ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 2, 1984 Математика

УДК 517.538 (927)

М. М. ДЖРБАШЯН

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Содержание

§ 0. Введение.
§ 1. Распределение нулей и асимптотическое поведение одного семейства целых функций экспоненциального типа.
§ 2. Весовые пространства целых функций экспоненциального типа.
§ 3. Интерполяционные разложения в весовых классах целых функций экспоненциального типа.
§ 4. Интерполяционные разложения в весовых классах целых функций второго порядка.
§ 5. Построение биортогональных систем целых функций и их базисность.
§ 6. Задача типа Коши и особая краевая задача в комплексной области.

§ 0. Введение

0.1. Излагать здесь более или менее полный обзор и четкие формулировки основных результатов данного обширного исследования мы сочли излишним, и не только потому, что оно было бы сопряжено с немалыми трудностями и заняло бы много места.

Мы нашли более целесообразным избрать другое, более краткое, и, по нашему мнению, более обозримое и доступное для первого чтения изложение введения данной статьи. Оно позволит глубже осветить сущность и взаимную связь поставленных нами задач, нашедших в статье свое полное решение.

Но мы считаем нужным сначала же привести формулировки двух принципиально важных теорем, идейно связанных с данным исследованием и, по существу, служащих его основой.

В исследованиях автора, подытоженных в его монографии [1], на основании замечательных асимптотических свойств целых функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n/\rho)}\quad(\mu>0,\ \rho>0)\tag{0.1}$$

была построена завершенная теория гармонического анализа для произвольной конечной системы лучей, исходящих из одной точки $z=0$ комплексной плоскости—далеко идущий аналог теории Фурье-Планшереля.

(а) Пусть $p \geqslant 1$ — любое целое число и Γ_p—совокупность лучей

$$l_k: \left\{ \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{p} k,\ 0<|z|<+\infty \right\} (k=0, 1, \cdots, 2p-1),$$

разбивающих плоскость z на $2p$ угловых областей раствора π/p, с общей вершиной $z=0$.

Обозначим через $L_2^{(\omega)}(\Gamma_p)$ класс измеримых на Γ_p функций $\Phi(z)$, для которых конечна величина

$$\int_{\Gamma_p} |\Phi(z)|^2 |z|^{\omega} |dz| = \sum_{k=0}^{2p-1} \int_0^{+\infty} |\Phi(re^{-i\frac{\pi}{p}k})|^2 r^{\omega}\, dr, \tag{0.2}$$

при заданном значении параметра $\omega \in (-1, 1)$.

Тогда в качестве важного следствия нашей общей теоремы 4.4 из [1], после введения более удобных обозначений и надлежащих упрощений, вытекает первое из упомянутых выше нами предложений.

Теорема I. *Пусть $\Phi(z)$ — произвольная функция из класса $L_2^{(\omega)}(\Gamma_p)$ и параметр*

$$\mu = \frac{1+\omega+p}{2p}.$$

Пусть, далее

$$\hat{\Phi}_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\tau} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\tau r}-1}{-ir} \Phi(e^{-i\frac{\pi}{p}k} r^{\frac{1}{p}})\, r^{\mu-1}\, dr \tag{0.3}$$

— преобразования Фурье для совокупности функций

$$\{\Phi(e^{-i\frac{\pi}{p}k} r^{\frac{1}{p}})\, r^{\mu-1}\}_0^{2p-1} \subset L_2(0, +\infty). \tag{0.4}$$

Тогда:

1°. *Почти для всех точек $z = re^{i\varphi} \in \Gamma_p$ справедлива формула обращения*

$$\Phi(e^{i\varphi} r^{1/p}) =$$

$$= r^{1-\mu} \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{d}{dr} \left\{ r^{\mu} \int_0^{+\infty} E_p(e^{i\frac{\pi}{p}\left(k+\frac{1}{2}\right)} r^{\frac{1}{p}} e^{i\varphi} \tau^{\frac{1}{p}};\ \mu+1)\, \tau^{\mu-1} \varphi_k(\tau)\, d\tau \right\} \tag{0.5}$$

и имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{\Gamma_p} |\Phi(z)|^2 |z|^{\omega} |dz| = \pi p \sum_{k=0}^{2p-1} \int_0^{+\infty} |\varphi_k(\tau)|^2\, d\tau. \tag{0.6}$$

При этом, почти всюду на $(0, +\infty)$ функции системы $\{\varphi_k(\tau)\}_0^{2p-1}$ определяются из соотношений

$$\varphi_k(\tau)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}p}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\widehat{\Phi}_{k+1}(-\tau)-e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\widehat{\Phi}_k(\tau)\right\} \qquad (0.7)$$

$$(k=0,\ 1,\cdots,\ 2p-1),$$

где следует положить $\widehat{\Phi}_{2p}(\tau)=\widehat{\Phi}_0(\tau)$.

2°. *Обозначая*

$$\Phi_\sigma(z)=\sum_{k=0}^{2p-1}\int_0^\sigma E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{\rho}\left(k+\frac{1}{2}\right)}z\tau^{\frac{1}{\rho}};\ \mu\right)\tau^{\mu-1}\varphi_k(\tau)\,d\tau, \qquad (0.8)$$

будем иметь

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\sum_{k=0}^{2p-1}\int_0^{+\infty}\left|\Phi\left(e^{-i\frac{\pi}{\rho}k}r\right)-\Phi_\sigma\left(e^{-i\frac{\pi}{\rho}k}r\right)\right|^2r^\omega\,dr=0. \qquad (0.9)$$

Как непосредственно следует из простых формул

$$E_1(z;\ 1)=e^z,\ E_1(z;\ 2)=\frac{e^z-1}{z},$$

известная теорема Фурье-Планшереля о преобразовании Фурье в классе $L_2(-\infty,\ +\infty)$ является весьма специальным случаем теоремы I для случая совокупности лучей

$$\Gamma_1=(\arg z=0)\cup(\arg z=\pi),$$

когда, т. о. $p=1$, а $\mu=1$.

(б) В упомянутой уже книге [1] были установлены также теоремы большой общности о параметрическом представлении целых функций произвольного конечного порядка $\rho\geqslant 1/2$ и нормального типа $\leqslant\sigma$, интегрируемых в квадрате модуля и с весом r^ω $(-1<\omega<1)$ вдоль заданной системы лучей (см. [1], теоремы 6.11—6.16).

Приведем теперь формулировку одной из этих теорем — второго из упомянутых вначале важных предложений, лежащих в основе данной работы, также являющегося далеко идущим обобщением другой широко известной теоремы — теоремы Винера-Пэли.

Обозначим через $W_\sigma^{(\rho)}\left(\omega;\ \frac{\pi}{p}\{k\}\right)$ класс целых функций целого порядка $p\geqslant 1$ и типа $\leqslant\sigma$, для которых для данного значения $\omega\in(-1,\ 1)$

$$\int_0^{+\infty}\left|f\left(e^{-i\frac{\pi}{p}k}r\right)\right|^2r^\omega\,dr<+\infty\ (k=0,\ 1,\cdots,\ 2p-1). \qquad (0.10)$$

Теорема II. 1°. *Класс* $W_\sigma^{(\rho)}\left(\omega;\ \frac{\pi}{p}\{k\}\right)$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *допускающих представление вида*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{2p-1}\int_0^\sigma E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{\rho}\left(k+\frac{1}{2}\right)}z\tau^{\frac{1}{\rho}};\ \mu\right)\tau^{\mu-1}\varphi_k(\tau)\,d\tau, \qquad (0.11)$$

где $\mu = \dfrac{1+\omega+p}{2p}$ *и* $\{\varphi_k(\tau)\}_0^{2p-1}$ *— произвольные функции из класса* $L_2(0, \sigma)$.

2°. *В представлении* (0.11) *функции* $\{\varphi_k(\tau)\}_0^{2p-1}$ *единственны и почти всюду на* $(0, \sigma)$ *определяются из формул*

$$\varphi_k(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2\pi p}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\widehat{f}_{k+1}(-\tau) - e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\widehat{f}_k(\tau)\right\} \qquad (0.12)$$

$$(k = 0, 1, \cdots, 2p-1),$$

где

$$\widehat{f}_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\tau}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau r}-1}{-ir} f\left(e^{-i\frac{\pi}{p}k}\, r^{\frac{1}{p}}\right) r^{\mu-1}\, dr \qquad (0.13)$$

$$(k = 0, 1, \cdots, 2p-1)$$

почти всюду на $(-\infty, +\infty)$, *причем следует положить* $\widehat{f}_{2p}(\tau) \equiv \widehat{f}_0(\tau)$.

Поскольку $E_1(z; 1) = e^z$, то здесь в специальном случае, когда $p = \mu = 1$, содержится упомянутая выше теорема Винера-Пэли, согласно которой:

Множество W_σ *целых функций экспоненциального типа* $\leqslant \sigma$ *из класса* $L_2(-\infty, +\infty)$ *совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt}\varphi(t)\, dt = \int_0^{\sigma} e^{iz\tau}\varphi_0(\tau)\, d\tau + \int_0^{\sigma} e^{-iz\tau}\varphi_1(\tau)\, d\tau, \qquad (0.14)$$

где функции $\varphi(t) \in L_2(-\sigma, \sigma)$ *и* $\varphi_k(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ $(k = 0, 1)$ *произвольны.*

0.2. (а) В комплексной форме ортонормальная на отрезке $[-\sigma, \sigma]$ система функций Фурье

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{i\frac{\pi x}{\sigma}k}\right\}_{-\infty}^{+\infty} \qquad (0.15)$$

порождается из следующей краевой задачи.

Если λ — произвольный параметр, то задача Коши

$$\Omega'(z) = \lambda\Omega(z),\ \Omega(0) = 1/\sqrt{2\sigma}, \qquad (0.16)$$

имеет единственное решение

$$\Omega(z) \equiv \Omega(z; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{\lambda z},\ z \in \mathbf{C}. \qquad (0.17)$$

Рассматривая решение $\Omega(z; \lambda)$ этой задачи Коши лишь на отрезке $[-\sigma, \sigma]$ вещественной оси, поставим для него краевое условие его периодичности

$$\Omega(-\sigma; \lambda) - \Omega(\sigma; \lambda) = 0. \qquad (0.18)$$

Тогда мы получим собственные числа и собственные функции краевой задачи (0.16)—(0.18):

$$\lambda_k = i\frac{\pi}{\sigma}k,\ \Omega_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}e^{i\frac{\pi x}{\sigma}k}\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots), \tag{0.19}$$

образующих, как хорошо известно, полную ортонормальную систему в классе функций $L_2(-\sigma, \sigma)$.

Но указанным общеизвестным положениям теории рядов Фурье можно придать несколько иные формулировки. Приведем их здесь, поскольку именно аналогичными формулировками нам будет более удобно пользоваться в процессе установления и изложения ряда основных результатов данной работы.

Пусть на интервале $(0, \sigma)$ мы имеем две произвольные двумерные вектор-функции из $L_2(0, \sigma)$:

$$y(x) = \{y_k(x)\}_0^1,\ z(x) = \{z_k(x)\}_0^1.$$

Определим их скалярное произведение, положив

$$[y, z]_2 = \sum_{k=0}^{1}\int_0^\sigma y_k(x)\,\overline{z_k(x)}\,dx. \tag{0.20}$$

Далее, на $(0, \sigma)$ определим последовательность двумерных вектор-функций

$$\varphi_n(x) = \{\varphi_{k,n}(x)\}_0^1\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots), \tag{0.21}$$

положив

$$\varphi_{0,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}e^{i\frac{\pi n}{\sigma}x},\ \varphi_{1,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}e^{-i\frac{\pi n}{\sigma}x}. \tag{0.21'}$$

Тогда легко видеть, что система вектор-функций (0.21) ортонормальна в принятой нами метрике (0.20), т. е.

$$[\varphi_n,\ \varphi_m]_2 = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases}\quad (n,\ m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots). \tag{0.22}$$

Далее, взамен данной функции $\Phi(x) \in L_2(-\sigma, \sigma)$ можно определить двумерную вектор-функцию, положив $\Phi(x) = \{\Phi_k(x)\}_0^1 \in L_2(0, \sigma)$, где

$$\Phi_0(x) = \Phi(x),\ \Phi_1(x) = \Phi(-x),\ x \in (0, \sigma).$$

Тогда нетрудно убедиться в том, что общеизвестные свойства системы Фурье (0.15) могут быть сформулированы таким образом:

Для любой двумерной вектор-функции $\Phi(x) = \{\Phi_k(x)\}_0^1 \in L_2(0, \sigma)$ *вектор-разложение*

$$\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\Phi,\ \varphi_n]_2\varphi_n(x),\ x \in (0, \sigma), \tag{0.23}$$

сходится в метрике (0.20), *т. е. ряды*

$$\Phi_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\Phi,\ \varphi_n]_2\varphi_{k,n}(x)\quad (k=0,\ 1) \tag{0.23'}$$

сходятся к своим суммам в метрике $L_2(0, \sigma)$.

Отметим, что эти известные предложения теории рядов Фурье могут быть трактованы как дискретные аналоги теоремы Планшереля в классе $L_2(-\infty, +\infty)$, либо ее переформулировки для двухкомпонентных вектор-функций $\Phi(x) = |\Phi_k(x)|_0^1$ класса $L_2(0, +\infty)$. Более того, как известно (см., напр., [2], §§ 1.1 и 3.2), сама теорема Планшереля может быть установлена с привлечением основных положений теории рядов Фурье в классах $L_2(-\sigma, \sigma)$, путем предельного перехода, когда $\sigma \to +\infty$.

(б) Последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ с конечной нормой

$$\|\{a_k\}\|_p = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \quad (1 < p < +\infty)$$

отнесем к классу l^p.

Среди общих результатов, установленных впервые Б. Я. Левиным [3], [4] (см. также [5] и [6]) об интерполяционных рядах, порождаемых нулями целых функций типа синуса, в качестве частного случая содержится известная теорема Коши—Котельникова в следующей формулировке.

