ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 3, 1984 Математика

УДК 517.988

А. Г. КАМАЛЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН

ОБ ОБРАЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОЧТИ РАЗНОСТНО-СУММАРНЫМ ЯДРОМ

Введение

Как известно (см. [1], § 7), исследование интегральных операторов на полупрямой с разностно-суммарным ядром сводится к решению задачи Римана с карлемановским сдвигом. С другой стороны, Л. А. Сахновичем ([2—4]) предложен метод обращения оператора общего вида с разностным ядром, основанный на предварительном решении четырех уравнений. Некоторые из этих результатов перенесены на случай разностно-суммарных ядер ([5]).

В работах [6, 7] были введены интегральные операторы с ядром K, „почти разностным" в том смысле, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)K(x,t)=\sum_{k=1}^{N}p_k(x)\,q_k(t). \tag{0.1}$$

Как оказалось, построение обратного оператора в этом случае аналогично случаю разностного ядра (т. е. когда $p_k=q_k\equiv 0$).

В работе [8] были изучены операторы с ядрами, удовлетворяющими уравнениям с частными производными, обобщающими соотношение (0.1). В частности ([8], § 4), было показано, что уравнение парного типа с ядрами вида (0.1) поддаются исследованию на разрешимость. Последние результаты, как и некоторые результаты работ [2—4], были перенесены на уравнения со многими ядрами типа (0.1) в работе [9]. В работе [13], по сути, также изучаются операторы подобного типа специальной структуры.

В предлагаемой работе изучаются интегральные операторы с ядрами, удовлетворяющими (в обобщенном смысле) в скалярном случае соотношению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)K(x,t)=\sum_{k=1}^{N}p_k(x)\,q_k(t). \tag{0.2}$$

Такие ядра естественно считать „почти разностно-суммарными".

Структура резольвентных ядер таких операторов изучалась в [8] (примеры 2, 3). Ниже показано, что на этот случай могут быть перенесены основные результаты работ [2—5, 9].

§ 1. Нётеровость некоторых интегральных операторов с почти разностно-суммарным ядром

1°. Рассмотрим в $L_n^2(R)$ интегральный оператор

$$(\widetilde{\mathbf{K}}y)(x)=\lambda y(x)+\mu y(-x)-\int_{-\infty}^{\infty}K(x,t)\,y(t)\,dt \tag{1.1}$$

с ядром следующего вида:

$$K(x,t)=\begin{cases} k_1(x-t)+r_1(x+t)+\int\limits_0^t\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}p_1(u)\,q_1(\tau)\,du\,d\tau, & 0\leqslant t<\infty\\ k_2(x-t)+r_2(x+t)+\int\limits_0^t\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}p_2(u)\,q_2(\tau)\,du\,d\tau, & -\infty<t<0,\end{cases} \tag{1.2}$$

где $\lambda,\ \mu\in C$; k_i, r_i — матрицы-функции $(n\times n)$, p_i — $(n\times\alpha)(\alpha\geqslant 1)$ с элементами из $L^1(R)(i=1,\ 2)$; q_i $(i=1,\ 2)$ — матрицы-функции $(\alpha\times n)$ с элементами соответственно из $L^1(0,\ \infty)$ и $L^1(-\infty,\ 0)$.

В (1.2) не входят значения $q_1(t)$ при $t<0$ и $q_2(t)$ при $t>0$, так что можно доопределить эти функции на всю прямую, считая $q_1(t)\equiv 0$ при $t<0$ и $q_2(t)\equiv 0$ при $t>0$.

Интеграл в (1.1) понимается в смысле сходимости в $L^2(R)$. Интегральное уравнение с оператором (1) запишем в общепринятой форме

$$\widetilde{\mathbf{K}}y=(\lambda J+\mu W-\mathbf{K})\,y=g, \tag{1.1'}$$

где

$$(Jy)(t)=y(t),\ (Wy)(t)=y(-t),$$

$$(\mathbf{K}y)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau.$$

В дальнейшем будем обозначать через S оператор сингулярного интегрирования вдоль вещественной оси с ядром Коши

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,$$

а оператор умножения на матрицу-функцию $a(t)$ — той же буквой: $(a\varphi)(t)=a(t)\,\varphi(t)$.

Прямое и обратное преобразования Фурье, соответственно, обозначим

$$(F\varphi)(\xi)=\hat{\varphi}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\xi}\varphi(t)\,dt,\quad (F^{-}\varphi)(\xi)=\check{\varphi}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\xi}\varphi(t)\,dt.$$

Рассмотрим матрицы-функции

$$v_i(t)=\int_{-\infty}^{\infty}p_i(t-\tau)\,q_i(\tau)\,d\tau,\quad i=1,\ 2 \tag{1.3}$$

$$w_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(t+\tau)\, q_i(\tau)\, d\tau, \quad i=1,\ 2. \tag{1.4}$$

В дальнейшем через E_n обозначим единичную матрицу.

Основным результатом § 1 является следующая

Теорема 1. *Пусть p_i $(i=1,\ 2)$ обладают первообразными, принадлежащими $L_n^1(R)$ и $|\lambda|-|\mu|\neq 0$. Тогда для того, чтобы интегральный оператор* (1.1) *был нётеров, необходимо и достаточно выполнение следующего условия*:

$$\Delta(t)=$$
$$=\det\begin{pmatrix} \lambda E_n-\hat{k}_1(-\xi)-i\xi^{-1}\hat{p}_1(-\xi)\,\hat{q}_1(\xi), & \mu E_n-\hat{r}_1(\xi)-i\xi^{-1}\hat{p}_1(\xi)\,\hat{q}_1(\xi) \\ -\mu E_n+\hat{r}_2(-\xi)+i\xi^{-1}\hat{p}_2(-\xi)\hat{q}_2(-\xi), & -\lambda E_n+\hat{k}_2(\xi)+i\xi^{-1}\hat{p}_2(\xi)\hat{q}_2(-\xi)\end{pmatrix}\neq 0. \tag{1.5}$$

При выполнении (1.5) индекс интегрального оператора (1.1) вычисляется по формуле

$$\operatorname{Ind}\tilde{\mathbf{K}}=\operatorname{Ind}\Delta(t)=\operatorname{Var}\arg\Delta(t),\quad -\infty<t<+\infty. \tag{1.6}$$

2°. Доказательство теоремы 1 основано на сведении, при помощи преобразования Фурье, к сингулярному интегральному оператору с карлемановским сдвигом. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $\gamma(x, t)(-\infty<x,\ t<\infty)$ — измеримая по обеим переменным функция, обладающая следующими свойствами:*

а) *существуют функции $h_1, h_2\in L^1(R)$ такие, что*

$$|\gamma(x, t)|<h_1(x-t)+h_2(x+t),$$

(б) *Для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma(x+h, t)-\gamma(x, t)|\,dt<\varepsilon \text{ при } |h|<\delta.$$

*Тогда $\gamma(x, t)$ порождает в каждом из пространств $L^p(R)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ линейный ограниченный оператор**

$$(\Gamma y)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(x, t)\, y(t)\, dt.$$

Эта лемма во многом схожа с леммой 6.1 [10] и ее доказательство, приведенное в [10], с несущественными изменениями проходит и здесь.

