^{-s}f(x)$ распространить на значение $s=0$, положив

$$D^{-0}f(x)=f(x).$$

б) Пусть $f(x) \in L(-l, l)$ и $0 \leqslant s \leqslant 1$. Тогда функция

$$D^s f(x) = \frac{d}{dx} \{D^{-(1-s)} f(x)\}, \quad x \in (-l, l) \tag{3.2}$$

называется производной порядка s от $f(x)$. При $s=1$ будем иметь:

$$D^1 f(x) = \frac{d}{dx} f(x), \quad x \in (-l, l), \tag{3.3}$$

т. е. $D^1 f$ совпадает с обычной производной $f'(x)$ функции f. В случае $s=0$ имеем

$$D^0 f(x) = \frac{d}{dx} \{D^{-1} f(x)\} = \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^x f(t)\, dt \right\} = f(x)$$

почти всюду на $(-l, l)$.

в) Для любого $\mu > 0$ введем в рассмотрение функцию

$$e_\mu(x; \lambda) \equiv E_1(\lambda x; \mu)\, |x|^{\mu-1}, \quad x \in (-l, l) \tag{3.4}$$

полагая пока, что λ — произвольный параметр.

Лемма 3.1. *Для любого* s $(0 < s < 1)$ *и* $\lambda \in C$ *справедливы формулы*

$$D^{-s} e_\mu(x; \lambda) = e_{\mu+s}(x; \lambda) \operatorname{sgn} x, \tag{3.5}$$

$$D^s e_\mu(x; \lambda) = e_{\mu-s}(x; \lambda). \tag{3.6}$$

Доказательство. Из самого определения (3.4) функции следует, что

$$e_\mu(x; \lambda) = \sum_0^\infty \frac{\lambda^k x^k}{\Gamma(\mu+k)} |x|^{\mu-1}.$$

Отсюда имеем

$$D^{-s} e_\mu(x; \lambda) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_0^\infty \frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu+k)} \int_0^x |x-t|^{s-1} t^k |t|^{\mu-1}\, dt.$$

Поскольку

$$\int_0^x |x-t|^{s-1} t^k\, |t|^{\mu-1}\, dt = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(s+\mu+k)} x^{k-1} |x|^{s+\mu-2},$$

то

$$D^{-s} e_\mu(x; \lambda) = \sum_0^\infty \frac{\lambda^k x^k}{\Gamma(\mu+s+k)} |x|^{s+\mu-1} \operatorname{sgn} x =$$

$$= E_1(\lambda x; \mu+s)\, |x|^{\mu+s-1} \operatorname{sgn} x = e_{\mu+s}(x; \lambda) \operatorname{sgn} x,$$

что совпадает с формулой (3.5) леммы.

Из формулы (3.5) следует, что

$$D^s e_\mu(x; \lambda) = \frac{d}{dx} \{D^{-(1-s)} e_\mu(x; \lambda)\} = \frac{d}{dx} \{e_{\mu+1-s}(x; \lambda) \operatorname{sgn} x\} =$$

$$= \frac{d}{dx} \left\{ \sum_0^\infty \frac{\lambda^k x^k}{\Gamma(\mu-s+k+1)} |x|^{\mu-s} \operatorname{sgn} x \right\} = e_{\mu-s}(x; \lambda).$$

Лемма доказана.

2°. а) Пусть функция $S(z) \in S_\varkappa$ и a — один из ее корней. Из определения классов $S_\varkappa$ и $W_\sigma^{2,\omega}$ вытекает, что если $2\varkappa + \omega < 1$, то

$$\frac{S(z)}{z-a} \in W_\sigma^{2,\omega},$$

и, следовательно, по теореме А существует единственная функция $\varphi_a(x) \in L^2(-\sigma, \sigma)$ такая, что имеет место представление

$$S(z) = (z-a)\int_{-\sigma}^{\sigma} E_1(izx;\ \mu)\,|x|^{\mu-1}\varphi_a(x)\,dx =$$

$$=(z-a)\int_{-\sigma}^{\sigma} e_\mu(x;\ iz)\,\varphi_a(x)\,dx. \tag{3.7}$$

б) Пусть дана совокупность $\{\mu;\ \gamma_1;\ \gamma_2\}$ трех чисел

$$1 \leqslant \mu < \frac{3}{2},\ 0 \leqslant \gamma_1,\ \gamma_2 \leqslant 1 \text{ и } \gamma_1 + \gamma_2 = \mu.$$

Введем в рассмотрение операторы

$$Ly = D^{-(\mu-1)}\{D^{\gamma_2}\{D^{\gamma_1} y\}\}. \tag{3.8}$$

Отметим, что если $\mu = \gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = 0$, то $Ly(x) = y'(x)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$Ly = \lambda y, \tag{3.9}$$

$$D^{-(1-\gamma_1)} y|_{x=0} = 0,\ D^{-(1-\gamma_2)}\{D^{\gamma_1} y\}|_{x=0} = 1, \tag{3.10}$$

$$(\lambda - a)\int_{-\sigma}^{\sigma} y(x)\,\varphi_a(x)\,dx = 0. \tag{3.11}$$

Отметим, что краевая задача типа (3.11) для обыкновенных дифференциальных операторов была рассмотрена, например, в работе А. Б. Нерсесяна [17].