Теорема III. *Если* $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^p (1 < p < +\infty)$, *то ряд*

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_k \frac{\sin \sigma z}{z - \frac{\pi}{\sigma} k} \quad (0 < \sigma < +\infty) \tag{0.24}$$

равномерно сходится в любом круге $|z| \leqslant R < +\infty$, *а также по норме* $L_p(-\infty, +\infty)$, *и дает взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства* l^p *на все пространство целых функций* $f(z)$ *экспоненциального типа* $\leqslant \sigma$ *с интерполяционными данными* $f\left(\frac{\pi}{\sigma} k\right) = a_k$ $(-\infty < k < +\infty)$ *и с нормой*

$$\|f\|_p \asymp \|\{a_k\}\|_p. \tag{0.25}$$

На основании сформулированной выше теоремы Винера-Пэли нетрудно установить, что свойство полноты и замкнутости ортонормальной системы Фурье (0.15) и утверждения интерполяционной теоремы III в случае $p = 2$ равносильны.

Отметим также, что ввиду двойного неравенства (0.25) из теоремы III вытекает, что система целых функций экспоненциального типа σ

$$\left\{ \left(x - \frac{\pi}{\sigma} k \right)^{-1} \sin \sigma x \right\}_{-\infty}^{+\infty} \subset L_2(-\infty, +\infty)$$

является базисом Рисса* в классе целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ с конечной нормой $\|f\|_2$.

0.3. Выше, с одной стороны, была отмечена связь между ортонормальной и базисной в $L_2(-\sigma, \sigma)$ системами Фурье (0.15) или

* Различные эквивалентные определения и важнейшие свойства базисов Рисса изложены, например, в книге [7].

(0.21)—(0.21′) и порождающей ее простой краевой задачей (0.17)—(0.18). С другой стороны, было отмечено также, что посредством теоремы Винера-Пэли можно установить равносильность интерполяционной теоремы III с теоремой разложимости функций из класса $L_2(-\sigma, \sigma)$ по системе Фурье.

Таким образом, все отмеченные нами и, на первый взгляд, разнородные результаты тесно связаны между собой и идейно, и по существу. Теперь мы в состоянии в общих чертах сформулирсвать основную проблему, полному решению которой посвящена данная работа.

В пространстве $L_2(0, \sigma)$ построить явный аппарат базисных систем вектор-фучкций произвольного четного числа измерений $2p\,(p \geqslant 1)$, аналогичный двумерной базисной вектор-системе Фурье (0.21)—(0.21′).

Переходя ниже к беглому обзору развитого в работе метода решения поставленной проблемы, мы сочли более целесообразным не придерживаться порядка изложения параграфов самой статьи.

(а) Явный вид искомых биортогональных вектор-систем и их базисность в пространстве $L_2(0, \sigma)$ вектор-функций, с тем же четным числом компонент, устанавливается в § 5.

При этом сначала же отметим, что лишь ради более компактной формулировки и упрощения доказательств приведенных в работе результатов, нами без какого-либо ограничения общности рассматриваются вектор-пространства $L_2(0, \sigma)$ $(0 < \sigma < +\infty)$ и разложения по вектор-системам биортогональных в метриках этих пространств в том случае, когда их размерность — не произвольное четное число $2p\,(p \geqslant 1)$, а равно 4, т. е. минимальной четной размерности после двумерных вектор рядов Фурье.

Доказательство базисности систем четырехмерных вектор-функций в пространстве $L_2(0, \sigma)$ функций той же размерности, во-первых, существенно опирается на нашу теорему II о параметрическом представлении классов $W_0^{(p)}\left(\omega; \frac{\pi}{p}\{k\}\right)$ целых функций порядка p. Во-вторых, мы опираемся также на установленный нами в § 4 далеко идущий аналог интерполяционной теоремы III, чего мы коснемся еще несколько дальше.

Установленные в § 5 результаты, по существу, являются дискретными аналогами нашей основной теоремы I, так же, как и вектор-ряд Фурье (0.23) является дискретным аналогом интеграла Фурье—Планшереля.

(б) Однако, в заключительном § 6 вскрывается другой глубокий факт, показывающий, что аналогия биортогональных в надлежащей метрике четырехкомпонентных вектор-систем из § 5 с биортогональной в метрике (0.20) вектор-системой Фурье на самом деле имеет значительно более глубокие корни.

Суть дела заключается в том, что системы биортогональных вектор-функций из § 5 существенно связаны с особой краевой зада-

чей. Эта задача ставится для определенного стандартного интегро-дифференциального оператора „порядка $1/2$", со свободным параметром λ, и рассматривается на совокупности отрезков

$$e_+\{\sqrt{\sigma}\}=[-\sigma,\ \sigma]\cup[-i\sigma,\ i\sigma]$$

комплексной плоскости z. Она порождает счетное множество простых собственных чисел $\{\lambda_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ (кроме двукратного числа $\lambda_0=0$), лежащих на координатных осях и симметричных относительно начала $\lambda=0$ плоскости λ.

Наконец, соответствующая система собственных функций нашей краевой задачи, как оказывается, после простой замены переменной в точности совпадает с одной из базисных систем вектор-функций, построенной в § 5.

Таким образом, мы приходим к одному из важнейших результатов данного исследования, заключающемся в том, что система собственных и присоединенных вектор-функций по существу совершенно необычной краевой задачи, притом в комплексной области, является базисом в надлежащем классе вектор-функций в $L_2(0,\ \sqrt{\sigma})$. Более того, после надлежащей нормировки эти системы будут базисами Рисса.

По поводу § 6 отметим, что впервые в давней совместной с А. Б. Нерсесяном работе автора [8] была рассмотрена краевая задача типа Штурма—Лиувилля на конечном отрезке $[0,\ l]$ вещественной оси для интегро-дифференциальных операторов дробного порядка, существенно отличных от рассмотренных нами в данной работе. В той работе, пользуясь методом контурного интеграла, причем ценою значительных усилий, нам удалось установить только равносходимость с рядами Фурье разложений функций из $L_1(0,\ l)$ по системе собственных функций поставленной краевой задачи.

(в) Наконец, об интерполяционных теоремах, в частности, об установленной в § 4 теореме, занимающей одно из центральных мест для метода нашего исследования.

Выше уже было отмечено, что Б. Я. Левиным и его последователями были установлены важные обобщения теоремы III, когда в ней узлы интерполяции $\left\{\frac{\pi}{\sigma}k\right\}_{-\infty}^{+\infty}$ заменяются нулями функций типа синуса или нулями более общих классов целых функций экспоненциального типа.

В статье § 3, а затем § 4 посвящены установлению интерполяционных теорем несколько иной природы — для весовых классов целых функций.

Еще в нашей, по существу, одной из первых в этом направлении работе, совместной с С. Г. Рафаэляном [9], было установлено обобщение теоремы III при тех же узлах интерполяции $\left\{\frac{\pi}{\sigma}k\right\}_{-\infty}^{+\infty}$, но для классов целых функций экспоненциального типа $\leqslant\sigma$ из весовых классов $W_2^{\rho,\varkappa}$ $(1<p<+\infty,\ -1<\varkappa<p-1)$ с нормой

$$\|f\|_{p,\,\alpha} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^\alpha \, dx\right)^{1/p} < +\infty$$

и для весовых последовательностей $l^{p,\,\alpha}$ с нормой

$$\|\{a_k\}\|_{p,\,\alpha} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^\alpha |a_k|^p\right)^{1/p} < +\infty.$$

Но, казалось бы, небольшое отклонение в заметке [9] от условий теоремы III — введение весов в соответствующих пространствах, привело к значительным осложнениям и потребовало наметить доказательства ряда нелегких лемм с привлечением некоторых тонких теорем функционального анализа. Годом раньше, в менее четкой и полной форме, наметки доказательств части этих лемм, а также формулировка интерполяционной теоремы, в частности, для класса функций $W_\sigma^{p,\,\alpha}$, но с узлами уже в нулях целой функции

$$S_\nu(\sigma z) = \sigma z E_{1/2}(-\sigma^2 z^2;\ 1+\nu),$$

были приведены в заметках С. Г. Рафавляна [10] и [11], а затем в его диссертации [12].

В § 3 статьи мы сочли целесообразным привести развернутое изложение полного доказательства указанной теоремы интерполяции. Но это было сделано не только ради полноты и стройности изложения нашей работы в целом. Дело в том, что для безукоризненности доказательства указанной теоремы интерполяции в классе $W_\sigma^{p,\,\alpha}$ оказалось необходимым, следуя схеме работы [9], в текст §§ 2 и 3 включить несколько новых лемм, а также иногда значительно видоизменить и улучшить намеченные ранее способы их доказательств, отмеченных ранее в указанных выше работах.

В § 4 прибавляется еще одно важное звено в изложении статьи. Рассматривается класс $W_{2,\,\sigma}^{p,\,\omega}$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < \omega < p-1)$ целых функций второго порядка с конечной нормой

$$\|f;\ e\{+\}\|_{p,\,\omega} = \left(\int_{e\{+\}} |f(z)|^p |z|^\omega |dz|\right)^{1/p} < +\infty,$$

где $e\{+\} = (-\infty, +\infty) \cup (-i\infty, +i\infty)$ — совокупность координатных осей.

Для класса $W_{2,\,\sigma}^{p,\,\omega}$ устанавливается интерполяционная теорема с узлами в нулях целой функции

$$S_\nu(\sigma z^2) = \sigma z^2 E_{1/2}(-\sigma^2 z^4;\ 1+\nu).$$

Именно эта теорема позволяет, опираясь на нашу общую теорему II типа Винера—Пэли, установить, что построенные далее в § 5 биортогональные вектор-системы являются базисами в пространстве четырехкомпонентных вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$.

Наконец, в § 1 заложена основа всей данной работы в целом. Здесь устанавливается ряд тонких результатов о распределении ну-

лей целой функции $S_\nu(z)$, служащих узлами в интерполяционных теоремах §§ 3 и 4, а также порождающих собственные числа краевой задачи из § 6.

Часть результатов данной статьи, но в менее общем и завершенном виде, была анонсирована автором в заметке [13]. Содержание § 1, публикуемое здесь впервые, позволило автору в данной работе придать теоремам указанной заметки, а также заметок [10] и [11] (§§ 2, 3), по нашему мнению, предельно завершенные формулировки.

§ 1. Распределение нулей и асимптотическое поведение одного семейства целых функций экспоненциального типа

1.1 (а) В давней работе Г. Пойа [14] была исследована природа распределения нулей целых функций экспоненциального типа, представимых интегралами вида

$$U(z)=\int_0^1 f(t)\cos zt\,dt,\quad V(z)=\int_0^1 f(t)\sin zt\,dt. \tag{1.1}$$

Ниже мы воспользуемся следующей собирательной теоремой, утверждения которой установлены в § 1 и § 6 работы [14].

Теорема А. *Пусть функция $f(t)$ определена на интервале $(0,1)$ и удовлетворяет условиям: она положительна и возрастает на $(0,1)$, и, кроме того, $f(t)\in L_1(0,1)$.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. *Функции $U(z)$ и $V(z)$ имеют только вещественные и простые корни.*

2°. *Будучи четной функцией, $U(z)$ не имеет нулей на интервале $[0,\pi/2)$, а ее положительные нули расположены только внутри интервалов $(\pi k-\pi/2,\ \pi k+\pi/2)(k=1,2,\cdots)$ — по одному в каждом из них.*

У нечетной же функции $V(z)$ в интервале $[0,\pi)$ содержится только один нуль — $z=0$, а внутри интервалов $(\pi k,\ \pi(k+1))$ $(k=1,2,\cdots)$ содержатся ее остальные положительные корни, вновь по одному в каждом из них.

Мы применим этот результат для выявления природы и распределения нулей семейства целых функций типа Миттаг—Леффлера вида

$$E_{1/2}(-z^2;\ 1+\nu)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{\Gamma(1+\nu+2k)},\quad \nu>-1. \tag{1.2}$$

Во-первых, отметим, что поскольку сама функция

$$E_{1/2}(z;\ \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+2k)},\quad \mu>0, \tag{1,2'}$$

целая и имеет дробный порядок $\rho=1/2$, то у нее счетное множество нулей.

Во-вторых, уже из одного нашего результата о нулях функции $E_{1/2}(z; \mu)$ (см. [1], стр. 139—142) непосредственно вытекает, что у четной целой функции экспоненциального типа $E_{1/2}(-z^2; 1+\nu)$ при $-1<\nu<2$ все нули с достаточно большим модулем вещественные, простые и асимптотически близки к нулям функции $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu\right)$. Докажем теперь лемму.

Лемма 1.1. 1°. *Для значений параметра*

$$0<\nu<2 \tag{1.3}$$

функция $E_{1/2}(-z^2; 1+\nu)$ *имеет только вещественные и простые нули, симметрично расположенные относительно точки* $z=0$.

2°. *Все нули функции* $E_{1/2}(-z^2; 1+\nu)$ *при* $0<\nu<1$ *расположены по одному только внутри интервалов*

$$\Delta_k^{(1)}=\left(\pi k-\frac{\pi}{2},\ \pi k+\frac{\pi}{2}\right)\ (k=\pm 1,\ \pm 2,\cdots), \tag{1.4}$$

а если $\nu=0$, *то только на их концах.*

При $1<\nu<2$ *корни ее расположены по одному только внутри интервалов*

$$\Delta_k^{(2)}=\begin{cases}(\pi k,\ \pi(k+1));\ k=1,\ 2,\cdots,\\ (\pi(k-1),\ \pi k);\ k=-1,\ -2,\cdots,\end{cases} \tag{1.5}$$

а если $\nu=1$, *то только на их концах.*

Доказательство. Из определения (1.2) нашей функции непосредственно получим

$$E_{1/2}(-z^2; 1)=\cos z,\ E_{1/2}(-z^2; 2)=\frac{\sin z}{z}, \tag{1.6}$$

откуда следуют утверждения леммы для значений параметра $\nu=0$ и $\nu=1$.