Рассмотрим матрицу-функцию

$$\psi(x, t)=\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} p(u)\, q(\tau)\, du\, d\tau \tag{1.7}$$

---

* Для $y\in L^p(R)(1<p<\infty)$ интеграл понимается в смысле сходимости в $L^p(R)$.

(где $p(x)$—матрица-функция $(n\times\alpha)$, $q(x)-(\alpha\times n)$ с элементами из $L^1(R)$); матрицы-функции $v^{\pm}(x)$, $w^{\pm}(x)$*

$$v^{\pm}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|p(x-t)|\,|q_{\pm}(t)|\,dt,\quad w^{\pm}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|p(x+t)|\,|q_{\pm}(t)|\,dt$$

и порождаемый $\psi(x,t)$ оператор

$$(\Psi y)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)\,y(t)\,dt. \tag{1.8}$$

Лемма 2.2. *Пусть матрица-функция* $p(x)$ *обладает первообразной из* $L^1(R)$. *Тогда* (*i*) Ψ — *ограниченный оператор на каждом из* $L^p_n(R)$. (ii) *В пространствах* $L^1_n(R)$ *и* $L^2_n(R)$ *для преобразования Фурье* Ψ_y *справедлива формула*

$$(\widehat{\Psi y})(\xi)=i2\pi\xi^{-1}\hat p(\xi)\Big\{\Big[\hat q_{+}(\xi)-\frac{1}{2}q(\xi)\Big]\check y(\xi)-$$

$$-\Big[\check q_{+}(\xi)-\frac{1}{2}\hat q(\xi)\Big]\check y(\xi)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\check q(\eta)\check y(\eta)+\hat q(\eta)\hat y(\eta)}{\eta-\xi}\,d\eta\Big\}. \tag{1.9}$$

В операторной форме (1.9) примет вид

$$F\Psi=i\,2\pi\xi^{-1}\hat p\Big\{\Big(\hat q_{+}-\frac{1}{2}\hat q\Big)F^{-}-\Big(\check q_{+}-\frac{1}{2}\check q\Big)F-\frac{1}{2}\,S(\hat q F^{-}+\check q F)\Big\}. \tag{1.9'}$$

Доказательство. Легко видеть, что (*i*) достаточно доказать в скалярном случае ($n=1$).

Покажем, что в этом случае функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет условиям а, в) леммы 2.1

$$|\psi(x,t)|\leqslant\int_{x-t+2\tau}^{x+t}\int_{0}^{t}|p(u-\tau)|\,|q_{+}(\tau)|\,d\tau du+$$

$$+\int_{x+t-2\tau}^{x-t}\int_{0}^{t}|p(u+\tau)|\,|q_{-}(\tau)|\,d\tau du\leqslant\int_{x-t}^{x+t}(v^{+}+w^{-})(u)du\leqslant$$

$$\leqslant(V^{+}+W^{-})(x+t)+(V^{+}-W^{-})(x-t),$$

откуда следует свойство а).

$$|\psi(x+h,t)-\psi(x,t)|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{x+t}^{x+h+t}\int_{0}^{t}|p(u-\tau)\,q(\tau)|\,d\tau du+\int_{x-t}^{x+h-t}\int_{0}^{t}|p(u+\tau)\,q(\tau)|\,d\tau du\leqslant$$

---

* Всюду в § 1 под $\varphi_{+}(t)$ ($\varphi_{-}(t)$) будем понимать функции, равные нулю при $t<0$ ($t>0$) и $\varphi_{+}(t)-\varphi_{-}(t)=\varphi(t)$.

$$\leqslant |V^+(x+h+t)-V^+(x+t)|+|V^-(x+h+t)-V^-(x+t)|+$$
$$+|W^+(x+h-t)-W^+(x-t)|+|W^-(x+h-t)-W^-(x-t)|.$$

Из этого неравенства непосредственно вытекает свойство б), что и доказывает первую часть леммы.

Формулу (1.9) вначале докажем для $y(t)\in L^1(R)$. Пользуясь теоремой Фубини, получим

$$(\widehat{\Psi y})(\xi)=i\,\widehat{p}(\xi)\,\xi^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-it\xi}\left\{\int\limits_{0}^{t}e^{i\xi\tau}q(\tau)\,d\tau\right\}y(t)\,dt-$$
$$-i\,\widehat{p}(\xi)\,\xi^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{it\xi}\left\{\int\limits_{0}^{t}e^{-i\xi\tau}q(\tau)\,d\tau\right\}y(t)\,dt.$$

Обозначая, соответственно, через $J_1(\xi)$, $J_2(\xi)$ первый и второй интегральные члены последнего равенства, получим

$$(\widehat{\Psi y})(\xi)=i\xi^{-1}\,\widehat{p}(\xi)[J_1(\xi)-J_2(\xi)]. \tag{1.10}$$

Имеем $J_1(\xi)=2\pi\widehat{q}_+(\xi)\check{y}(\xi)-\widehat{f}_+(\xi)$, где

$$f(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(\tau+t)\,y(t)\,dt.$$

Пользуясь равенствами

$$\widehat{f}_+(\xi)=\frac{1}{2}\widehat{f}(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{f}(\eta)}{\eta-\xi}\,d\eta,\quad \widehat{f}(\xi)=2\pi\widehat{q}(\xi)\,\check{y}(\xi)$$

для $J_1(\xi)$ получим

$$\frac{1}{2\pi}J_1(\xi)=\left[\widehat{q}_+(\xi)-\frac{1}{2}\widehat{q}(\xi)\right]\check{y}(\xi)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{q}(\eta)\check{y}(\eta)}{\eta-\xi}\,d\eta. \tag{1.11}$$

Аналогично для $J_2(\xi)$ имеем

$$J_2(\xi)=2\pi\check{q}_+(\xi)\,\widehat{y}(\xi)-2\pi\check{f}_+(\xi).$$

Воспользовавшись теперь тем, что

$$\check{f}_+(\xi)=\frac{1}{2}\check{f}(\xi)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\check{f}(\eta)}{\eta-\xi}\,d\eta,\quad \check{f}(\xi)=\check{q}(\xi)\,\widehat{y}(\xi),$$

получим

$$\frac{1}{2\pi}J_2(\xi)=\left[\check{q}_+(\xi)-\frac{1}{2}\check{q}(\xi)\right]\widehat{y}(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\check{q}(\eta)\widehat{y}(\eta)}{\eta-\xi}\,d\eta. \tag{1.12}$$

Подстановкой (1.11) и (1.12) в (1.10) получим формулу (1.9) для $y\in L^1_n(R)$.

Рассмотрим два оператора

$$T_1=F\Psi;\ T_2=i2\pi\,\xi^{-1}\,\hat{p}\left\{\left(\hat{q}_+-\frac{1}{2}\hat{q}\right)F^- -\left(\check{q}_+-\frac{1}{2}\check{q}\right)F-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}S(\hat{q}F^- +\check{q}F)\right\}.$$

Нетрудно убедиться, что эти операторы являются линейными ограниченными операторами на $L_n^2(R)$ (по поводу ограниченности оператора S см. § 3 [11]).