Из теоремы 5 статьи [18] непосредственно следует что задача типа Коши (3.9)—(3.10) имеет единственное решение $y(x;\ \lambda)$, причем такое, что $y(x;\ \lambda) \in L^2(-\sigma, \sigma)$ при $\gamma_1 > 2 - \mu$.

Лемма 3.2. *Функция* $y = e_\mu(x;\ iz_k)$, *где* z_k — *нули функции* $S(z) \in S_\varkappa$, *является решением краевой задачи* (3.9)—(3.11).

Доказательство. Из леммы (3.1) вытекают формулы

$$D^{\gamma_1} e_\mu(x;\ \lambda) = e_{\mu-\gamma_1}(x;\ \lambda),$$

$$D^{\gamma_2}\{D^{\gamma_1} e_\mu(x;\ \lambda)\} = e_{\mu-\gamma_1-\gamma_2}(x;\ \lambda),$$

но $\gamma_1 + \gamma_2 = \mu$, следовательно

$$D^{\gamma_2}\{D^{\gamma_1} e_\mu(x;\ \lambda)\} = e_0(x;\ \lambda) = \lambda E_1(\lambda x;\ 1)\,\mathrm{sgn}\,x.$$

Теперь из формулы (3.5) и определения оператора L имеем

$$Le_\mu(x;\ \lambda) = D^{-(\mu-1)}\{\lambda E_1(\lambda x;\ 1)\,\mathrm{sgn}\,x\} =$$

$$=\lambda D^{-(\mu-1)}\{E_1(x;\ \lambda)\operatorname{sgn} x\}=\lambda e_\mu(x;\ \lambda).$$

С другой стороны, эти функции должны удовлетворять условию (3.11). Подставив $y=e_\mu(x;\ \lambda)$ в равенство (3.11) и пользуясь (3.7), получим $S(-i\lambda)=0$, т. е. $\lambda=iz_k$. Лемма доказана.

в) Систему $\left\{\dfrac{d^{s_k-1}}{d\lambda^{s_k-1}}e_\mu(x;\ \lambda)\ x^{s_k-1}\Big|_{\lambda=iz_k}\right\}$, где $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$, будем называть системой собственных и присоединенных функций нашей краевой задачи.

Теорема 3.1. *Система собственных и присоединенных функций краевой задачи* (3.9)—(3.11) *является базисом Рисса в пространстве* $L^2(-\sigma,\ \sigma)$.

Доказательство. Лемма 3.2 показывает, что собственные значения краевой задачи (2.9)—(2.11) — суть нули целой функции $S(z)$, и если $\{z_\nu\}$ — множество собственных значений этой задачи, то семейством ее собственных функций будет $\{e_\mu(x;\ iz_k)\}_0^\infty$.

С другой стороны, система функций $\{e^{(s_k-1)}(x;\ iz_k)\,x^{s_k-1}\}_0^\infty$ образует базис Рисса в $L^2(-\sigma,\ \sigma)$ (теорема 1.1). Этим и завершается доказательство теоремы.

В заключение рассмотрим некоторые частные случаи краевой задачи (3.9)—(3.11).

1) $\mu=\gamma_2=1,\ \gamma_1=0,\ \sigma=\pi,\ \varphi_0(x)=1\ (S(z)=2i\sin\pi z)$.

В этом случае краевая задача (3.9)—(3.11) совпадает с классической краевой задачей на отрезке $[-\pi,\ \pi]$

$$y'=\lambda y,\ y(-\pi)=y(\pi),$$

порождающей систему Фурье $\{e^{ikx}\}_{-\infty}^{\infty}$.

2) $1<\mu<\dfrac{3}{2},\ \gamma_2=1,\ \gamma_1=\mu-1,\ \varphi_a(x)=1.$

Воспользовавшись некоторыми формулами из статьи [18], получим краевую задачу

$$y'-\frac{[D^{\mu-1}y]_{x=0}}{\Gamma(\mu-1)}x^{\mu-2}=\lambda y,$$

$$D^{-(2-\mu)}y|_{x=0}=0,\ D^{\mu-1}y|_{x=0}=1,$$

$$(\lambda-a)\int_{-a}^{a}y(x;\ \lambda)\,dx=0,$$

решениями которой, как легко видеть, являются функции $e_\mu(x;\ iz_n)$, где $\{z_n\}$ — суть нули функции $S_1(z;\ \mu+1)$. Согласно теореме 3.1 система собственных функций этой задачи образует базис Рисса в $L^2(-\sigma,\ \sigma)$.