Далее, пользуясь разложением (1.2), легко установить справедливость формулы

$$E_{1/2}(-z^2;\ \mu+\alpha)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}E_{1/2}(-z^2t^2;\ \mu)\,t^{\mu-1}\,dt\ (\mu>0,\ \alpha>0).$$

Положив в ней сначала $\mu=1$, $\alpha=\nu$ $(0<\nu<1)$, а затем $\mu=2$, $\alpha=\nu-1$ $(1<\nu<2)$ и воспользовавшись формулами (1.6), соответственно получим

$$E_{1/2}(-z^2;\ 1+\nu)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^1(1-t)^{\nu-1}\cos zt\,dt\ (0<\nu<1),$$

$$z\,E_{1,2}(-z^2;\ 1+\nu)=\frac{1}{\Gamma(\nu-1)}\int_0^1(1-t)^{\nu-2}\sin zt\,dt\ (1<\nu<2). \tag{1.17}$$

Но обе функции — как $(1-t)^{\nu-1}$ $(0<\nu<1)$, так и $(1-t)^{\nu-2}$ $(1<\nu<2)$ — возрастающие при $0<t<1$ и из $L_1(0,1)$. Поэтому все утверждения леммы следуют из интегральных представлений (1.7) на основании теоремы А.

В заключение отметим, что для значений параметра $\nu=-1$ и $\nu=2$ утверждение леммы заведомо не верно.

В самом деле, как легко следует из (1.2), все нули функций

$$E_{1/2}(-z^2;\ 0)=-z\sin z,\quad E_{1/2}(-z^2;\ 3)=2\frac{\sin\frac{z^2}{2}}{z^2}$$

вещественные, но не простые.

В связи с этим остается открытым вопрос—верна ли лемма для значений параметра $-1<\nu<0$?

(б) Определим теперь целую функцию

$$S_\nu(z)=zE_{1,2}(-z^2;\ 1+\nu),\quad S_1(z)=\sin z \tag{1.8}$$

порядка $\rho=1$ и типа 1.

Во-первых, согласно лемме 1.1, при $0\leqslant\nu<2$ все нули $S_\nu(z)$ вещественные, простые и, очевидно, расположены симметрично относительно ее нуля $x_{\nu,0}=0$.

Во-вторых, полагая, что последовательность всех нулей $\{x_{\nu,k}\}_{-\infty}^{+\infty}$ функции $S_\nu(z)$ занумерована в порядке $x_{\nu,k}<x_{\nu,k+1}$ $(-\infty<k<+\infty)$, наряду с очевидным равенством $x_{\nu,-k}=-x_{\nu,k}$ $(0\leqslant k<+\infty)$, мы можем утверждать:

1) При $0<\nu<1$

$$x_{\nu,k}\in\Delta_k^{(1)}=\left(\pi k-\frac{\pi}{2},\ \pi k+\frac{\pi}{2}\right)\ (-\infty<k<+\infty), \tag{1.9}$$

а если $\nu=0$, то

$$x_{0,0}=0,\quad x_{0,k}=\pi k-\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}k\ (k=\pm1,\pm2,\cdots); \tag{1.9'}$$

2) При $1<\nu<2$

$$x_{0,0}=0,\quad x_{\nu,k}\in\Delta_k^{(2)}=\begin{cases}(\pi k,\ \pi(k+1)), & 1\leqslant k<+\infty,\\ (\pi(k-1),\ \pi k), & -\infty<k\leqslant-1,\end{cases} \tag{1.10}$$

а если $\nu=1$, то

$$x_{1,k}=\pi k\ (-\infty<k<+\infty). \tag{1.10'}$$

Из этих утверждений непосредственно следует, что при $0<\nu<2$

$$|x_{\nu,k}|\asymp|k|\ (-\infty<k<+\infty),$$

т. е. отношение величин, стоящих слева и справа (при $k=0$ они оба равны нулю), лежат между двумя положительными постоянными, не зависящими от k*.

---

* Всюду дальше вместо двух оценок такого рода мы будем употреблять символ $\asymp$.

1.2. Перейдем теперь к асимптотическим свойствам функции $S_\nu(z)$ $(0 \leqslant \nu < 2)$, ее нулей $\{x_{\nu,k}\}_{-\infty}^{+\infty}$, а также последовательности чисел $\{S'_\nu(x_{\nu,k})\}_{-\infty}^{+\infty}$, отличных от нуля, согласно лемме 1.1.

(а) С этой целью приведем сначала некоторые необходимые сведения и обозначения.

Как известно, целые функции типа Миттаг—Леффлера $E_\rho(z; \mu)$ произвольного порядка $\rho > 0$ и типа 1 определяются посредством разложения

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}, \quad -\infty < \mu < +\infty.$$

Поэтому, принимая во внимание определение (1.8) функции $S_\nu(z)$, легко убедиться, что справедлива формула

$$S_\nu(z) = \frac{1}{2i}\{E_1(iz; \nu) - E_1(-iz; \nu)\}. \tag{1.8'}$$

Для любого $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ и $0 < \varepsilon < 1$ обозначим через $\gamma_\varepsilon(\alpha) = \partial G_\varepsilon(\alpha)$, пробегаемую в отрицательном направлении границу области

$$G_\varepsilon(\alpha) = \{\zeta: |\arg \zeta| < \alpha, \ \varepsilon < |\zeta| < +\infty\},$$

и пусть $G_\varepsilon^*(\alpha) = \mathbf{C} \setminus \overline{G}_\varepsilon(\alpha)$ — дополнительная к ней область. Заметим при этом, что при $\varepsilon = 0$ наши области $G_\varepsilon(\alpha)$ и $G_\varepsilon^*(\alpha)$ соответственно переходят во взаимно-дополнительные угловые области

$$\Delta(\alpha) = \{\zeta: |\arg \zeta| < \alpha, \ 0 < |\zeta| < +\infty\},$$
$$\Delta^*(\alpha) = \{\zeta: |\pi - \operatorname{Arg} \zeta| < \pi - \alpha, \ 0 < |\zeta| < +\infty\},$$

общая граница которых — совокупность двух лучей

$$\gamma_0(\alpha) = \{\zeta: \arg \zeta = \pm \alpha, \ 0 \leqslant |\zeta| < +\infty\},$$

пробегаемая в отрицательном к области $\Delta(\alpha)$ направлении.

После введения этих обозначений обратимся к хорошо известному для любого $\rho > 1/2$ интегральному представлению функции $E_\rho(z; \nu)$ (см. [1], лемму 3.2), записав его для случая, когда $\rho = 1$. Тогда для любого $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ и $0 < \varepsilon < 1$ будем иметь

$$E_1(w; \nu) = \begin{cases} w^{1-\nu} e^w + I_\varepsilon(w; \alpha), & w \in G_\varepsilon(\alpha) \\ I_\varepsilon(w; \alpha), & w \in G_\varepsilon^*(\alpha), \end{cases} \tag{1.11}$$

где

$$I_\varepsilon(w; \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon(\alpha)} \frac{e^\zeta \zeta^{1-\nu}}{\zeta - w} d\zeta. \tag{1.12}$$

Отметив, далее, что при условии $0 \leqslant \nu < 2$ интеграл

$$I_0(w; \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0(\alpha)} \frac{e^\zeta \zeta^{1-\nu}}{\zeta - w} d\zeta \tag{1.12'}$$

абсолютно сходится, если только $w \in \gamma_0(\alpha)$, переходом к пределу в (1.11) при $\varepsilon \to +0$ получим также

$$E_1(w;\ \nu) = \begin{cases} w^{1-\nu} e^w + I_0(w;\ \alpha), & w \in \Delta(\alpha), \\ I_0(w;\ \alpha), & w \in \Delta^*(\alpha). \end{cases} \tag{1.11'}$$

(б) Докажем теперь три леммы.

Лемма 1.2. 1°. *Функция* $S_\nu(x)$ *при условии* $0 \leqslant \nu < 2$ *допускает представление вида*

$$S_\nu(x) = x^{1-\nu} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu\right) + J_\nu(x),\ x \in (0, +\infty),$$

$$S_\nu(x) = -|x|^{1-\nu} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu\right) + J_\nu(x),\ x \in (-\infty, 0), \tag{1.13}$$

где

$$J_\nu(x) = \frac{x}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{e^{i\zeta} \zeta^{1-\nu}}{\zeta^2 + x^2}\, d\zeta,\ 0 < |x| < +\infty, \tag{1.13'}$$

а контур $\gamma_0 = \gamma_0(3\pi/4)$ *— это совокупность двух лучей* $\arg \zeta = \pm 3\pi/4$.

2°. *При том же условии* $0 \leqslant \nu < 2$ *справедливы асимптотические формулы*

$$S_\nu(x) = x^{1-\nu} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu\right) + O(x^{-1}),\ x \to +\infty,$$

$$S_\nu(x) = -|x|^{1-\nu} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu\right) + O(x^{-1}),\ x \to -\infty, \tag{1.14}$$

в которых главными членами будут первые слагаемые.

Доказательство. 1°. Заметим, что обе полупрямые $(i0, +i\infty)$ и $(-i\infty, i0)$ лежат в области $\Delta(3\pi/4)$, и поэтому, когда $z = x$ $(0 < |x| < +\infty)$ в формуле (1.8') значения функций $E_1(ix;\ \nu)$ и $E_1(-ix;\ \nu)$ могут быть взяты из их представления (1.11'). Поступая так, будем иметь

$$S_\nu(x) = \frac{1}{2i}\{E_1(ix;\ \nu) - E_1(-ix;\ \nu)\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\{(ix)^{1-\nu} e^{ix} - (-ix)^{1-\nu} e^{-ix}\} + J_\nu(x),\ 0 < |x| < +\infty,$$

где, как легко видеть

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left\{I_0\left(ix;\ \frac{3\pi}{4}\right) - I_0\left(-ix;\ \frac{3\pi}{4}\right)\right\}.$$

Отсюда и следуют обе формулы (1.13)—(1.13') леммы.

2°. Займемся оценкой интеграла $J_\nu(x)$, заметив, что на бесконечных лучах $\arg \zeta = \pm 3\pi/4$, образующих контур γ_0 интегрирования, в (1.13') при $0 < |x| < +\infty$

$$\left|\frac{e^{i\zeta} \zeta^{1-\nu}}{\zeta^2 + x^2}\right| \leqslant \frac{e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} r^{1-\nu}}{|\pm ir^2 + x^2|} \leqslant x^{-2} e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} r^{1-\nu},\ 0 < r < +\infty.$$

Таким образом, мы получили оценку

$$|J_\nu(x)| \leqslant \frac{|x|^{-1}}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} r^{1-\nu}\,dr,\quad 0<|x|<+\infty, \tag{1.13''}$$

откуда и из тождеств (1.13)—(1.13′) вытекают асимптотические формулы (1.14) леммы.

Введем в рассмотрение области

$$D_\pm = \left\{z: \left|\arg z \mp \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{4},\ 1<|z|<+\infty\right\}, \tag{1.15}$$

соответственно принадлежащие верхней и нижней полуплоскостям плоскости z.

Лемма 1.3. *Для функции $S_\nu(z)$ при $0 \leqslant \nu < 2$ имеют место двусторонние оценки*

$$|S_\nu(z)| \asymp (1+|z|)^{1-\nu}\ e^{|\operatorname{Im} z|},\ z \in \overline{D} = \overline{D}_+ \cup \overline{D}_-, \tag{1.16}$$

причем в них надлежащие постоянные множители зависят только от ν.

Доказательство. Преобразованием $w = iz$ области $D_\mp$ переходят в области $D^*_\pm = iD_\mp$, лежащие соответственно в правой и левой полуплоскостях плоскости w. При этом очевидно, что

$$D^*_- \subset \Delta^*\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ и } D^*_+ \subset \Delta\left(\frac{\pi}{4}\right). \tag{1.17}$$

Заметим теперь, что поскольку в представлении (1.11′)—(1.12′) функции $E_1(w;\nu)$ параметр $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ произвольный, то при оценке интеграла $I_0(w;\alpha)$ мы можем варьировать его, притом следующим образом.

В случае $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, очевидно, будем иметь

$$|\zeta - w| \geqslant |w| \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right), \text{ при } w \in \overline{D}^*_-,\ \zeta \in \gamma_0(\alpha),$$

а также

$$|\zeta - w| > |w| \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right), \text{ при } w \in \overline{D}^*_+,\ \zeta \in \gamma_0(\alpha).$$

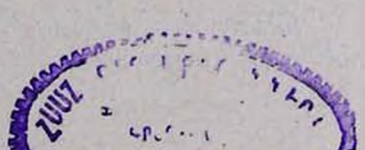
Поэтому в обоих случаях из представления (1.12′) функции $I_0(w;\alpha)$ следует оценка

$$|I_0(w;\alpha)| \leqslant \frac{a(\alpha)}{|w|},\ w \in \overline{D}^*, \tag{1.18}$$

где $D^* = D^*_+ \cup D^*_-$ и

$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi}\left|\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)\right|^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-|\cos\alpha| r}\, r^{1-\nu}\,dr < +\infty$$

—постоянная, не зависящая от w.