В силу доказанного эти операторы совпадают на плотном в $L_n^2(R)$ множестве $L_n^1(R)\cap L_n^2(R)$, поэтому из-за непрерывности они совпадают на $L_n^2(R)$. Равенство $T_1=T_2$ окончательно доказывают лемму.

Подставляя в (1.9) вместо $p(t)$, $q(t)$, $y(t)$ соответственно $p_i(t)$, $q_i(t)$, $y_\pm(t)$, получим для

$$(\Psi_i\, y_\pm)(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}p_i(u)\,q_i(\tau)\,du d\tau\right\}y_\pm(t)\,dt,\ i=1,2$$

следующие формулы:

$$(\hat{\Psi}_1 y_+)(\xi)=i\pi\,\xi^{-1}\,\hat{p}_1(\xi)\left\{\hat{q}_1(\xi)\,\check{y}_+(\xi)-\check{q}_1(\xi)\,\hat{y}_+(\xi)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{q}_1(\eta)\,\check{y}_+(\eta)+\check{q}_1(\eta)\,\hat{y}_+(\eta)}{\eta-\xi}\cdot d\eta\right\},\tag{1.13}$$

$$(\hat{\Psi}_2 y_-)(\xi)=i\pi\,\xi^{-1}\,\hat{p}_2(\xi)\left\{\check{q}_2(\xi)\,\hat{y}_-(\xi)-\hat{q}_2(\xi)\,\check{y}_-(\xi)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{q}_2(\eta)\,\check{y}_-(\eta)+\check{q}_2(\eta)\,\hat{y}_-(\eta)}{\eta-\xi}\,d\eta\right\}.\tag{1.14}$$

Перейдем теперь к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы 1. Записывая $y(t)$ в виде разности $y(t)=y_+(t)-y_-(t)$ и подставляя в (1.1′), получим

$$(\bar{\mathbf{K}}y)(x)=\left\{\lambda y_+(x)+\mu y_+(-x)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{k}_1(x-t)\,y_+(t)\,dt-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{-\infty}^{\infty}r_1(x+t)\,y_+(t)\,dt-(\Psi_1 y_+)(x)\right\}-\left\{\lambda y_-(x)+\mu y_-(-x)-\right.\tag{1.15}$$

$$\left.-\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_2(x-t)\,y_-(t)\,dt-\int\limits_{-\infty}^{\infty}r_2(x+t)\,y_-(t)\,dt-(\Psi_2\,y_-)(x)\right\}=g(x).$$

Применяя преобразование Фурье к обеим частям (1.15) и группируя коэффициенты при $\widehat{y}_+(\xi)$, $\widehat{y}_+(-\xi)$, $\widehat{y}_-(\xi)$, $\widehat{y}_-(-\xi)$, — пользуясь при этом формулами (1.13), (1.14), — получим

$$(\widehat{\mathbf{L}y})(\xi)=(F\,\mathbf{K}y)(\xi)=A_1(\xi)\widehat{y}_+(\xi)+A_2(\xi)\widehat{y}_-(\xi)+$$

$$+B_1(\xi)\widehat{y}_+(-\xi)+B_2(\xi)\widehat{y}_-(-\xi)+\frac{C_1(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_1(\eta)\widehat{y}_+(\eta)}{\eta-\xi}d\eta+ \tag{1.16}$$

$$\frac{C_2(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_2(\eta)\widehat{y}_-(\eta)}{\eta-\xi}d\eta+\frac{C_1(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_1(-\eta)\widehat{y}_+(-\eta)}{\eta-\xi}d\eta+$$

$$+\frac{C_2(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_2(-\eta)\widehat{y}_-(-\eta)}{\eta-\xi}d\eta=\widehat{g}(\xi),$$

где

$$A_j(\xi)=(-1)^{j+1}\left\{\lambda E_n-\widehat{k}_j(\xi)+(-1)^{j+1}\frac{i}{2}\xi^{-1}\widehat{p}_j(\xi)\widehat{q}_j(-\xi)\right\},$$

$$B_j(\xi)=(-1)^{j+1}\left\{\mu E_n-\widehat{r}_j(\xi)+(-1)^{j}\frac{i}{2}\xi^{-1}\widehat{p}_j(\xi)\widehat{q}_j(\xi)\right\}, \tag{1.17}$$

$$C_j(\xi)=(-1)^{j+1}\frac{i}{2}\xi^{-1}\widehat{p}_j(\xi),\quad D_j(\xi)=\widehat{q}_j(-\xi),\quad j=1,2.$$

Таким образом, уравнение (1,1′) свелось к своеобразной граничной задаче (для пары аналитических в верхней и нижней полуплоскости вектор-функций $\widehat{y}_\pm(\xi)$), содержащей сингулярный интегральный оператор.

Применяя формулы Племеля — Сохоцкого ([11], § 3) и пользуясь тем, что $S^2=J$ и $Sa-aS$, — при непрерывном $a(t)$, — вполне непрерывный оператор (см. [11], § 3), нетрудно убедиться в справедливости следующих формул:

$$\frac{C_1(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_1(\eta)\widehat{y}_+(\eta)}{\eta-\xi}d\eta=\frac{1}{2}C_1(\xi)D_1(\xi)\widehat{y}(\xi)+$$

$$+\frac{C_1(\xi)D_1(\xi)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{y}(\eta)}{\eta-\xi}d\eta+(N_1\widehat{y})(\xi), \tag{1.18}$$

$$\frac{C_2(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_2(\eta)\widehat{y}_-(\eta)}{\eta-\xi}d\eta=\frac{1}{2}C_2(\xi)D_2(\xi)\widehat{y}(\xi)-$$

$$-\frac{C_2(\xi)D_2(\xi)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{y}(\eta)}{\eta-\xi}d\eta+(N_2\widehat{y})(\xi), \tag{1.19}$$

$$\frac{C_1(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_1(-\eta)\hat{y}_-(-\eta)}{\eta-\xi}d\eta=\frac{1}{2}C_1(\xi)D_1(-\xi)\hat{y}(-\xi)-$$

$$-\frac{C_1(\xi)D_1(-\xi)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{y}(\eta)}{\eta+\xi}d\eta+(N_3\hat{y})(\xi), \tag{1.20}$$

$$\frac{C_2(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_2(-\eta)\hat{y}_-(-\eta)}{\eta-\xi}d\eta=-\frac{1}{2}C_2(\xi)D_2(-\xi)\hat{y}(-\xi)+$$

$$+\frac{C_2(\xi)D_2(-\xi)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{y}(\eta)}{\eta+\xi}d\eta+(N_4\hat{y})(\xi), \tag{1.21}$$

где $N_i\,(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — вполне непрерывные операторы.