В заключение выражаю благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный
университет

Поступила 18.I. 1983

Ս. Գ. ՌԱՖԱՅԵԼՅԱՆ. Որոշ բիօրթոգոնալ համակարգերի բազիսությունը $L^2(-\sigma, \sigma)$ կշռային դասերում (*ամփոփում*)

Դիցուք $\{z_k\}_0^\infty$*-ն որևէ* $S(z) \in S_\alpha$ *ֆունկցիայի զրոների հաջորդականությունն է և* s_k*-ն* z_k *թվի հանդես գալու պատիկությունն է* $\{z_j\}_0^k$ *հատվածում։ Ապացուցվում է, որ պարամետրերի վրա դրված որոշ պայմանների դեպքում ֆունկցիաների հետևյալ համակարգը․*

$$\{(1+|z_k|)^{\omega/2} E_1^{(s_k-1)}(iz_k x;\ \mu)\, x^{s_k-1}\}_0^\infty \qquad (*)$$

$L^{2,\omega}(-\sigma, \sigma)$ *դասում կազմում է Ռիսսի բազիս։ Այստեղ*

$$E_1(z;\mu) = \sum_0^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k)}$$

Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիա է ($\rho = 1$)։
Բացահայտ տեսքով կառուցվում է նաև (*)*-ին բիօրթոգոնալ համակարգը։*

S. G. RAFAELIAN. *Basisness of some biorthogonal systems in* $L^2(-\sigma, \sigma)$ *with weight* (summary)

Let $\{z_k\}_0^\infty$ be a sequence of zeros some function $S(z) \in S_\alpha$ and s_k be the multiplicity of the number z_k in the interval $\{z_j\}_0^k$. It is proved that under some conditions the system of functions

$$\{(1+|z_k|)^{\omega/2} E_1^{(s_k-1)}(iz_k x;\ \mu)\, x^{s_k-1}\}_0^\infty$$

forms a Riesz basis in the space $L^{2,\omega}(-\sigma, \sigma)$.

Here

$$E_1(z;\mu) = \sum_0^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k)}$$

is the Mittag-Leffler function ($\rho = 1$). The explicit form of functions biorthogonal with (*) is also constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, ДАН СССР, 95, 1954; Изв. АН СССР, сер. матем., 19, 1955.
2. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
3. *М. М. Джрбашян*. Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, ДАН СССР, 85, № 1, 1952; Матем. сб., 1953, 33 (75), № 4, 485—530.
4. *С. Г. Рафаелян*. О базисности некоторых систем целых функций, ДАН Арм.ССР, 70, № 4, 1980.
5. *М. М. Джрбашян* и *С. Г. Рафаелян*. О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L_p, ДАН Арм.ССР, 72, № 4, 1981.
6. *С. Г. Рафаелян*. Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVIII, № 3, 1983, 167—186.
7. *Б. Я. Левин*. О базисах показательных функций в $L^2(-\pi, \pi)$, Записки физ.-мат. фак-та Харьковского гос. у-та и Харьковск. мат. об-ва, 27, сер. 4, 1961.
8. *Б. Я. Левин*. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа, Сб. «Матем. физика и функ. анализ», ФТИНТ АН УССР, вып. 1, 1961.

9. *М. М. Джрбашян*. Теоремы единственности аналитических функций, асимптотически представимых рядами Дирихле—Тейлора, Матем. сб., 91, № 4 (8), 1973.
10. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян*. О построении некоторых специальных биортогональных систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, XII, № 5, 1959.
11. *Н. К. Бари*. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Ученые записки Московского университета, т. 48, «Математика», 1951.
12. *В. Д. Головин*. О биортогональных разложениях в L^2 по линейным комбинациям показательных функций, Записки мех.-мат. фак-та Харьковского гос. ун-та и Харьковского матем. об-ва, 30, сер. 4, 1964.
13. *С. А. Авдонин*. К вопросу о базисах Рисса из показательных функций в L^2, Вестник ЛГУ, сер. матем., мех., астр., 13, 5, 1974.
14. *Б. С. Павлов*. Базисность системы экспонент и условие Макенхоупта, ДАН СССР, 247, № 1, 37, 1979.
15. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, С. В. Хрущев*. Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. III, Препринты ЛОМИ, Р—10—80.
16. *М. М. Джрбашян*. Базисность биортогональных систем, порожденных краевыми задачами для дифференциальных операторов дробного порядка, ДАН СССР, 261, № 5, 1981.
17. *А. Б. Нерсесян*. Разложение по собственным функциям некоторых несамосопряженных краевых задач, ДАН СССР, 135, № 5, 1960; Сибирский матем. журнал, 11, № 3, 1961.
18. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян*. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, № 1, 1968.