С другой стороны, в силу (1.17) из (1.11′) имеем

$$E_1(w;\nu)=\begin{cases} w^{1-\nu}e^{w}+I_0(w;\alpha), & w\in\overline{D}_+^*,\\ I_0(w;\alpha), & w\in\overline{D}_-^*\end{cases}$$

и

$$E_1(-w;\nu)=\begin{cases}(-w)^{1-\nu}e^{-w}+I_0(-w;\alpha), & w\in\overline{D}_-^*,\\ I_0(-w;\alpha), & w\in\overline{D}_+^*.\end{cases}$$

Поэтому имеем также

$$\Phi(w)\equiv\frac{1}{2i}\{E_1(w;\nu)-E_1(-w;\nu)\}=$$

$$=\frac{1}{2i}\begin{cases} w^{1-\nu}e^{w}+I_0(w;\alpha)-I_0(-w;\alpha), & w\in\overline{D}_+^*,\\ -(-w)^{1-\nu}e^{-w}+I_0(w;\alpha)-I_0(-w;\alpha), & w\in\overline{D}_-^*.\end{cases}\tag{1.19}$$

Теперь из (1.19) в силу оценки (1.18) получим неравенство

$$|\Phi(w)|\leqslant\frac{1}{2}|w|^{1-\nu}e^{|\operatorname{Re}w|}+\frac{a(\alpha)}{|w|},\quad w\in\overline{D}_+^*\cup\overline{D}_-^*=\overline{D}^*.$$

Но поскольку $0\leqslant\nu<2$, то отсюда, очевидно, следует существование постоянной $C_1>0$, такой, что

$$|\Phi(w)|\leqslant C_1(1+|w|)^{1-\nu}e^{|\operatorname{Re}w|},\ w\in\overline{D}^*.$$

Далее, из того же представления (1.19) функции $\Phi(w)$, вновь пользуясь оценкой (1.18), мы получим

$$\frac{1}{2}|w|^{1-\nu}e^{\operatorname{Re}w}\leqslant|\Phi(w)|+\frac{a(\alpha)}{|w|},\quad w\in\overline{D}_+^*,$$

$$\frac{1}{2}|w|^{1-\nu}e^{-\operatorname{Re}w}\leqslant|\Phi(w)|+\frac{a(\alpha)}{|w|},\quad w\in\overline{D}_-^*.$$

Так как $\operatorname{Re}w>0$ при $w\in\overline{D}_-^*$, и $\operatorname{Re}w<0$ при $w\in\overline{D}_-^*$, то последние два неравенства можно объединить и записать для функции $\Phi(w)$ такое неравенство

$$|\Phi(w)|\geqslant\frac{1}{2}|w|^{1-\nu}e^{|\operatorname{Re}w|}-\frac{a(\alpha)}{|w|},\quad w\in\overline{D}_+^*\cup\overline{D}_-^*=\overline{D}^*.$$

Отсюда, поскольку $0\leqslant\nu<2$, мы приходим к оценке вида

$$|\Phi(w)|\geqslant C_2(1+|w|)^{1-\nu}e^{|\operatorname{Re}w|},\ w\in\overline{D}^*.$$

Итак, для функции $\Phi(w)$ справедливо утверждение

$$|\Phi(w)|\asymp(1+|w|)^{1-\nu}e^{|\operatorname{Re}w|},\ w\in\overline{D}^*.\tag{1.20}$$

Для завершения доказательства леммы нам остается лишь заметить, что обратным преобразованием $z=-iw$ области D_+^* переходят в первоначальные области $D_\pm=-iD_\mp^*$, функция $\Phi(w)$ — в функцию $S_\nu(z)=\Phi(iz)$ и, наконец, двойное неравенство (1.20) — в утверждение (1.16) леммы.

Следующая лемма устанавливается способом, по существу, аналогичным примененному при доказательстве леммы 1.3.

Лемма 1.3′. *Для функции* $S_\nu(z)$ *при* $0 \leqslant \nu < 2$ *и при любом* γ $(0 < \gamma < +\infty)$ *справедливы двусторонние оценки*

$$|S_\nu(x \pm i\gamma)| \asymp |x \pm i\gamma|^{1-\nu}, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{1.16′}$$

причем в них надлежащие постоянные множители зависят только от ν *и* γ.

Доказательство. Преобразованием $w = iz$ прямые $x \pm i\gamma$ $(-\infty < x < +\infty)$ переходят в прямые $\mp\gamma + ix$ $(-\infty < x < +\infty)$, лежащие соответственно в левой и правой полуплоскостях плоскости w.

Обозначим через

$$\Gamma_\pm(\gamma) = \{\pm\gamma + ix\colon |x| \geqslant 2\gamma\}$$

совокупность лучей, лежащих на прямых $\pm\gamma + ix$ $(-\infty < x < +\infty)$ соответственно, а через

$$\delta_\pm(\gamma) = \{\pm\gamma + ix\colon |x| \leqslant 2\gamma\}$$

— дополнительные к ним отрезки этих прямых. При этом очевидно, что

$$\Gamma_+(\gamma) \subset \Delta\left(\frac{3\pi}{4}\right), \quad \Gamma_-(\gamma) \subset \Delta\left(\frac{3\pi}{4}\right). \tag{1.17′}$$

Заметим теперь, что поскольку в представлениях (1.11′) и (1.12′) функции $E_1(w; \nu)$ параметр $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ произвольный, то, в частности, можем положить $\alpha = 3\pi/4$. В этом случае из простых геометрических соображений заключаем, что

$$|\zeta - w| \geqslant \frac{|w|}{\sqrt{10}}; \quad w \in \Gamma_+(\gamma) \cup \Gamma_-(\gamma), \ \zeta \in \gamma_0\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

Поэтому из представления (1.12′) функции $I_0(w; \alpha)$ при $\alpha = 3\pi/4$ следует оценка

$$|I_0(w; \alpha)| \leqslant \frac{a}{|w|}, \ w \in \Gamma(\gamma), \tag{1.18′}$$

где $\Gamma(\gamma) = \Gamma_+(\gamma) \cup \Gamma_-(\gamma)$ и

$$a = \frac{\sqrt{10}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2}r}\, r^{1-\nu}\, dr < +\infty$$

— постоянная, не зависящая от w.

С другой стороны, в силу (1.17′) и (1.11′) мы имеем представления

$$E_1(w; \nu) = w^{1-\nu} e^w + I_0\left(w; \frac{3\pi}{4}\right), \quad (w \in \Gamma(\gamma))$$

$$E_1(-w; \nu) = (-w)^{1-\nu} e^{-w} + I_0\left(-w; \frac{3\pi}{4}\right).$$

Поэтому для функции

$$\Phi(w) = \frac{1}{2i}\{E_1(w; \nu) - E_1(-w; \nu)\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{w^{1-\nu}e^{w} - (-w)^{1-\nu}e^{-w} + I_0\left(w; \frac{3\pi}{4}\right) - I_0\left(-w; \frac{3\pi}{4}\right)\right\} \qquad (1.19')$$

$$w \in \Gamma(\gamma),$$

в силу (1.19) и (1.18′) получим неравенства

$$|\Phi(w)| \leqslant |w|^{1-\nu}e^{\gamma} + \frac{a}{|w|}, \quad w \in \Gamma_+(\gamma) \cup \Gamma_-(\gamma) = \Gamma(\gamma).$$

Но поскольку $0 \leqslant \nu < 2$, то отсюда следует существование постоянной $C_1 = C_1(\nu, \gamma)$, такой, что

$$|\Phi(w)| \leqslant C_1 |w|^{1-\nu}, \quad w \in \Gamma(\gamma).$$

Далее, из приведенных выше представлений (1.19′) функции $\Phi(w)$, вновь пользуясь оценкой (1.18′), мы получим

$$|\Phi(w)| > \frac{1}{2}e^{\gamma}|w|^{1-\nu} - \frac{a}{|w|}, \quad w \in \Gamma(\gamma),$$

и, аналогично, в силу условия $0 \leqslant \nu < 2$, приходим к оценке вида

$$|\Phi(w)| \geqslant C_2 |w|^{1-\nu}, \quad w \in \Gamma(\gamma),$$

где $C_2 = C_2(\nu, \gamma)$ не зависит от w.

Итак, для функции $\Phi(w)$ справедливо утверждение

$$|\Phi(w)| \asymp |w|^{1-\nu}, \quad w \in \Gamma(\gamma). \qquad (1.20')$$

С другой стороны, поскольку $S_\nu(z) = \Phi(iz)$, то функция $|\Phi(w)\, w^{1-\nu}|$ непрерывна на отрезках $\delta_\pm(\gamma)$ и отлична от нуля. Поэтому

$$|\Phi(w)| \asymp |w|^{1-\nu}, \quad w \in \delta_\pm(\gamma),$$

откуда и из (1.20′) следуют оценки

$$|\Phi(w)| \asymp |w|^{1-\nu}, \quad w = \pm\gamma + ix \ (-\infty < x < +\infty). \qquad (1.20'')$$

Наконец, обратным преобразованием $z = -iw$ прямые $w = \mp\gamma + ix$ $(-\infty < x < +\infty)$ переходят в первоначальные прямые $z = x \pm i\gamma$ $(-\infty < x < +\infty)$, функция $\Phi(w)$ — в функцию $S_\nu(z) = \Phi(iz)$ и, наконец, двойное неравенство (1.20″) — в утверждение (1.16′).

Лемма 1.4. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $-1 < \varkappa < p - 1$ *и* $\frac{1+\varkappa}{p} < \nu < 1 + \frac{1+\varkappa}{p}$. *Если, как и выше,* $\{x_{\nu,k}\}_{-\infty}^{+\infty}$ *— суть нули функции* $S_\nu(z)$, *то*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{S_\nu(x)}{x - x_{\nu,k}}\right|^p |x|^{\varkappa}\, dx < +\infty, \quad -\infty < k < +\infty, \qquad (1.21)$$

а вместе с тем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S_\nu(x)|^p |x|^{\varkappa}\, dx = +\infty. \qquad (1.22)$$

Доказательство. Во-первых, для данного $k \in (-\infty, +\infty)$ и $R > |x_{\nu, k}|$ очевидно, что

$$\int_{-R}^{R} \left| \frac{S_\nu(x)}{x - x_{\nu, k}} \right|^p |x|^\varkappa \, dx < +\infty.$$

Во-вторых, из асимптотических формул (1.14) леммы 1.2 следует, что при том же значении $k \in (-\infty, +\infty)$ и $R > 0$ существует постоянная $C_k(R) > 0$ такая, что

$$\left| \frac{S_\nu(x)}{x - x_{\nu, k}} \right|^p |x|^\varkappa \leqslant C_k(R) |x|^{\varkappa - \nu p}, \quad |x| \geqslant R.$$

Наконец, так как $\varkappa - \nu p < -1$, то имеем также

$$\int_{|x| > R} \left| \frac{S_\nu(x)}{x - x_{\nu, k}} \right|^p |x|^\varkappa \, dx < +\infty,$$

и, тем самым, конечность интеграла (1.21) доказана.

Чтобы установить расходимость интеграла (1.22), нам следует отметить, что, во-первых, если $0 \leqslant \nu < 2$, $\varkappa \leqslant 1$, то легко установить, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left| \cos\left(x - \frac{\pi}{2} \nu \right) \right|^p}{x^\alpha} \, dx = +\infty. \tag{1.23}$$

Во-вторых, обращаясь, например, к первой из формул (1.13) леммы 1.2, напишем неравенство

$$x^{1-\nu} \left| \cos\left(x - \frac{\pi}{2} \nu \right) \right| \leqslant |J_\nu(x)| + |S_\nu(x)|, \; 1 \leqslant x < +\infty,$$

откуда следует, что при любом $R > 1$

$$2^{-p} \int_1^R \left\{ x^{1-\nu} \left| \cos\left(x - \frac{\pi}{2} \nu \right) \right| \right\}^p x^\varkappa \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_1^R |J_\nu(x)|^p x^\varkappa \, dx + \int_1^R |S_\nu(x)|^p x^\varkappa \, dx. \tag{1.24}$$

Но из неравенства (1.13″) имеем $|J_\nu(x)| \leqslant C x^{-p}$ $(1 \leqslant x < +\infty)$, и поэтому интеграл

$$\int_1^{+\infty} |J_\nu(x)|^p x^\varkappa dx \leqslant C \int_1^{+\infty} x^{\varkappa - p} \, dx < +\infty, \tag{1.25}$$

ввиду условия $-1 < \varkappa < p - 1$.

Интеграл же слева в (1.24) можем записать в виде (1.23), где $\alpha = (\nu - 1) p - \varkappa$ и $\alpha < 1$, ввиду условия $\nu < 1 + \frac{1 + \varkappa}{p}$.

Наконец, переходя к пределу в неравенстве (1.24) при $R \to +\infty$, в силу (1.23) и (1.25) приходим ко второму из утверждений леммы (1.22).

(в) В заключение параграфа докажем две леммы об асимптотическом поведении нулей $\{x_{\nu,k}\}$ функции $S_\nu(z)$ $(0 \leqslant \nu < 2)$ и последовательности чисел $\{S'_\nu(x_{\nu,k})\}$.

Лемма 1.5. *При* $0 < \nu < 1$ *или при* $1 < \nu < 2$ *справедлива асимптотическая формула*

$$x_{\nu,k} = \pi k + \frac{\pi}{2}(\nu - 1)\operatorname{sign} k + O(|k|^{\nu-2}),\ |k| \to +\infty, \tag{1.26}$$

а при $\nu = 0$ *или* $\nu = 1$, *согласно* (1.9′) *и* (1.10′),

$$x_{0,0} = 0,\ x_{0,k} = \pi k - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} k\ (k = \pm 1, \pm 2, \cdots); \tag{1.27}$$

$$x_{1,k} = \pi k\ (-\infty < k < +\infty).$$

Доказательство. Учитывая, что $x_{\nu,-k} = -x_{\nu,k}$, асимптотическое равенство (1.26) достаточно установить лишь для значений $k = 1, 2, \cdots$. Положив в первой из формул (1.14) леммы 1.2 (2°)

$$x_{\nu,k} = \pi k + (\nu - 1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_k\ (k = 1, 2, \cdots)$$

и заметив, что $S_\nu(x_{\nu,k}) = 0$, мы получим

$$x_{\nu,k}^{1-\nu}\cos\left(\pi k - \frac{\pi}{2} + \varepsilon_k\right) = O(x_{\nu,k}^{-1}),\ k \to +\infty.$$

Но из приведенных в заключение п. 1.1 формул (1.9)—(1.9′) и (1.10)—(1.10′), как там же было отмечено, вытекает, что $|x_{\nu,k}| \asymp |k|$. Поэтому предыдущее асимптотическое равенство запишется в виде

$$\sin\varepsilon_k \sim \varepsilon_k = O(|k|^{\nu-2}),\ |k| \to +\infty,$$

что приводит нас к формуле (1.26). Случаи же, когда $\nu = 0$ или $\nu = 1$, и соответствующие им явные формулы (1.27) для нулей $\{x_{0,k}\}$ и $\{x_{1,k}\}$ были отмечены нами ранее.