После подстановки формул Племеля—Сохоцкого и (1.18)—(1.21) в (1.16), получим

$$(\mathrm{L}\hat{y})(\xi)=a(\xi)\hat{y}(\xi)+b(\xi)\hat{y}(-\xi)+\frac{c(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{y}(\eta)}{\eta-\xi}d\eta+$$

$$+\frac{d(\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{y}(\eta)}{\eta+\xi}d\eta+(N\hat{y})(\xi)=\hat{g}(\xi), \tag{1.22}$$

где

$$a(\xi)=\frac{1}{2}\{A_1(\xi)-A_2(\xi)+C_1(\xi)D_1(\xi)+C_2(\xi)D_2(\xi)\},$$

$$b(\xi)=\frac{1}{2}\{B_1(\xi)-B_2(\xi)-C_1(\xi)D_1(-\xi)-C_2(\xi)D_2(-\xi)\}, \tag{1.23}$$

$$c(\xi)=\frac{1}{2}\{A_1(\xi)+A_2(\xi)+C_1(\xi)D_1(\xi)-C_2(\xi)D_2(\xi)\},$$

$$d(\xi)=\frac{1}{2}\{B_1(\xi)+B_2(\xi)-C_1(\xi)D_1(-\xi)+C_2(\xi)D_2(-\xi)\},$$

а $(N\hat{y})(\xi)$ — вполне непрерывный оператор. Уравнение (1.22) является сингулярным интегральным уравнением со сдвигом Карлемана $\alpha(t)=-t$.

Как известно (§ 32, [11]) условие нётеровости оператора L в $L_n^2(R)$ определяется из соотношения

$$\Delta(\xi)=-\det\begin{pmatrix} a(-\xi)+c(-\xi) & b(\xi)+d(\xi)\\ d(-\xi)-b(-\xi) & c(\xi)-a(\xi)\end{pmatrix} \tag{1.24}$$

и индекс оператора L равен

$$\operatorname{Ind} \mathbf{L} = \operatorname{Ind} \Delta(\xi). \tag{1.25}$$

Но так как $(\mathbf{L}\hat{y})(\xi)=(F\widetilde{\mathbf{K}}y)(\xi)$, то есть $\mathbf{L}F=F\widetilde{\mathbf{K}}$, то условия нётеровости $\mathbf{L}$ и $\widetilde{\mathbf{K}}$ одни и те же, причем $\operatorname{Ind}\mathbf{L}=\operatorname{Ind}\widetilde{\mathbf{K}}$. Чтобы закончить доказательство теоремы, остается подставить в (1.24) формулы (1.23), а в полученный результат — формулы (1.17).

3°. Приведем некоторые замечания.

Замечание 1. Предположения относительно первообразных p_i $(i=1, 2)$ (см. (1.3), (1.4)), в условии теоремы, нельзя отбросить или ослабить другими предположениями, так как нетрудно заметить, что при этом теряется непрерывность функций $(\widehat{\Psi}\, y_{\pm})(t)$ (см. форм. (1.13), (1.14)), что означает, что оператор $\widetilde{\mathbf{K}}$ не переводит пространства $L_n^1(R)$, $L_n^2(R)$ в себя. Это следует из того простого факта, что преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции есть непрерывная функция.

Чтобы первообразные v_i, w_i $(i=1, 2)$ принадлежали пространству $L_n^1(R)$, достаточно, чтобы этим свойством обладала хотя бы одна из пары матриц-функций p_i, q_i $(i=1, 2)$.

Замечание 2. Можно было бы рассматривать уравнения

$$\widetilde{\mathbf{K}}_1 y + \widetilde{\mathbf{K}}_2 \bar{y} = g, \tag{1.26}$$

где $\widetilde{\mathbf{K}}_i$ $(i=1, 2)$— операторы вида $\widetilde{\mathbf{K}}$ в (1.1). Нетрудно видеть, что преобразование Фурье переводит это уравнение в интегральное уравнение с обратным сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными значениями неизвестной функции. Теория Нётера этого уравнения дана в § 8 [11]. Используя эти результаты, можно выписать условия нётеровости уравнения (1.26) и найти индекс.

Замечание 3. В случае когда $|\lambda|-|\mu|=0$ в (1.1) надо еще наложить условие на бесконечности, обеспечивающее осмысленность формулы (1.6) (см. [1]).

Замечание 4. В скалярном случае $n=1$, $\alpha=1$ функция $K(x, t)$ в (1.2) есть не что иное, как обобщенное решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) K(x, t)=p(x)\, q(t)$$

в классе $L^1(R)$, где $p(x)\, q(t)=p_i(x)\, q_i(t)$ $(i=1$ при $0\leqslant t$, $i=2$ при $t<0)$.

Замечание 5. В случае аналога уравнения Винера—Хопфа (когда в (1.2) $k_2(x)=r_2(x)=p_2(x)=q_2(x)=0$ и (1.1) рассматривается для $x>0$), определитель Δ в теореме 1.1 нужно считать равным элементу матрицы (1.5) в левом верхнем углу.

§ 2. Обращения общих интегральных операторов с почти разностно-суммарным ядром

1°. Рассмотрим интегральный оператор, действующий в $L_n^2(0, \omega)$ и определенный формулой

$$K_\omega = P_\omega + \Psi_\omega, \tag{2.1}$$

где

$$(P_\omega y)(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\omega y(t)\,[k(x-t)+r(x+t)]\,dt \tag{2.2}$$

$$(\Psi_\omega y)(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\omega y(t)\left\{\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\tau)\,p(u)\,du\,d\tau\right\}dt, \tag{2.3}$$

где элементы k'_{kl}, r'_{kl} $(1\leqslant k,\ l\leqslant n)$, p_{kl} $(1\leqslant k\leqslant \alpha,\ 1\leqslant l\leqslant n)$, q_{kl} $(1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant \alpha)$ матриц $k'(x)$, $r'(x)$, $p(x)$, $q(x)$ принадлежат, соответственно, $L^2(-\omega, \omega)$, $L^2(0, 2\omega)$, $L^2(-\omega, 2\omega)$, $L^2(0, \omega)$.

Существенную роль в дальнейшем будут играть матрицы-функции $N_k(x)$, $M_k(x)$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$, $Q(x, t)$, удовлетворяющие соотношениям (E_n — единичная матрица)

$$\begin{aligned} &K_\omega N_1 = E_n && K^*_\omega M_1 = N^*(x)\\ &K_\omega N_2 = xE_n && K^*_\omega M_2 = N^*_0(x)\\ &K_\omega N_3 = M(x) && K^*_\omega M_3 = E_n\\ &K_\omega N_4 = M_0(x) && K^*_\omega M_4 = xE_n\\ &K_\omega N_5 = p(x) && K^*_\omega M_5 = N^*_p(x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$Q(x, t) = \sum_{l=1}^{5} M^*_l(t)\,N_l(x), \tag{2.5}$$