Лемма 1.6. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{|k|\to+\infty} |x_{\nu,k}|^{\nu-1}\,|S'_\nu(x_{\nu,k})| = 1. \tag{1.28}$$

Доказательство. Запишем первую из формул (1.13) леммы 1.2 в виде

$$x^{\nu-1}S_\nu(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu\right) + x^{\nu-1}J_\nu(x),\ x \in (0, +\infty),$$

и продифференцируем ее; получим тождество

$$(\nu - 1)x^{\nu-2}S_\nu(x) + x^{\nu-1}S'_\nu(x) =$$

$$= -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu\right) + (\nu - 1)x^{\nu-2}J_\nu(x) + x^{\nu-1}J'_\nu(x),\ 0 < x < +\infty. \tag{1.29}$$

Согласно неравенству (1.13″)

$$|J_\nu(x)| \leqslant C_1 x^{-1} \ (1 \leqslant x < +\infty),$$

и из самого определения (1.13′) функции $J_\nu(x)$ для $J_\nu'(x)$ легко следует оценка вида

$$|J_\nu'(x)| \leqslant \frac{2x^2}{\pi}\left|\int_{\gamma_0} \frac{e^{\zeta}\zeta^{1-\nu}}{(\zeta^2+x^2)^2}\,d\zeta\right| \leqslant C_2 x^{-2} \ (1 \leqslant x < +\infty),$$

если поступить точно так же, как и при доказательстве леммы 1.2.

Таким образом, из тождества (1.29) следует, что при $x \to +\infty$

$$(\nu-1)\,x^{\nu-2}S_\nu(x) + x^{\nu-1}S_\nu'(x) =$$

$$= -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu\right) + O(x^{\nu-3}).$$

Положив здесь $x = x_{\nu,k}$ и заметив, что $S(x_{\nu,k}) = 0$, в силу асимптотической формулы (1.26) мы получим

$$x_{\nu,k}^{\nu-1}S_\nu'(x_{\nu,k}) = -\sin\left[\pi k - \frac{\pi}{2} + O(k^{\nu-2})\right] + O(k^{\nu-3}) =$$

$$= (-1)^k \cos[O(k^{\nu-2})] + O(k^{\nu-3}), \quad k \to +\infty. \tag{1.30}$$

Ввиду того, что $x_{\nu,-k} = -x_{\nu,k}$ $(1 \leqslant k < +\infty)$, а $S_\nu'(x)$, очевидно, четная функция, из (1.30) и условия $\nu < 2$ следует предельное соотношение (1.28) леммы.

§ 2. Весовые пространства целых функций экспоненциального типа

2.1. Обозначим через $W_\sigma^{p,\varkappa}$ $(1 < p < \infty, \ -1 < \varkappa < +\infty)$ множество целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\varkappa} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^\varkappa dx\right)^{1/p} < +\infty. \tag{2.1}$$

В этом параграфе будет установлен ряд важных для дальнейшего изложения данной работы предложений о свойствах пространств $W_\sigma^{p,\varkappa}$, которые имеют и самостоятельный интерес.

(а) Приведем сначала некоторые хорошо известные предварительные сведения, необходимые нам на протяжении всего параграфа.

1°. Если $\varphi(x) \in L_p(-\infty, +\infty)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$, то функция Стеклова

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \varphi(t)\,dt, \quad h > 0, \tag{2.2}$$

непрерывна, равномерно ограничена на всей оси $-\infty < x < +\infty$ и обладает свойствами

$$\|\varphi_h\|_{p,\,0} = \|\varphi_h\|_p \leqslant \|\varphi\|_p,$$

$$\lim_{h\to 0} \|\varphi - \varphi_h\|_p = 0, \quad \lim_{h\to 0} \|\varphi_h\|_p = \|\varphi\|_p \tag{2.3}$$

(см. [15], гл. XVIII).

2°. Пусть функция $F(z)$ аналитична в полуплоскости $G^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$, непрерывна вплоть до ее границы и экспоненциального типа, т. е.

$$\limsup_{r\to+\infty} \{r^{-1} \ln M_F(r)\} \leqslant \sigma, \quad M_F(r) = \max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi} \{|F(re^{i\varphi})|\}.$$

Тогда из неравенства

$$|F(x)| \leqslant M, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2.4}$$

следует неравенство

$$|F(z)| \leqslant Me^{\sigma \operatorname{Im} z}, \quad z \in G^+. \tag{2.4'}$$

Напомним лишь, что это утверждение можно получить, если применить уточненный принцип Фрагмена—Линделёфа к функции

$$F_\varepsilon(z) = \exp\{-i(\sigma+\varepsilon)z\} F(z); \quad \varepsilon > 0, \quad z \in G^+,$$

а затем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ (см., например, [16], стр. 188, а также [17], стр. 211).

3°. Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в полуплоскости G^+, непрерывная вплоть до ее границы, причем

$$\sup_{z\in G^+} \{u(z)\} < +\infty.$$

Тогда, если

$$u(x) \leqslant M, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2.5}$$

то также будем иметь

$$u(z) \leqslant M, \quad z \in G^+. \tag{2.5'}$$

Это есть принцип максимума в простейшей форме для субгармонических функций (см., например, [17], стр. 195).

Наконец, о классах $H^p_\pm$ $(0 < p < +\infty)$ функций $\varphi^\pm(z)$, которые аналитичны в полуплоскостях $G^\pm = \{z: \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ и соответственно подчинены условиям

$$\sup_{0<y<+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^\pm(x \pm iy)|^p \, dx \right\} < +\infty.$$

4°. Если $\varphi^\pm(z) \in H^p_\pm$, то почти всюду существует граничная функция

$$\lim_{y\to+0} \varphi^\pm(x \pm iy) = \varphi^\pm(x) \in L_p(-\infty, +\infty), \tag{2.6}$$

причем

$$\|\varphi^\pm\|_p = \lim_{y\to+0} \|\varphi^\pm(x \pm iy)\|_p, \quad \lim_{y\to+0} \|\varphi^\pm(x) - \varphi^\pm(x \pm iy)\|_p = 0. \tag{2.6'}$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\|\varphi^\pm(x \pm iy)\|_p \leqslant \|\varphi^\pm\|_p, \quad 0 < y < +\infty. \tag{2.7}$$

Отметим также, что классы $H^p_\pm$ с введенными нормами при $1<p<+\infty$ являются банаховыми пространствами.

(б) Наряду с классом $W^{p,\,\varkappa}_\sigma$ определим также классы $W^{p,\,\varkappa}_\sigma[\gamma]$ целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant\sigma$ с нормой

$$\|f\|_{p,\,\varkappa,\,\gamma}=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p\,(x^2+\gamma^2)^{\varkappa/2}\,dx\right)^{1/p}<+\infty, \tag{2.8}$$

где $1<p<+\infty$, $-1<\varkappa<+\infty$ и $0\leqslant\gamma<+\infty$.

Легко видеть, что множества функций $W^{p,\,\varkappa}_\sigma$ и $W^{p,\,\varkappa}_\sigma[\gamma]$ совпадают, хотя нормы в этих классах различны, если $0<\gamma<+\infty$. При этом очевидно, что

$$W^{p,\,\varkappa}_\sigma[0]\equiv W^{p,\,\varkappa}_\sigma \text{ и } \|f\|_{p,\,\varkappa,\,0}=\|f\|_{p,\,\varkappa}. \tag{2.9}$$

Условимся ниже в полуплоскостях $G^\pm$ ветви многозначных функций $z^{\varkappa/p}$ и $(z\pm i\gamma)^{\varkappa/p}$ выбирать следующим образом.

В полуплоскостях G^+ и G^- будем рассматривать ветви функций $z^{\varkappa/p}$ в плоскости z с разрезами $(i0,\ \mp i\infty)$ соответственно.

Для $0<\gamma<+\infty$ функцию $(z+i\gamma)^{\varkappa/p}$ при $z\in G^+$ будем рассматривать в плоскости z с разрезом $(-i\infty,\ -i\gamma)\subset G^-$, а функцию $(z-i\gamma)^{\varkappa/p}$ при $z\subset G^-$ — в плоскости z с разрезом $(i\gamma,\ +i\infty)$.

Условившись об этом, мы с любой функцией $f(z)\in W^{p,\,\varkappa}_\sigma[\gamma]$ $(0\leqslant\gamma<+\infty)$ будем ассоциировать следующие функции:

$$\begin{aligned}
&\Phi^\pm(z)=z^{\varkappa/p}f(z), \text{ при } z\in G^\pm,\\
&\Phi^+_\gamma(z)=(z+i\gamma)^{\varkappa/p}f(z), \text{ при } z\in G^+,\\
&\Phi^-_\gamma(z)=(z-i\gamma)^{\varkappa/p}f(z), \text{ при } z\in G^-,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

заметив, что $\Phi^\pm_0(z)=\Phi^\pm(z)$.

Все эти функции аналитичны в отмеченных выше полуплоскостях, непрерывны вплоть до их границы $-\infty<x<+\infty$, кроме, быть может, точки $x=0$ (если $\gamma=0$); при этом всегда будем иметь

$$\|\Phi^\pm_\gamma\|_p=\|f\|_{p,\,\varkappa,\,\gamma}. \tag{2.11}$$

Далее, положив

$$M(r;\ f)=\max_{|z|=r}|f(z)|,$$

в соответствии с определениями (2.10), будем иметь

$$\begin{aligned}
&M(r;\ \Phi^\pm)=\max_{\substack{z\in G^\pm\\|z|=r}}|\Phi^\pm(z)|\leqslant r^{\varkappa/p}M(r;\ f),\\
&M(r;\ \Phi^+_\gamma)=\max_{\substack{z\in G^+\\|z|=r}}|\Phi^+_\gamma(z)|\leqslant(\gamma+r)^{\varkappa/p}M(r;\ f),\\
&M(r;\ \Phi^-_\gamma)=\max_{\substack{z\in G^-\\|z|=r}}|\Phi^-_\gamma(z)|\leqslant(\gamma+r)^{\varkappa/p}M(r;\ f).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Поскольку $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа $\leqslant\sigma$, то из (2.12) следует: функции $\Phi^\pm(z)$ — экспоненциального типа $\leqslant\sigma$ в со-

ответствующих полуплоскостях $G^{\pm}$; функция $\Phi_\gamma^+(z)$ — в полуплоскости G^+, а функция $\Phi_\gamma^-(z)$ — в полуплоскости G^-.

Докажем лемму.

Лемма 2.1. *Если* $f(z) \in W_a^{p,\varkappa}[\gamma]$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < \varkappa < +\infty,$ $0 \leqslant \gamma < +\infty)$, *то соответственно будем иметь*

1°. $$\varphi^{\pm}(z) = e^{\pm i\alpha z}(z \pm i\gamma)^{\varkappa/p} f(z) \in H_{\pm}^p, \tag{2.13}$$

2°. $$\|f(x \pm i\gamma)\|_{p,\varkappa,\gamma} \leqslant e^{a\gamma}\|f\|_{p,\varkappa}. \tag{2.14}$$

Доказательство. 1°. Очевидно, достаточно провести доказательство лишь для функции $\varphi^+(z)$.

Если положить

$$F_h^+(z) = \frac{1}{2h}\int_{z-h}^{z+h} \Phi_\gamma^+(t)\,dt = \frac{1}{2h}\int_{z-h}^{z+h} f(t)(t+i\gamma)^{\varkappa/p}\,dt,\ h > 0, \tag{2.15}$$

то, во-первых, ввиду отмеченных выше свойств функции $\Phi_\gamma^+(z)$ и свойств из (б) 1° функций Стеклова, можем утверждать:

1) Функция $F_h^+(z)$ аналитична в полуплоскости G^+, непрерывна вплоть до ее границы $-\infty < x < +\infty$, где равномерно ограничена.

Кроме того, в силу (2.11)

$$\|F_h^+\|_p \leqslant \|\Phi_\gamma^+\|_p = \|f\|_{p,\varkappa,\gamma} \tag{2.11'}$$

для любого $h > 0$.

Отметим еще, что, в силу неравенства Гёльдера, из (2.15) легко следует также оценка

$$|F_h^+(x)| \leqslant (2h)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{p,\varkappa,\gamma},\ -\infty < x < +\infty.$$

2) Поскольку в силу (2.12)

$$M_h^+(r) = \max_{\substack{z \in G^+ \\ |z| = r}} \{|F_h^+(z)|\} \leqslant M(r+h;\ \Phi_\gamma^+),$$

то, наряду с $\Phi_\gamma^+(z)$, функция $F_h^+(z)$ — также экспоненциального типа $\leqslant a$ в полуплоскости G^+.

Ввиду отмеченных свойств функции $F_h^+(z)$ и согласно свойству из (а) 2°, во всей области G^+ справедливо неравенство

$$|e^{i\alpha z}F_h^+(z)| \leqslant (2h)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{p,\varkappa,\gamma},\ z \in G^+. \tag{2.16}$$

Теперь определим еще одну функцию

$$u_h(z;\ R) = \int_{-R}^{R} |e^{i\alpha(z+t)}F_h^+(z+t)|^p\,dt,\ z \in G^+, \tag{2.17}$$

уже субгармоническую и ограниченную в полуплоскости G^+, в силу (2.16).

Поскольку при $z = x \in (-\infty, +\infty)$

$$u_h(x; R) = \int_{-R}^{R} |\mathbf{F}_h^{\div}(x+t)|^p \, dt =$$

$$= (2h)^{-p} \int_{-R}^{R} \left| \int_{x+\tau-h}^{x+\tau+h} f(t)(t + i\gamma_1)^{\gamma/p} \, dt \right|^p d\tau,$$

то функция $u_h(x; R)$ непрерывна вплоть до границы $-\infty < x < +\infty$ полуплоскости G^+.