где строки матриц N_k, M_k $(k=1, 2, \cdots, 5)$ принадлежат $L^2_n(0, \omega)$, а

$$M(x) = -[k(x)+r(x)],\quad M_0(x) = k'(x) - r'(x),$$

$$N(x) = k(-x) + r(x) + \int_0^x q(\tau)\int_{\tau-x}^{x-\tau} p(t)\,dt\,d\tau, \tag{2.6}$$

$$N_0(x) = k'(-x) + r'(x) + \int_0^x q(t)\,[p(x-t) - p(t-x)]\,dt;$$

$$N_p(x) = 2\int_0^x (t-x)\,q(t)\,dt.$$

Через $W^{(l)}_{2,n}$ обозначим совокупность l раз дифференцируемых вектор-функций $\varphi(x)$ таких, что $\varphi^{(l)}(x)\in L^2_n(0, \omega)$. На $W^{(3)}_{2,n}$ определим оператор

$$T\varphi = \varphi(0)\,N_1(x) + \varphi'(0)\,N_2(x) - \int_0^\omega \varphi''(t)\,Q(x, t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_x^\infty \varphi'(t-x)\,N_1(t)\,dt-\frac{1}{2}\varphi'(0)\int_x^\infty N_1(u)\,du+$$

$$+\frac{1}{2}\varphi''(0)\int_x^\infty\int_v^\infty N_1(u)\,du\,dv+$$

$$+\frac{1}{2}\int_x^\infty \varphi''(t-x)\,N_2(t)\,dt-\frac{1}{2}\varphi''(0)\int_x^\infty N_2(u)\,du- \tag{2.7}$$

$$-\frac{1}{2}\int_x^\infty\int_0^{\omega+x-t} \varphi'''(t-x+u)\,Q(t,u)\,du\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_x^\infty\int_{t-x}^\omega \varphi'''(x-t+u)\,Q(t,u)\,du\,dt.$$

Легко видеть, что $T\varphi\in L_n^2(0,\omega)$.

Пусть

$$(A_0y)(x)=-\int_0^x\int_0^t y(u)\,du\,dt,\quad y\in L_n^2(0,\omega). \tag{2.8}$$

Соответственно получаем

$$(A_0^*y)(x)=-\int_x^\omega\int_t^\omega y(u)\,du\,dt,\ y\in L_n^2(0,\omega). \tag{2.9}$$

2°. В работах Л. А. Сахновича [2, 3] и И. И. Кальмушевского [5] показано, что в случае разностного и разностно-суммарного ядер построение обратного оператора сводится к нахождению конечного числа функций типа N_k и M_k. Покажем, что эти результаты переносятся на случай оператора K_ω.

Справедлива следующая

Лемма 2.1. *Для любого ограниченного оператора K_ω вида (1)—(3) имеет место равенство*

$$(A_0K_\omega-K_\omega A_0^*)\,y=$$

$$=\int_0^\omega y(t)\,[M(x)+N(t)+N_0(t)\,x+tM_0(x)+N_p(t)\,p(x)]\,dt. \tag{2.10}$$

Доказательство. Как и в [5] доказывается равенство

$$(A_0P_\omega-P_\omega A_0^*)\,y=$$

$$=\int_0^\omega y(t)\,\{-[k(x)+r(x)]+[k(-t)+r(t)]\}\,dt+ \tag{2.11}$$

$$+\int_0^\infty y(t)\{[k'(-t)+r'(t)]x+t[k'(x)-r'(x)]\}\,dt.$$

Учитывая (2.3) и (2.8) имеем

$$A_0\Psi_\infty y=\int_0^\infty y(v)\int_0^v q(\tau)\left\{\int_{v-\tau}^{x+v-\tau} p(t)\,dt+\int_{x-v+\tau}^{\tau-v} p(t)\,dt\right\}d\tau dv+$$

$$+x\int_0^\infty y(v)\left\{\int_0^v q(\tau)[p(v-\tau)-p(\tau-v)]\,d\tau\right\}dv.$$

Окончательно получаем

$$A_0\Psi_\infty y=\int_0^\infty y(v)\int_0^v q(\tau)\left\{\int_{x-v+\tau}^{x+v-\tau} p(t)\,dt\right\}d\tau dv+$$

$$+\int_0^\infty y(v)\int_0^v q(\tau)\left\{\int_{\tau-v}^{v-\tau} p(t)\,dt\right\}d\tau dv+ \tag{2.12}$$

$$+x\int_0^\infty y(v)\left\{\int_0^v q(\tau)[p(v-\tau)-p(\tau-v)]\,d\tau\right\}dv.$$

Учитывая (2.3) и (2.9) имеем

$$\Psi_\infty A_0^* y=-\int_0^\infty y(v)\int_0^v q(\tau)\left\{\int_\tau^v[p(x+t-\tau)+p(x-t+\tau)]\right\}d\tau dv+$$

$$+2\int_0^\infty y(v)\left\{\int_0^v(v-t)\,q(t)\,dt\right\}p(x)\,dv.$$

Окончательно получаем

$$\Psi_\infty A_0^* y=\int_0^\infty y(v)\int_0^v q(\tau)\left\{\int_{x-v+\tau}^{x+v-\tau} p(t)\,dt\right\}d\tau dv+$$

$$+\int_0^\infty y(v)\,N_p(v)\,p(x)\,dv. \tag{2.13}$$

Из (2.11), (2.12)), (2.13) получаем утверждение леммы. Формулу (2.10) можно записать в виде

$$(A_0K_\infty-K_\infty A_0^*)\,y=(y,N^*)\,E_n+(y,N_0^*)\,xE_n+$$

$$+(y,E_n)\,M(x)+(y,tE_n)\,M_0(x)+(y,N_p^*)\,p(x). \tag{2.14}$$

Лемма 2.2. *Если существует ограниченный оператор T_ω, обратный оператору K_ω, то имеет место следующее равенство*:

$$(T_\omega A_0 - A_0^* T_\omega) y = \int_0^\omega y(t) Q(x, t) dt. \tag{2.15}$$

Доказательство леммы следует из равенства $T_\omega A_0 - A_0^* T_\omega = T_\omega (A_0 K_\omega - K_\omega A_0^*) T_\omega$, и формул (2.14), (2.4), (2.5). Операторные уравнения вида (2.15) рассматривались в работе [12]. Следующая теорема непосредственно следует из результатов, полученных в указанной работе.

Теорема 2.1. *Пусть ограниченный оператор T_ω удовлетворяет уравнению* (2.15). *Тогда справедливо равенство*

$$T_\omega y = -\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\omega y(s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \Phi(x, s) ds, \tag{2.16}$$

где

$$\Phi(x, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{x+s}^{2\omega+x-s}\int_{x-s}^{u-2\omega} Q\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv du + V(x+s), & x-s \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{x+s}^{2\omega-x+s}\int_{x-s}^{2\omega-u} Q\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv du + V(x+s), & x-s \geqslant 0, \end{cases}$$

а $V(x)$—некоторая матрица-функция такая, что $V(x) \equiv 0$ при $x \geqslant \omega$.

Таким образом, обращение оператора K_ω сводится к нахождению матриц-функций $N_k(x)$, $M_k(x) (k=1, 2, 3, 4, 5)$ и $V(x)$.

3°. В работе [4] Л. А. Сахновичем предложен метод нахождения правого обратного оператора на $W_{2,n}^{(2)}$ для оператора с матричным ядром, зависящим от разности аргументов. Этот метод, опирающийся, казалось бы существенно, на разностую структуру ядра, на самом деле может быть перенесен на случай оператора K_ω.