Отсюда, применив неравенство Гёльдера, получим

$$u_h(x; R) \leqslant \frac{1}{2h} \int_{-R}^{R} d\tau \int_{-h}^{h} |f(x+\tau+t)|^p [(x+\tau+t)^2 + \gamma^2]^{\gamma/2} \, dt =$$

$$= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} dt \int_{x+t-R}^{x+t+R} |f(\tau)|^p (\tau^2 + \gamma^2)^{\gamma/2} \, d\tau \leqslant \|f\|_{p, \gamma}^p.$$

Итак, субгармоническая в полуплоскости G^+ функция $u_h(z; R)$ там ограничена, непрерывна вплоть до ее границы $-\infty < x < +\infty$, причем

$$u_h(x; R) \leqslant \|f\|_{p, \gamma}^p.$$

Отсюда, согласно принципу максимума из (а) 3°, будем иметь для любого $R > 0$

$$u_h(z; R) \leqslant \|f\|_{p, \gamma}^p, \quad z \in G^+.$$

Имея ввиду определение (2.17) функции $u_h(z; R)$, переходом к пределу при $R \to +\infty$, приходим к неравенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{F}_h^+(x + t + iy)|^p \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{F}_h^+(x + iy)|^p \, dx \leqslant$$

$$\leqslant e^{\gamma p y} \|f\|_{p, \gamma}^p, \quad 0 < y < +\infty. \tag{2.18}$$

Но, согласно свойствам из (а) 1° функций Стеклова

$$\lim_{h \to 0} \|\mathbf{F}_h^+(x + iy)\|_p = \|\Phi_\gamma^+(x + iy)\|_p,$$

и поэтому, переходом к пределу в (2.18) при $h \to 0$, приходим к неравенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)(x + iy + i\gamma)^{\gamma/p}|^p dx \leqslant e^{\gamma p y} \|f\|_{p, \gamma}^p, \quad 0 < y < +\infty.$$

Наконец, поскольку $|\exp[i\gamma(x + iy)]| = e^{-\gamma y}$, $-\infty < x < +\infty$, то отсюда следует также неравенство

$$\|\varphi^+(x + iy)\|_p \leqslant \|f\|_{p, \gamma}, \quad 0 < y < +\infty,$$

т. е. утверждение $\varphi^+(z) \in H_+^p$.

2°. Заметим, что, по определению,

$$\|f(x \pm i\gamma)\|_{p,\,\varkappa,\,\gamma} = \|f(x \pm i\gamma)(x \pm i\gamma)^{\varkappa/p}\|_p. \tag{2.19}$$

Но из (2.13), в частности, следует, что соответственно $e^{\pm i\sigma z} z^{\varkappa/p} f(z) \in \in H^p_{\pm}$. Поэтому, во-первых, в силу последнего из свойств (а) 4° функций класса $H^p_{\pm}$, т. е. неравенства (2.7), имеем также

$$e^{-\sigma\gamma}\|f(x \pm i\gamma)(x \pm i\gamma)^{\varkappa/p}\|_p = \|e^{\mp i\sigma(x \pm i\gamma)} f(x \pm i\gamma)(x \pm i\gamma)^{\varkappa/p}\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \|e^{\mp i\sigma x} f(x)\, x^{\varkappa/p}\|_p = \|f\|_{p,\,\varkappa}.$$

Отсюда, в силу равенства (2.19), приходим к неравенству (2.14) леммы.

Отметим, что метод доказательства этой леммы восходит к Б. Я. Левину, рассмотревшему в примерно тех же условиях функцию $f(z)$, но аналитическую лишь в полуплоскости G^+.

2.2. В этом пункте мы приведем еще две важные леммы.

(а) Лемма 2.2. 1°. *Для любой функции* $f(z) \in W^{p,\,\varkappa}_{\sigma}[\gamma]$ *справедлива оценка*

$$|f(z)| \leqslant C(1 + |z|)^{-\varkappa/p} e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}\|f\|_{p,\,\varkappa,\,\gamma},\ z \in \mathbf{C}. \tag{2.20}$$

2°. *Класс* $W^{p,\,\varkappa}_{\sigma}[\gamma]$ *с нормой* $\|f\|_{p,\,\varkappa,\,\gamma}$ *является банаховым пространством.*

Доказательство. 1°. Введем в рассмотрение полуплоскости

$$G^{\pm}_{\gamma} = \{z: \pm \operatorname{Im} z \geqslant 2(1 + \gamma)\}$$

и заметим, что имеют место включения

$$G^{\pm}_{\gamma+1/2} \subset G^{\pm}_{\gamma} \subset \mathbf{C}_{\gamma} = \{z: |z| \geqslant 2(1+\gamma)\}$$

и

$$K_z = \{\zeta: |\zeta - z| < 1\} \subset G^{\pm}_{\gamma},\ \text{при}\ z \in G^{\pm}_{\gamma+1/2}.$$

Тогда легко убедиться в справедливости неравенств

$$|\zeta \pm i\gamma| \leqslant \frac{3}{2}|z|\ \text{и}\ |\zeta \pm i\gamma| \geqslant \frac{|z|}{2},\ \text{при}\ z \in \mathbf{C}_{\gamma}\ \text{и}\ \zeta \in K_z, \tag{2.21}$$

и, тем более, при $z \in G^{\pm}_{\gamma}$ и $\zeta \in K_z$.

Теперь отметим, что поскольку $|f(z)|^p$ — субгармоническая функция на всей z-плоскости, то для любого $\rho \in (0, +\infty)$ справедливо неравенство

$$|f(z)|^p \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z + \rho e^{i\theta})|^p\, d\theta,\ z \in \mathbf{C}.$$

Умножив его на $\rho d\rho$ и проинтегрировав по отрезку $[0,1]$, мы получим

$$|f(z)|^p \leqslant \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta - z| < 1} |f(\zeta)|^p\, d\sigma,\quad z \in \mathbf{C}. \tag{2.22}$$

Заметим, далее, что в силу (2.21)

$$|\zeta \pm i\gamma|^{\varkappa} \geqslant \pi C(\varkappa)|z|^{\varkappa};\ z \in \mathbf{C}_{\gamma},\ |\zeta - z| < 1,$$

где $C(\varkappa) > 0$ — постоянная, мы, в силу (2.22), можем записать два неравенства

$$|f(z)|^p \leqslant C(\varkappa)\,|z|^{-\varkappa} \iint\limits_{|\zeta - z|<1} |f(\zeta)|^p\,|\xi \pm i\gamma|^{\varkappa}\,d\sigma,\quad z \in \mathbf{C}_\gamma, \tag{2.23}$$

которые, разумеется, имеют место также при $z \in G^{+}_{\gamma+1/2} \subset G^{-}_{\gamma}$.

Теперь отметим, что вообще для $z = x + iy \in \mathbf{C}$ будем иметь

$$I^{+}(z) \equiv \iint\limits_{|\zeta - z|<1} |f(\zeta)|^p\,|\xi \pm i\gamma|^{\varkappa}\,d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{y-1}^{y+1} d\eta \int\limits_{x-1}^{x+1} |f(\xi + i\eta)|^p\,|\xi + i\eta \pm i\gamma|^{\varkappa}\,d\xi \leqslant \int\limits_{y-1}^{y+1} \Omega^{\pm}(\eta)\,d\eta, \tag{2.24}$$

где

$$\Omega^{\pm}(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi + i\eta)|^p\,|\xi + i\eta \pm i\gamma|^{\varkappa}\,d\xi. \tag{2.25}$$

Для содержательности нашей оценки (2.24), разумеется, сначала нужно убедиться в том, что интегралы $\Omega^{\pm}(\eta)$ конечны при $-\infty < \eta < +\infty$. Но с этой целью, а также для завершения доказательства леммы, нам сначала нужно оценить эти интегралы, когда, соответственно, $\eta \in [0, +\infty)$ и $\eta \in (-\infty, 0]$.

Поскольку, согласно утверждению 1° леммы 2.1, соответственно

$$\varphi^{\pm}(z) = e^{\pm i\sigma z}\,(z \pm i\gamma)^{\varkappa/p} f(z) \in H^p_{\pm},$$

то, пользуясь отмеченным в (а) 4° неравенством (2.7) для функций класса $H^p_{\pm}$, мы будем иметь:

Если $\eta \geqslant 0$, то

$$e^{-\sigma p\eta}\,\Omega^{+}(\eta) = \|\varphi^{+}(\xi + i\eta)\|^p_p \leqslant \|\varphi^{+}(\xi)\|^p_p = \|f\|^p_{p,\varkappa,\gamma}, \tag{2.26'}$$

если же $\eta \leqslant 0$, то

$$e^{\sigma p\eta}\,\Omega^{-}(\eta) = \|\varphi^{-}(\xi + i\eta)\|^p_p \leqslant \|\varphi^{-}(\xi)\|^p_p = \|f\|^p_{p,\varkappa,\gamma}. \tag{2.26''}$$

Но при $z \in G^{+}_{\gamma+1/2}$, $y - 1 > 2(1+\gamma) > 0$, а при $z \in G^{-}_{\gamma+1/2}$, $y + 1 \leqslant -2(1+\gamma) < 0$. Поэтому из (2.24) — (2.25) в силу последних оценок получим

$$I^{\pm}(z) \leqslant 2\exp\{\sigma p\,(1 + |y|)\}\,\|f\|^p_{p,\varkappa,\gamma},\quad z \in G^{\pm}_{\gamma+1/2}, \tag{2.27}$$

откуда, в силу (2.23), приходим к неравенству

$$|f(z)| \leqslant C(\varkappa, p)\,(1 + |z|)^{-\varkappa/p}\,e^{\sigma|y|}\,\|f\|_{p,\varkappa,\gamma},\quad z = x + iy \in G^{\pm}_{\gamma+1/2}, \tag{2.28}$$

где $C(\varkappa, p) > 0$ — другая постоянная, не зависящая от f.

Установим теперь, что интегралы $\Omega^{\pm}(\eta)$ существуют и конечны для всех $\eta \in (-\infty, +\infty)$. С этой целью отметим сперва, что при любом $R > 0$, если $|\eta| \leqslant R$, то

$$\sup_{|\xi|>1}\left\{\left|\frac{\xi+i\eta-i\gamma}{\xi+i\eta_1+i\gamma}\right|^{\varkappa}\right\}=D<+\infty, \tag{2.29}$$

где $D=D(\gamma,\ \varkappa,\ R)>0$ — некоторая постоянная.

Далее, интеграл $\Omega^-(\eta)$, конечность и оценка которого при $\eta\leqslant 0$ даны нами в неравенстве (2.26″), представим в виде суммы

$$\Omega^-(\eta)=\Omega_1^-(\eta)+\Omega_2^-(\eta)=\int_{-1}^{1}|f(\xi+i\eta|^p|\xi+i\eta_1-i\gamma|^{\varkappa}\,d\xi=$$

$$=\int_{|\xi|>1}|f(\xi+i\eta)|^p|\xi+i\eta_1-i\gamma|^{\varkappa}\,d\xi.$$

Но, ввиду непрерывности $f(\xi+i\eta_1)$, конечность интеграла $\Omega_1^-(\eta_1)$ очевидна не только для $\eta\leqslant 0$, но и для всех $\eta\geqslant 0$, при $-1<\varkappa<+\infty$ и $0\leqslant\gamma<+\infty$.

С другой стороны, в силу (2.29)

$$\Omega_2^-(\eta)\leqslant D\,\Omega^+(\eta_1)<+\infty,\ 0\leqslant\eta\leqslant R.$$

Следовательно, ввиду произвольности R, интеграл $\Omega^-(\eta_1)$ конечен для всех $\eta\in(-\infty,\ +\infty)$.

Вполне аналогично, пользуясь оценкой (2.26′), вновь в силу (2.29), заключаем, что интеграл $\Omega^+(\eta_1)$ конечен для всех $\eta_1\in(-\infty,\ +\infty)$.

Введем теперь в рассмотрение следующие области:

Горизонтальную полосу

$$\Pi_\gamma=\{z:|\operatorname{Im}z|\leqslant 3+2\gamma\},$$

полуполосы той же ширины $2(3+2\gamma)$

$$\Pi_\gamma^{\pm}=\{z:|\operatorname{Im}z|\leqslant 3+2\gamma,\ \pm\operatorname{Re}z\geqslant 2(1+\gamma)\}\subset\mathbf{C}_\gamma$$

и еще прямоугольник

$$\Delta_\gamma=\{z:\ |\operatorname{Re}z|\leqslant 2(1+\gamma),\ \ |\operatorname{Im}z|\leqslant 3+2\gamma\},$$

заметив при этом, что

$$\Pi_\gamma=\Pi_\gamma^+\cup\Pi_\gamma^-\cup\Delta_\gamma.$$

Сначала убедимся в конечности величины

$$\sup_{z\in\Pi_\gamma}\{(1+|z|)^{\varkappa/p}|f(z)|\}<+\infty. \tag{2.30}$$

В самом деле, во-первых, очевидно, что

$$\sup_{z\in\Delta_\gamma}\{(1+|z|)^{\varkappa/p}|f(z)|\}<+\infty.$$

Во-вторых, ввиду оценок (2.23) и (2.24) — (2.25), конечности функций $\Omega^{\pm}(\eta)$ в любом отрезке $-R\leqslant\eta\leqslant R$ и включения $\Pi_\gamma^{\pm}\subset\mathbf{C}_\gamma$, получим

$$\sup_{z\in\Pi_\gamma^{\pm}}\{(1+|z|)^{\varkappa/p}|f(z)|\}<+\infty.$$

Итак, (2.31) справедливо.

Далее, из оценок (2.28), в частности, следует, что на границах полуплоскостей $G^{+}_{\gamma+1/2}$, т. е. на границе $\partial\Pi_\gamma$ полосы Π_γ

$$\sup_{z\in\partial\Pi_\gamma}|(1+|z|)^{\varkappa/p}|f(z)|| \leqslant C_1\|f\|_{p,\varkappa,\gamma}. \tag{2.31}$$

Понимая под $|z+i2(2+2\gamma)|^{-\varkappa/p}$ главную ее ветвь в плоскости $\mathbf{C}$ с разрезом $(-i\infty, -i2(2+2\gamma))\subset G^{-}_{\gamma+1/2}$, введем в рассмотрение функцию

$$f_\gamma(z)=|z+i2(2+2\gamma)|^{-\varkappa/p}f(z),$$

и заметим, что

$$|z+i2(2+2\gamma)|\asymp 1+|z|,\ z\in\Pi_\gamma, \tag{2.32}$$

где соответствующие постоянные зависят только от γ.

Следовательно, в силу неравенств (2.30) и (2.31), функция $f_\gamma(z)$ ограничена в полосе Π_γ и на её границе $\partial\Pi_\gamma$ имеет место оценка вида

$$\sup_{z\in\partial\Pi_\gamma}\|f_\gamma(z)\| \leqslant C_2\|f\|_{p,\varkappa,\gamma}.$$

Отсюда, на основании принципа Фрагмена—Линделёфа, заключаем, что

$$|f_\gamma(z)|\leqslant C_2\|f\|_{p,\varkappa,\gamma},\ z\in\Pi_\gamma.$$

Переходя опять к функции $f(z)$, с учетом оценок (2.32), из последнего неравенства получим

$$|f(z)|\leqslant C_2(1+|z|)^{\varkappa/p}\|f\|_{p,\varkappa,\gamma},\ z\in\Pi_\gamma.$$

Наконец, отсюда и из (2.28) легко приходим к оценке (2.20) леммы.

2°. Из доказанного нами неравенства (2.20) следует полнота каждого из пространств $W^{p,\varkappa}_\sigma[\gamma]$.

(б) В приводимой ниже заключительной лемме мы покажем, что пространства $W^{p,\varkappa}_\sigma$ и $W^{p,\varkappa}_\sigma[\gamma]$ $(0<\gamma<+\infty)$ совпадают, а соответствующие нормы эквивалентны.

Лемма 2.3. *Для любой функции* $f(z)\in W^{p,\varkappa}_\gamma$ $(1<p<+\infty, -1<\varkappa<+\infty)$ *и при любом* $\gamma\in[0,+\infty)$ *будем иметь*:

1°. $$\|f\|_{p,\varkappa,\gamma}\asymp\|f\|_{p,\varkappa}, \tag{2.33}$$

2°. $$\|f(x\pm i\gamma)\|_{p,\varkappa}\asymp\|f\|_{p,\varkappa}. \tag{2.34}$$

Доказательство. 1°. Заметив, что для любого $\gamma\in(0,+\infty)$ $f\in W^{p,\varkappa}_\sigma[0]\Leftrightarrow f\in W^{p,\varkappa}_\sigma[\gamma]$, на $W^{p,\varkappa}_\sigma[0]$ определим линейный оператор T_γ, положив

$$\forall f\in W^{p,\varkappa}_\sigma[0],\ T_\gamma f=f\in W^{p,\varkappa}_\sigma[\gamma].$$

Тогда очевидно, что на $W^{p,\varkappa}_\sigma[\gamma]$ существует также обратный линейный оператор T^{-1}_γ, такой, что

$$\forall f\in W^{p,\varkappa}_\sigma[\gamma],\ T^{-1}_\gamma f=f\in W^{p,\varkappa}_\sigma[0].$$

Разберем отдельно два случая:

1) Если $\varkappa\geqslant 0$, то $|x|^\varkappa\leqslant|x+i\gamma|^\varkappa$ и, очевидно,

$$\|f\|_{p,\varkappa}\leqslant\|f\|_{p,\varkappa,\gamma}=\|T_\gamma f\|_{p,\varkappa,\gamma},\ \forall f\in W^{p,\varkappa}_\sigma[0], \tag{2.35}$$

откуда следует, что

$$\|T_\gamma^{-1} f\|_{p,\alpha} \leqslant \|f\|_{p,\alpha,\gamma}, \quad \forall f \in W_0^{p,\alpha}[\gamma].$$

Итак, оператор T_γ^{-1} ограничен и, по теореме Банаха, ограничен также оператор T_γ, т. е.

$$\|T_\gamma f\|_{p,\alpha,\gamma} = \|f\|_{p,\alpha,\gamma} \leqslant A \|f\|_{p,\alpha}, \quad \forall f \in W_0^{p,\alpha}[0], \tag{2.35'}$$

где $A > 0$ — постоянная, не зависящая от f.

Из (2.35) и (2.35′) следует (2.33) для рассматриваемого случая $\alpha \geqslant 0$.

2) Если $-1 < \alpha < 0$, то $|x + i\gamma|^\alpha \leqslant |x|^\alpha$, и поэтому

$$\|T_\gamma f\|_{p,\alpha,\gamma} = \|f\|_{p,\alpha,\gamma} \leqslant \|f\|_{p,\alpha}, \quad \forall f \in W_0^{p,\alpha}[0], \tag{2.36}$$

т. е. оператор T_γ ограничен. Поэтому обратный оператор T_γ^{-1} также ограничен и, следовательно,

$$\|T_\gamma^{-1} f\|_{p,\alpha} = \|f\|_{p,\alpha} \leqslant A^* \|f\|_{p,\alpha,\gamma}, \quad \forall f \in W_0^{p,\alpha}[\gamma], \tag{2.36'}$$

где $A^* > 0$ — постоянная, не зависящая от f.

Из (2.36) и (2.36′) вновь вытекает утверждение (2.33) уже в случае $-1 < \alpha < 0$.

2°. Если в (2.33) заменить функцию $f(x)$ на $f(x \pm i\gamma)$, то, пользуясь оценкой (2.14) леммы 2.1 (2), мы приходим к неравенству

$$\|f(x \pm i\gamma)\|_{p,\alpha} \leqslant C_1 \|f(x \pm i\gamma)\|_{p,\alpha,\gamma} \leqslant C_1 e^{\sigma\gamma} \|f\|_{p,\alpha}. \tag{2.37}$$

Положив, далее, $\varphi(z) = f(z \pm i\gamma)$, отсюда получим

$$\|f\|_{p,\alpha} = \|\varphi(x \mp i\gamma)\|_{p,\alpha} \leqslant C_1 e^{\sigma\gamma} \|\varphi\|_{p,\alpha}$$

или, что то же самое,

$$\|f\|_{p,\alpha} \leqslant C_1 e^{\sigma\gamma} \|f(x \pm i\gamma)\|_{p,\alpha}. \tag{2.37'}$$

Наконец, из (2.37) и (2.37′) следует утверждение (2.34) леммы.

§ 3. Интерполяционные разложения в весовых классах целых функций экспоненциального типа

3.1. Введем в рассмотрение последовательность вещественных чисел $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, ради краткости положив

$$x_k \equiv x_{\nu,k}(\sigma) \equiv \sigma^{-1} x_{\nu,k}, \quad -\infty < k < +\infty,$$

где $\{x_{\nu,k}\}_{-\infty}^{+\infty}$ — суть нули функции $S_\nu(z)$ $(0 \leqslant \nu < 2)$.

Тогда, согласно результатам пункта 1.1 (6), числа $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — суть простые вещественные нули целой функции $S_\nu(\sigma z)$ $(0 \leqslant \nu < 2)$ экспоненциального типа σ, причем природа их распределения следует из приведенных там же утверждений.

А именно, мы будем иметь

$$x_0 = 0, \quad x_{-k} = -x_k \ (1 \leqslant k < +\infty),$$

и, далее,

1) При $0 < \nu < 1$

$$x_k \in \left(\frac{\pi}{\sigma}k - \frac{\pi}{2\sigma}, \frac{\pi}{\sigma}k + \frac{\pi}{2\sigma}\right) (-\infty < k < +\infty),$$

а при $\nu = 0$

$$x_0 = 0, \; x_k = \frac{\pi}{\sigma}k - \frac{\pi}{2\sigma}\operatorname{sign} k \; (k = \pm 1, \pm 2, \cdots);$$

2) При $1 < \nu < 2$

$$x_0 = 0, \; x_k \in \begin{cases} \left(\frac{\pi}{\sigma}k, \frac{\pi}{\sigma}(k+1)\right) \; (k = 1, 2, \ldots), \\ \left(\frac{\pi}{\sigma}(k-1), \frac{\pi}{\sigma}k\right) \; (k = -1, -2, \ldots), \end{cases}$$

а при $\nu = 1$

$$x_k = \frac{\pi}{\sigma}k \; (-\infty < k < +\infty).$$

Для установления основных результатов данного параграфа нам необходимы несколько лемм.

(а) Первая из этих лемм следующая.

Лемма 3.1. *Если* $f(z) \in W_\sigma^{p,\alpha}$ $(1 < p < +\infty, \; -1 < \alpha < +\infty)$, *то для любого* $h \in (-\infty, +\infty)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(x_k + ih)|^p (1 + |k|)^\alpha \leqslant c \|f\|_{p,\alpha}^p, \tag{3.1}$$

где $C > 0$ — *постоянная, не зависящая от* f, *и по* (2.1)

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, |x|^\alpha dx\right)^{1/p}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Рассмотрим функции $f(\pm z + ih) z^{\alpha/p}$, которые аналитичны в плоскости z с разрезом $(-\infty, 0)$. Поскольку функции $|f(\pm z + ih)|^p |z|^\alpha$ субгармонические в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, то имеют место неравенства

$$|f(\pm x_k + ih)|^p |x_k|^\alpha \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta \mp x_k| = \rho} |f(\zeta + ih)|^p |\zeta|^\alpha |d\zeta| \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

для любого $\rho \in (0, r_1)$, где $r_1 = \inf\limits_{-\infty < k < +\infty} (x_k - x_{k-1}) > 0$, в силу лемм 1.1 и 1.5.

Если умножить эти неравенства на $\rho d\rho$ и проинтегрировать по промежутку $(0, \delta)$, где $\delta \leqslant r_1/2$, то мы приходим к следующим неравенствам:

$$|f(\pm x_k + ih)|^p |x_k|^\alpha \leqslant \frac{\delta^{-2}}{\pi} \iint\limits_{|\zeta \mp x_k| < \delta} |f(\zeta + ih)|^p |\zeta|^\alpha d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta^{-2}}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} d\eta \int_{x_k - \delta}^{x_k + \delta} |f(\xi + i(\eta + h))|^p |\xi + i\eta|^\alpha d\xi \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Заметив, что $-x_k = x_{-k}$, из этих неравенств заключаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k + ih)|^p |x_k|^\varkappa \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\delta^{-2}}{\pi} \int_{-h}^{h} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi + i(\tau_1 + h))|^p |\xi + i\tau_1|^\varkappa \, d\xi. \tag{3.3}$$

Однако, если воспользоваться утверждениями 1° и 2° леммы 2.3, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi + i(\tau_1 + h))|^p (\xi^2 + \tau_1^2)^{\varkappa/2} \, d\xi = \|f(\xi + i(\tau_1 + h))\|^p_{p,\,\varkappa,\,\eta} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \|f(\xi + i(\tau_1 + h))\|^p_{p,\,\varkappa} \leqslant C_3 \|f\|^p_{p,\,\varkappa},$$

где здесь и дальше $C_j > 0$ $(j = 1, 2, \cdots)$ — постоянные, не зависящие от f.

Поэтому из (3.3) мы получим

$$\sum_{|k|>1} |f(x_k + ih)|^p |x_k|^\varkappa \leqslant C_3 \|f\|^p_{p,\,\varkappa}. \tag{3.4}$$

Нам остается, во-первых, заметить, что, в силу неравенства (2.20) и утверждения 1° леммы 2.3,

$$|f(x_0 + ih)|^p = |f(ih)|^p \leqslant C_4 \|f\|^p_{p,\,\varkappa}. \tag{3.4'}$$

Во-вторых, что, ввиду отмеченной нами в начале параграфа природы распределения чисел последовательности $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$,

$$|x_k|^\varkappa \asymp (1 + |k|)^\varkappa \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{3.5}$$

Тогда из (3.4) и (3.4′) будет следовать неравенство (3.1) леммы.

Лемма 3.2. *Если* $\Psi^\pm \in H^p_\pm$, *то соответственно будем иметь*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\Psi^\pm(x_k \pm i)|^p \leqslant C_* \|\Psi^\pm\|^p_p, \tag{3.6}$$

где постоянная $C_* > 0$ *от функции* $\Psi^\pm$ *не зависит.*

Доказательство. Сначала заметим, что в силу леммы 1.5 и из самого определения последовательности $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$:

$$x_k = \sigma^{-1} x_{\nu,\,k}, \quad -\infty < k < +\infty,$$

вытекает существование числа δ $(0 < \delta < 1)$, не зависящего от индекса k $(-\infty < k < +\infty)$ и такого, что

$$|(x_k \pm i) - (x_{k-1} \pm i)| = |x_k - x_{k-1}| \geqslant 2\delta \quad (-\infty < k < +\infty). \tag{3.7}$$

Ввиду субгармоничности функций $|\Psi^\pm(z)|^p$, для любого ρ $(0 < \rho \leqslant \delta)$ справедливо неравенство

$$|\Psi^\pm(x_k \pm i)|^p \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Psi^\pm(x_k \pm i + \rho e^{i\theta})|^p \, d\theta,$$

умножив которое на $\rho d\rho$ и проинтегрировав вдоль интервала $(0, \delta)$, получим оценки

$$|\Psi^{\pm}(x_k \pm i)|^p \leqslant \frac{\delta^{-2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta} |\Psi^{\pm}(x_k \pm i + \rho e^{i\theta})|^p \rho d\rho d\theta \qquad (3.8)$$

$$(-\infty < k < +\infty).$$

Но в силу условия (3.7) кружки $|z-(x_k+i)| \leqslant \delta$ и $|z-(x_k-i)| \leqslant \delta$ соответственно лежат в полосах $0 < \operatorname{Im} z < 1+\delta$ и $-(1+\delta) < \operatorname{Im} z < 0$ и попарно не пересекаются. Поэтому, из неравенств (3.8) и, в силу известного и отмеченного в § 2 свойства 4° функций классов $H^p_{\pm}$, мы приходим к неравенству леммы

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\Psi^{\pm}(x_k \pm i)|^p \leqslant \frac{\delta^{-2}}{\pi} \int_0^{1+\delta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi^{\pm}(x \pm iy)|^p dx \leqslant \frac{2\delta^{-2}}{\pi} \|\Psi^{\pm}\|_p^p.$$

(б) Прежде, чем приводить необходимую нам третью лемму, введем одно определение.