Теорема 2.2. *Пусть оператор K_ω, определенный по формулам* (2.1)—(2.3), *ограничен в пространстве $L_n^2(0, \omega)$ и существуют матрицы-функции $N_k(x)$, $M_k(x) (k=1, 2, 3, 4, 5)$ с элементами из $L^2(0, \omega)$, удовлетворяющие соотношениям* (2.4). *Тогда оператор T, определенный по формуле* (2.7) *на $W_{2,n}^{(3)}$, — правый обратный для оператора K_ω, т. е.*

$$K_\omega T\varphi = \varphi, \quad \varphi \in W_{2,n}^{(3)}. \tag{2.17}$$

Доказательство. Положив $L_1 = N_1$ и $L_2 = N_2$, введем матрицы-функции L_m $m=3, 4 \cdots$ рекуррентным соотношением

$$\frac{1}{m(m+1)} L_{m+2} = -\left\{ \int_0^\omega L_m(t) N(t) dt \, N_1(x) + \right.$$

$$+\int_0^\infty L_m(t)\,N_0(t)\,dt\cdot N_2(x)+\int_0^\infty L_m(t)\,dt\cdot N_3(x)+$$

$$+\int_0^\infty L_m(t)\,tdt\cdot N_4(x)+\int_0^\infty L_m(t)\,N_p(t)\,dt\cdot N_5(x)\Big| +\int_x^\infty L_m(t)\,(t-x)\,dt. \tag{2.18}$$

Действуя оператором K_m на обе части равенств (2.18) и пользуясь формулой (2.10), полагая $y=L_m$, получим

$$A_0\,K_m\,L_m=-\frac{1}{m(m+1)}\,K_m\,L_{m+2},\ m=1,2,\cdots. \tag{2.19}$$

Вспомнив теперь формулы (2.4), по индукции получим следующие соотношения:

$$K_m\,L_m=x^{m-1}\,E_n,\ m=1,2,\cdots. \tag{2.20}$$

Следуя [4], положим

$$B(x,\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^m}{m!}\,L_{m+1}. \tag{2.21}$$

Введем норму матрицы $A(x)=\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ следующим образом:

$$\|A(x)\|=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^\infty |a_{ij}|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Из соотношения (2.18) имеем

$$\|L_{m+2}\|\leqslant Cm\,(m+1)\,\|L_m\|,\ \text{т. е.}\ \|L_{m+2}\|< C^m\,(m+1)!,$$

откуда и вытекает сходимость ряда (2.21) при $|\lambda|<C^{-1}$.

Из (2.20) и (2.21) следует соотношение

$$K_m\,B(x,\lambda)=e^{i\lambda x}\,E_n. \tag{2.22}$$

Пользуясь формулами (2.18), (2.21) получим

$$B(x,\lambda)=u(x,\lambda)-\lambda^2\int_x^\infty B(t,\lambda)(t-x)\,dt, \tag{2.23}$$

где

$$u(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{5}a_i(\lambda)\,N_i(x), \tag{2.24}$$

$$a_1(\lambda)=E_n+\lambda^2\int_0^\infty B(t,\lambda)\,N(t)\,dt,$$

$$a_2(\lambda)=i\lambda E_n+\lambda^2\int_0^\infty B(t,\lambda)\,N_0(t)\,dt,\ a_3(\lambda)=\lambda^2\int_0^\infty B(t,\lambda)\,dt,$$

$$a_4(\lambda)=\lambda^2\int_0^\infty B(t,\lambda)\,tdt\ \ a_5(\lambda)=\lambda^2\int_0^\infty B(t,\lambda)\,N_p(t)\,dt, \tag{2.25}$$

Решая интегральное уравнение (2.23), получим

$$B(x, \lambda) = u(x, \lambda) - \lambda \int\limits_x^{\infty} u(t, \lambda) \sin[\lambda(t-x)]\, dt. \tag{2.26}$$

В силу аналитичности $B(x, \lambda)$, $e^{i\lambda x}$, $\sin[\lambda(t-x)]$ по λ формулы (2.22), (2.24) — (2.26), доказанные при условии $\lambda < C^{-1}$, остаются верными при всех λ.

Пользуясь (2.22) формулу (2.24) можно записать в виде

$$u(x, \lambda) = N_1(x) + i\lambda N_2(x) + \lambda^2 \int\limits_0^{\infty} e^{i\lambda t} Q(x, t)\, dt. \tag{2.27}$$

Подставляя (2.27) в формулу (2.26), получим

$$B(x, \lambda) = N_1(x) + i\lambda N_2(x) + \lambda^2 \int\limits_0^{\infty} e^{i\lambda t} Q(x, t)\, dt +$$

$$+ \frac{i\lambda}{2} \int\limits_x^{\infty} e^{i\lambda(t-x)} N_1(t)\, dt - \frac{i\lambda}{2} \int\limits_x^{\infty} e^{i\lambda(x-t)} N_1(t)\, dt - \frac{\lambda^2}{2} \int\limits_x^{\infty} e^{i\lambda(t-x)} N_2(t)\, dt +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2} \int\limits_x^{\infty} e^{i\lambda(x-t)} N_2(t)\, dt + \frac{i\lambda^3}{2} \int\limits_x^{\infty} e^{i\lambda(t-x)} \int\limits_0^{\infty} e^{i\lambda u} Q(t, u)\, du dt -$$

$$- \frac{i\lambda^3}{2} \int\limits_x^{\infty} e^{i\lambda(x-t)} \int\limits_0^{\infty} e^{i\lambda u} Q(t, u)\, du dt. \tag{2.28}$$

Введем теперь матрицы-функции

$$B_{++}(x, \lambda) = N_1(x) + i\lambda N_2(x) + \lambda^2 \int\limits_0^{\infty} e^{i\lambda t} Q(x, t)\, dt +$$

$$+ \frac{i\lambda}{2} \int\limits_x^{\infty} e^{i\lambda(t-x)} N_1(t)\, dt - \frac{i\lambda}{2} \int\limits_x^{\infty} N_1(u)\, du - \frac{\lambda^2}{2} \int\limits_x^{\infty} \int\limits_v^{\infty} N_1(u)\, du dv - \tag{2.29}$$

$$- \frac{\lambda^2}{2} \int\limits_x^{\infty} e^{i\lambda(t-x)} N_2(t)\, dt + \frac{\lambda^2}{2} \int\limits_x^{\infty} N_2(u)\, du +$$

$$+ \frac{i\lambda^3}{2} \int\limits_x^{\infty} \int\limits_0^{\infty+x-t} e^{i\lambda(t-x+u)} Q(t, u)\, du dt - \frac{i\lambda^3}{2} \int\limits_x^{\infty} \int\limits_{t-x}^{\infty} e^{i\lambda(x-t+u)} Q(t, u)\, du dt,$$

$$B_{+-}(x, \lambda) = \frac{i\lambda^3}{2} \int\limits_x^{\infty} \int\limits_{\infty+x-t}^{\infty} e^{i\lambda(t-x+u)} Q(t, u)\, du dt, \tag{2.30}$$

2—424

$$B_-(x, \lambda)=\frac{\lambda^3}{2}\left\{-\int\limits_x^\omega e^{i\lambda(x-t)}\int\limits_t^\omega\int\limits_v^\omega N_1(u)\,du\,dv\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_x^\omega e^{i\lambda(x-t)}\int\limits_t^\omega N_2(u)\,du\,dt+\int\limits_x^\omega\int\limits_0^{t-x} e^{i\lambda(x-t+u)}\,Q(t, u)\,du\,dt,\right. \tag{2.31}$$

$$B_+(x, \lambda)=B_{++}(x, \lambda)+B_{+-}(x, \lambda). \tag{2.32}$$

Сравнивая (2.28), (2.31), (2.32), получаем

$$B(x, \lambda)=B_+(x, \lambda)+B_-(x, \lambda). \tag{2.33}$$

Подобно [4] доказывается равенство

$$K_\omega B_-(x, \lambda)=0,\ K_\omega B_+(x, \lambda)=e^{i\lambda x}E_n. \tag{2.34}$$

Далее из (2.29), (2.30), (2.32), (2.34) следует

$$\frac{1}{|\lambda|^3}\|e^{-i\omega\lambda}B_{+-}(x, \lambda)\|=O(1),\ \lambda\to\infty,\ \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0,$$

$$\frac{1}{|\lambda|^3}\|e^{-i\omega\lambda}B_{++}(x, \lambda)\|=O(1),\ \lambda\to\infty,\ \operatorname{Im}\lambda\leqslant 0,$$

$$K_\omega(e^{-i\omega\lambda}B_{+-}(x, \lambda))=e^{i\lambda(x-\omega)}-K_\omega(e^{-i\lambda\omega}B_{++}(x, \lambda)),$$

откуда, в силу аналитичности $\frac{1}{\lambda^3}K_\omega(e^{-i\omega\lambda}B_{+-}(x, \lambda))$ по λ, вытекают равенства

$$K_\omega B_{+-}(x, \lambda)=0,\ K_\omega B_{++}(x, \lambda)=e^{i\lambda x}E_n. \tag{2.35}$$

Из формул (2.7) и (2.29) следует

$$B_{++}(x, \lambda)=Te^{ix\lambda}E_n. \tag{2.36}$$

Согласно (2.35) и (2.36) верно соотношение

$$K_\omega T e^{i\lambda x}E_n=e^{i\lambda x}, \tag{2.37}$$

из которого следует справедливость теоремы 2.2.

4°. Полученные результаты в основном распространяются на ядра „мозаичного“ типа (сравнить с [8]).

Пусть заданы два набора чисел $0=a_1<a_2<\cdots<a_{m_1+1}=\omega$, $0=b_1<b_2<\cdots<b_{m_2+1}=\omega$ и матриц-функций $K_{ij}(x, t)$ $(1\leqslant j\leqslant m_1$, $1\leqslant i\leqslant m_2)$, заданных на прямоугольниках $[b_i, b_{i+1}]\times[a_j, a_{j+1}]$ и имеющих вид

$$K_{ij}(x, t)=k_{ij}(x-t)+r_{ij}(x+t)+\int\limits_{a_j}^{t}\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q_{ij}(\tau)\,p_{ij}(u)\,du\,d\tau, \tag{2.38}$$

$$b_i\leqslant x\leqslant b_{i+1},\ a_j\leqslant t\leqslant a_{j+1},$$

где элементы матриц $k'_{ij}(x)$, $r'_{ij}(x)$, $p_{ij}(x)$, $q_{ij}(x)$ — непрерывные функции, соответственно, на отрезках $[b_i-a_{j+1}, b_{i+1}-a_j]$,

$$[b_i + a_j,\ b_{i+1} + a_{j+1}],\ [b_i - a_{j+1},\ b_{i+1} + a_{j+1}],\ [a_j,\ a_{j+1}].$$

Рассмотрим интегральный оператор K'_ω, действующий в $L_n^2(0, \omega)$:

$$(K'_\omega y)(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\omega y(t)\, K(x, t)\, dt, \tag{2.39}$$

где $K(x, t) = K_{ij}(x, t)$ на каждом прямоугольнике

$$[b_i,\ b_{i+1}] \times [a_j,\ a_{j+1}] \quad (1 \leqslant i \leqslant m_2,\ 1 \leqslant j \leqslant m_1).$$

Для этого оператора верны утверждения, аналогичные результатам 2° § 2, Их доказательство, с помощью более громоздких вычислений, проводится по той же схеме, что и в 2° § 2. Приведем здесь только конечные результаты.

Введем следующие обозначения:

$$H_0(k, t) = \Big\{ \sum_{j=1}^{m_1} \chi_{a_j, j+1}(t) \frac{\partial}{\partial x} K_{kj}(b_k, t) -$$

$$- \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{m_1} \chi_{a_j, j+1}(t) \left[\frac{\partial}{\partial x} K_{lj}(b_{l+1}, t) - \frac{\partial}{\partial x} K_{lj}(b_l, t) \right] \Big\},$$

$$H_1(k, t) = - \sum_{i=1}^{k-1} (b_{i+1} - b_i) \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{j=1}^{m_1} \chi_{a_j, j+1}(t) \left[\frac{\partial}{\partial x} K_{lj}(b_{l+1}, t) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x} K_{lj}(b_l, t) \right],$$

$$H_2(k, t) = - \sum_{l=1}^{k-1} b_{l+1} \sum_{j=1}^{m_1} \chi_{a_j, j+1}(t) \left[\frac{\partial}{\partial x} K_{lj}(b_{l+1}, t) - \frac{\partial}{\partial x} K_{lj}(b_l, t) \right],$$

$$H_3(k, t) = \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{m_1} \chi_{a_j, j+1}(t) \left[b_{l+1} \frac{\partial}{\partial x} K_{lj}(b_{l+1}, t) - b_l \frac{\partial}{\partial x} K_{lj}(b_l, t) \right], \tag{2.40}$$

$$H_4(k, t) = - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{m_1} \chi_{a_j, j+1}(t) [K_{lj}(b_{l+1}, t) - K_{lj}(b_l, t)],$$

$$1 \leqslant k \leqslant m_2.$$

$$H_0(t) = \sum_{k=1}^{m_2} \chi_{b_k, k+1}(t)\, H_0(k, t), \tag{2.41}$$

$$H(t) = \sum_{k=1}^{m_2} \chi_{b_k, k+1}(t) \Big\{ - b_k H_0(k, t) + \sum_{i=1}^{4} H_i(k, t) + K(b_k, t) \Big\}, \tag{2.42}$$

$$H_j^1(t) = - \sum_{k=1}^{m_2} \chi_{b_k, k+1} \Big\{ k'_{kj}(t - a_{j+1}) - r'_{kj}(x + a_{j+1}) -$$

$$- \int_{a_j}^{a_{j+1}} q_{kj}(\tau) [p_{kj}(t + a_{j+1} - \tau) + p_{kj}(t - a_{j+1} + \tau)]\, d\tau \Big\}, \tag{2.43}$$

$$H_j^2(t) = \sum_{k=1}^{m_2} \chi_{b_k, k+1}(t)\, \{k'_{kj}(t - a_j) - r'_{kj}(t + a_j)\},$$

$$H_j^3(t)=\sum_{k=1}^{m_2}\chi_{b_k,k+1}(t)\{k_{kj}(t-a_{j+1})+r_{kj}(t+a_{j+1})-$$

$$-\int_{a_j}^{a_{j+1}}\int_{\tau}^{a_{j+1}}q_{kj}(\tau)[p_{kj}(t+u-\tau)-p_{kj}(t-u+\tau)]\,du\,d\tau\},$$

$$H_j^4(t)=-\sum_{k=1}^{m_2}\chi_{b_k,k+1}(t)\{k_{kj}(t-a_j)+r_{kj}(t+a_j)\},$$

$$H_j^p(t)=-2\sum_{k=1}^{m_2}\chi_{b_k,k+1}(t)\left\{\chi_{a_j,j+1}(t)\int_{a_j}^{t}(t-v)\,q_{kj}(v)\,dv+\chi_{a_{j+1}}(t)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{a_j}^{a_{j+1}}(t-v)\,q_{kj}(v)\,dv\right\},$$

$$p_j(t)=\sum_{k=1}^{m_2}\chi_{b_k,k+1}(t)\,p_{kj}(t),\ 1\leqslant j\leqslant m_1,$$

где $\chi(t)$ — функция Хевисайда, а $\chi_{a_j}(t)=\chi(t-a_j)$, $\chi_{a_j,j+1}(t)=\chi(t-a_j)\chi(a_{j+1}-t)$, $\chi_{b_k,k+1}(t)=\chi(t-b_k)\chi(b_{k+1}-t)$. Введем функции вида

$$\begin{array}{ll}
K_\infty' N_{-1}=E_n & K_\infty'^{*} M_{-1}=H^*(x)\\
K_\infty' N_0=xE_n & K_\infty'^{*} M_0=H_0^*(x)\\
K_\infty' N_{1j}=H_j^1(x) & K_\infty'^{*} M_{1j}=\chi_{a_{j+1}}(x)(x-a_{j+1})\\
K_\infty' N_{2j}=H_j^2(x) & K_\infty'^{*} M_{2j}=\chi_{a_j}(x)(x-a_j)\\
K_\infty' N_{3j}=H_j^3(x) & K_\infty'^{*} M_{3j}=\chi_{a_{j+1}}(x)\\
K_\infty' N_{4j}=H_j^4(x) & K_\infty'^{*} M_{4j}=\chi_{a_j}(x)\\
K_\infty' N_{5j}=p_j(x) & K_\infty'^{*} M_{5j}=H_j^{p*}(x)\\
 & 1\leqslant j\leqslant m_1,
\end{array}\qquad(2.44)$$

$$Q'(x,t)=M_{-1}^*(t)N_{-1}(x)+M_0^*(t)N_0(t)+\sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{m_1}M_{kj}^*(t)N_{kj}(x).\qquad(2.45)$$

Для K_∞' имеет место следующее равенство:

$$(\dot A_0K_\infty-K_\infty A_0^*)\,y=$$

$$=\int_0^\infty y(t)\left\{H(t)+H_0(t)x+\sum_{j=1}^{m_1}\chi_{a_{j+1}}(t)(t-a_{j+1})H_j^1(x)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{m_1}\chi_{a_j}(t)(t-a_j)H_j^2(x)+\sum_{j=1}^{m_1}\chi_{j+1}(t)H_j^3(x)+\sum_{j=1}^{m_1}\chi_j(t)H_j^4(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m_1} H_j^p(t)\, p_j(x)\Big\}\, dt. \tag{2.46}$$

Из этого фундаментального соотношения (см. [2]) следует

Теорема 2.3. *Если существует ограниченный оператор T'_{ω}, обратный оператору K'_{ω}, то*

$$(T'_{\omega} A_0 - A_0^{*}\, T'_{\omega})(x) = \int_0^{\omega} y(t)\, Q'(x, t)\, dt \tag{2.47}$$

и справедливо равенство

$$T'_{\omega}\, y = -\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{\omega} y(s)\, \frac{\partial^2}{\partial s^2}\, \Phi'(x, s)\, ds, \tag{2.48}$$

где

$$\Phi'(x, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{x+s}^{2\omega+x-s}\int_{x-s}^{u-2\omega} Q'\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv\,du + V(x+s), & x-s \leqslant 0, \\[2ex] \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{x+s}^{2\omega-x+s}\int_{x-s}^{2\omega-u} Q'\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv\,du + V(x+s). & x-s > 0, \end{cases}$$

а $V(x)$ — некоторая матрица-функция, такая, что $V(x) \equiv 0$ при $x \geqslant \omega$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.XII.1983

Ա. Հ. ՔԱՄԱԼՅԱՆ, Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Համարյա գումար-տարբերակային կորիզով ինտեգրալ օպերատորների շրջման մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում են ինտեգրալ օպերատորներ, որոնց կորիզները բավարարում են (0. 2) հավասարմանը։ § 1-ում բացահայտվում են նորմալ լուծելիության պայմանները, իսկ § 2-ում կառուցվում է հակադարձ օպերատորը։ Արդյունքներն ընդհանրացնում են Լ. Ա. Սախնովիչի, Ի. Ի. Կալմուշևսկիի և այլոց աշխատանքները։

A. G. KAMALIAN, A. B. NERSESIAN. *About the inversion of the integral operators with the almost sum-difference kernel* (summary)

In the paper the integral operators with kernel satisfying the equation (0.2) are considered. In § 1 a condition of the normal solvability is found, and in § 2 the inverse operator is constructed. The results generalizate those of L. A. Sahnovich, J. J. Calmushevsky and others.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Д. Гахов. Ю. И. Черский.* Уравнение типа свертки, М., «Наука», 1978.
2. *Л. А. Сахнович.* О подобии операторов. Сиб. мат. журн., № 4, 1972, 868—883.
3. *Л. А. Сахнович.* Об интегральном уравнении с ядром, зависящим от разности аргументов. Мат. исслед., Кишинев, 8, № 2, 1973, 138—146.

4. *Л. А. Сахнович*. Системы уравнений с разностными ядрами, Украинский мат. журн.. 32, № 1, 1980, 61—68.
5. *И. И. Кальмушевский*. О решении некоторых интегральных уравнений с ядрами, зависящими от суммы и разности аргументов, Диф. уравн., 16, № 5, 1980, 941—943.
6. *T. Kailath, A. Vieira, M. Morf*. Inverser of Toeplitz operators, innovations and orthogonal polynomials, SIAM Review, 20, № 1, 1978, 106—119.
7. *T. Kailath, S. Y. Kung, M. Morf*. Displasement ranks of matrix, Bull. Amer. Mat. Soc. (N. S), 1, № 5, 1979, 769—7 3.
8. *А. Б. Нерсесян*. Структура резольвенты некоторых интегральных операторов, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVII, № 6, 1982, 442—463.
9. *А. Б. Нерсесян, Н. А. Чернявская*. Об обращении интегральных операторов с почти разностным ядром, ДАН Арм.ССР, 79, 3, 1984.
10. *М. Г. Крейн*. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументво, УМН, 13, 5 (83), 1958, 3—120.
11. *Г. С. Литвинчук*. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., «Наука», 1977.
12. *Л. Н. Дудко, И. И. Кальмушевский*. Об условиях подобия оператору *I* в терминах характеристической матрицы-функции, Изв. вузов, «Математика», № 4 (167). 1976, 38—46.
13. *Ю. И. Черский*. Интегральное уравнение, обратное уравнение Винера-Хопфа и его дискретный аналог, ДАН УССР, серия А, № 6, 1982, 29—32.