Пусть $l^{p,\varkappa}$ — банахово пространство последовательностей $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \subset \mathbf{C}$ с конечной нормой

$$\|\{a_k\}\|_{p,\varkappa} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p (1+|k|)^{\varkappa} \right)^{1/p}, \qquad (3.9)$$

в предположении, что параметры p и $\varkappa$ лежат в границах

$$1 < p < +\infty, \quad -1 < \varkappa < p-1. \qquad (3.10)$$

Как уже было отмечено в начале параграфа будем полагать, что $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty} = \{\sigma^{-1} x_{\nu,k}\}_{-\infty}^{+\infty}$ — суть нули функции $S_\nu(\sigma z)$ $(0 \leqslant \nu < 2)$, которые все вещественные и простые.

Лемма 3.3. *Пусть последовательность*

$$\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^{p,\varkappa} \quad (1 < p < \infty, \ -1 < \varkappa < p-1)$$

произвольна, а параметр ν в определении функции $S_\nu(z)$ лежит интервале

$$\nu \in \left(\frac{1+\varkappa}{p}, \ 1 + \frac{1+\varkappa}{p} \right) \subset [0, 2). \qquad (3.11)$$

Тогда ряд

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \frac{S_\nu(\sigma z)}{S'_\nu(\sigma x_k)(z - x_k)} \qquad (3.12)$$

равномерно сходится в любом круге $|z| \leqslant R < +\infty$ и его сумма $f(z)$ является целой функцией, удовлетворяющей интерполяционным условиям

$$f(x_k) = a_k \quad (-\infty < k < +\infty). \qquad (3.13)$$

Доказательство. Ввиду природы распределения последовательности чисел $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — нулей функции $S_\nu(\sigma z)$, отмеченной нами в

начале данного параграфа, для любого $R>0$ существуют постоянная $C_\sigma>0$ и целое число $N=N(R)\geqslant 1$, такие, что при $|z|\leqslant R$

$$|z-x_k|\geqslant C_\sigma(1+|k|),\ \text{если}\ |k|\geqslant N.$$

Тогда, если $m>n\geqslant N$ или $n<m\leqslant -N$, то при $|z|\leqslant R$

$$J_{n,m}(z)\equiv\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\frac{S_\nu(\tau z)}{S_\nu'(\sigma x_k)(z-x_k)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_\sigma(R)\sum_{k=n}^{m}\frac{|a_k|}{|S_\nu'(\sigma x_k)|}(1+|k|)^{-1},$$

где $M_\sigma(R)=C_\sigma^{-1}\max\limits_{|z|=R}|S_\nu(\tau z)|$.

Но согласно лемме 1.6 и в силу двойного неравенства (3.5)

$$|S_\nu'(\sigma x_k)|=|S_\nu'(x_{\nu,k})|\asymp(1+|k|)^{1-\nu},\quad |k|\geqslant 1, \tag{3.14}$$

и поэтому

$$J_{n,m}(z)\leqslant M_\sigma^*(R)\sum_{k=n}^{m}\frac{|a_k|}{(1+|k|)^{2-\nu}},\ |k|\geqslant 1,$$

где $M_\sigma^*(R)>0$ — другая, подходящим образом выбранная постоянная. Отсюда, пользуясь неравенством Гёльдера и обозначением (3.9), мы получим, что при $|z|\leqslant R$ и $m>n\geqslant N$ или $n<m\leqslant -N$,

$$J_{n,m}(z)\leqslant M_\sigma^*(R)\,\|\{a_k\}\|_{p,\varkappa}\left\{\sum_{k=n}^{m}(1+|k|)^{-q\left(2-\nu+\frac{\varkappa}{p}\right)}\right\}^{1/q},$$

где $q=\dfrac{p}{p-1}$.

Наконец, поскольку, в силу условия (3.11), $1<q\left(2-\nu+\dfrac{\varkappa}{p}\right)<1+q$, то из последнего неравенства мы легко заключаем, что все утверждения леммы справедливы.

3.2 (а) Дальше мы будем опираться на два известных предложения, но прежде чем их сформулировать, приведем одно определение.

Обозначим через $\overset{*}{H}{}_\pm^p$ $(0<p<+\infty)$ класс функций $f^\pm(z)$, аналитических в полуплоскостях $G^\pm$ соответственно и удовлетворяющих условию

$$\|f^\pm\|_p^*=\sup_{0<\theta<\pi}\left\{\int_0^{+\infty}|f^\pm(re^{\pm i\theta})|^p\,dr\right\}^{1/p}<+\infty. \tag{3.15}$$

При $p=2$ эти классы впервые были введены в работе автора и А. Е. Аветисяна [18] (см. также [1], гл. VII) и там же был установлен важный факт о совпадении классов $H_\pm^2\equiv\overset{*}{H}{}_\pm^2$. В общем случае $0<p<+\infty$ С. А. Акопяном [19] были установлены включение $H_\pm^p\subset\overset{*}{H}{}_\pm^p$ и оценка $\|f^\pm\|_p^*\leqslant\|f^\pm\|_p$, $f^\pm\in H_\pm^p$, а А. М. Седлецкий [20] доказал обрат-

ное включение $H^p_- \subset H^p_-$ и оценку $\|f^-\|_p \leqslant 2^{1/p}\|f^-\|^*_p$. Таким образом, справедлива

Теорема Б. *Если* $0 < p < +\infty$, *то справедливы следующие утверждения;*

1°. $$H^p_\pm \equiv \dot{H}^p_\pm;$$

2°. $$2^{-1/p}\|f^\pm\|_p \leqslant \|f^\pm\|^*_p \leqslant \|f^\pm\|_p, \quad \forall f^\pm \in H^p_\pm. \tag{3.16}$$

Следующее предложение — это теорема о проектировании, доказательство которой содержится в лемме 1 работы В. М. Мартиросяна [21] (см. также [22], лемму 2.1 и теорему 2.1).

Теорема В. *Пусть* $f(x)$ — *измеримая на* $(-\infty, +\infty)$ *функция с конечной нормой*

$$\|f\|_{p,\varkappa} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^\varkappa dx\right)^{1/p} < +\infty \ (1 < p < +\infty, \ -1 < \varkappa < p-1). \tag{3.17}$$

Тогда интегралы типа Коши

$$F^\pm(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z}\, dt, \ z \in G^\pm, \tag{3.18}$$

аналитичны в полуплоскостях $G^\pm$ *соответственно, причем*

$$\sup_{0<\theta<\pi} \left\{\int_0^{+\infty} |F^\pm(re^{\pm i\theta})|^p r^\varkappa dr\right\}^{1/p} \leqslant C_{p,\varkappa}\|f\|_{p,\varkappa}. \tag{3.19}$$

Следующее предложение, доказательство которого мы приводим, является отнюдь не простым следствием теорем Б и В.

Теорема Г. *Пусть* $\varphi(x)$ — *измеримая на* $(-\infty, +\infty)$ *функция с конечной нормой*

$$\|\varphi\|_{p,\varkappa,1} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^p |x+i|^\varkappa dx\right)^{1/p} < +\infty \tag{3.20}$$

и

$$\Phi^\pm(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-z}\, dt, \quad z \in G^\pm. \tag{3.21}$$

Тогда:

1°. *Если, как и в* § 2, *рассматривать функции* $(z \pm i)^{\varkappa/p}$, $z \in G^\pm$, *в плоскости* z *с разрезами* $(-i\infty, -i) \subset G^-$ *и* $(+i, +i\infty) \subset G^+$ *соответственно, то*

$$(z \pm i)^{\varkappa/p}\Phi^\pm(z) \in H^p_\pm; \tag{3.22}$$

2° *справедливы оценки*

$$\|(x+i)^{\varkappa/p}\Phi^\pm(x)\|_p < C^*_{\varkappa,p}\|\varphi\|_{p,\varkappa,1}. \tag{3.23}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение интегралы типа Коши

$$\Psi_1^{\pm}(z)=\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt,\quad \Psi_2^{\pm}=\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt,\ z\in G^{\pm}, \tag{3.24}$$

и докажем, что для них справедливы оценки вида

$$\sup_{0<\vartheta<\pi}\left\{\int_0^{+\infty}|\Psi_j^{\pm}(re^{\pm i\vartheta})|^p\,|re^{\pm i\vartheta}\pm i|^{\varkappa}\,dr\right\}\leqslant C_j\|\varphi\|^p_{p,\,\varkappa,\,1}\ (j=1,\ 2), \tag{3.25}$$

где, как здесь, так и дальше, $C_j>0$ $(j\geqslant 1)$ — постоянные, зависящие лишь от параметров p и $\varkappa$.

Займемся сначала функцией $\Psi_1^{\pm}(z)$. Ввиду неравенства Гёльдера и очевидной оценки $1\leqslant|t\pm i|\leqslant 2$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ мы будем иметь

$$\int_0^1|\varphi(t)|\,dt\leqslant\left\{\int_0^1|\varphi(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant C_3\left\{\int_0^1|\varphi(t)|^p\,|t\pm i|^{\varkappa}\,dt\right\}^{1/p}\leqslant C_3\|\varphi\|_{p,\,\varkappa,\,1}. \tag{3.26}$$

Отсюда, в силу теоремы B (при $\varkappa=0$) и очевидного неравенства

$$1\leqslant|re^{\pm i\vartheta}\pm i|\leqslant 3;\ 0\leqslant r\leqslant 2,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,$$

приходим к оценкам

$$\sup_{0<\vartheta<\pi}\left\{\int_0^2|\Psi_1^{\pm}(re^{\pm i\vartheta})|^p\,|re^{\pm i\vartheta}\pm i|^{\varkappa}\,dr\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_4\sup_{0<\vartheta<\pi}\left\{\int_0^2|\Psi_1^{\pm}(re^{\pm i\vartheta})|^p\,dr\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_4\int_0^1|\varphi(t)|^p\,dt\leqslant C_5\|\varphi\|^p_{p,\,\varkappa,\,1}. \tag{3.27}$$

Перейдем к оценке интеграла

$$U(\pm\vartheta)=\left(\int_2^{+\infty}|\Psi_1^{\pm}(re^{\pm i\vartheta})|^p\,|re^{\pm i\vartheta}\pm i|^{\varkappa}\,dr\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_2^{+\infty}\left(\int_0^1\frac{|\varphi(t)|\,|re^{\pm i\vartheta}\pm i|^{\varkappa/p}}{|t-re^{\pm i\vartheta}|}\,dt\right)^p dr\right\}^{1/p},\ 0<\vartheta<\pi. \tag{3.28}$$

Если воспользоваться теперь известным неравенством (см. [23], стр. 318)

$$\left\{\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}|F(x,y)|\,dx\right)^p dy\right\}^{1/p}\leqslant\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}|F(x,\ y)|^p\,dy\right)^{1/p}dx,$$

а также простой оценкой

$$|t-re^{\pm i\vartheta}|\geqslant\frac{1}{2}\,r;\ r>2,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,$$

то получим

$$U(\pm\vartheta)\leqslant\int_0^1\left(\int_2^{+\infty}\frac{|\varphi(t)|^p|re^{-i\vartheta}\pm i|^\varkappa}{|t-re^{-i\vartheta}|^p}\,dr\right)^{1/p}dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^1|\varphi(t)|\,dt\left(\int_2^{+\infty}\frac{|re^{\pm i\vartheta}\pm i|^\varkappa}{r^p}\,dr\right)^{1/p},\ 0<\vartheta\leqslant\pi. \qquad (3.28')$$

Наконец, в силу крайних из неравенств (3.26), простой оценки

$$r\leqslant|re^{\pm i\vartheta}\pm i|\leqslant 3r;\ r\geqslant\frac{1}{2},\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \qquad (3.29)$$

и того, что, ввиду условия $\varkappa<p-1$,

$$\int_2^{+\infty}r^{\varkappa-p}\,dr<+\infty,$$

из (3.28′) заключаем, что

$$\sup_{0<\vartheta<\pi}\left\{\int_2^{+\infty}|\Psi_1^{\pm}(re^{\pm i\vartheta})|^p|re^{-i\vartheta}\pm i|^\varkappa\,dr\right\}\leqslant C_6\|\varphi\|_{p,\ \varkappa,\ 1}^p. \qquad (3.30)$$

Из неравенств (3.27) и (3.30) следует наше неравенство (3.25) для $j=1$.

Перейдем к доказательству неравенства (3.25) для $j=2$.

Из самого определения (3.24) функции $\Psi_2^{\pm}(z)$, применив неравенство Гёльдера, получим при $|z|\leqslant 1/2$

$$|\Psi_2^{\pm}(z)|\leqslant\left\{\int_1^{+\infty}|\varphi(t)|^p|t\pm i|^\varkappa\,dt\right\}^{1/p}\left\{\int_1^{+\infty}\frac{dt}{|t-z|^q|t\pm i|^{\varkappa q/p}}\right\}^{1/q}.$$

Но при $|z|\leqslant 1/2$ и $1\leqslant t<+\infty$, из очевидных неравенств

$$|t-z|\geqslant t-\frac{1}{2}\geqslant\frac{t}{2},\ 2t\geqslant|t\pm i|>t,$$

следуют конечность интеграла

$$\left\{\int_1^{+\infty}\frac{dt}{|t-z|^q|t\pm i|^{\varkappa q/p}}\right\}^{1/q}\leqslant\left\{C_7\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{q(1+\varkappa/p)}}\right\}^{1/q}=C_8<+\infty$$

и оценка для нашей функции

$$\sup_{|z|<1/2}\{|\Psi_2^{\pm}(z)|\}\leqslant C_8\|\varphi\|_{p,\ \varkappa,\ 1}.$$

Отсюда и из очевидных оценок

$$\frac{1}{2} \leqslant |re^{\pm i\theta} \pm i| \leqslant \frac{3}{2};\ 0 < r \leqslant \frac{1}{2},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

получим

$$\int_0^{1/2} |\Psi_2^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p\, |re^{\pm i\theta} \pm i|^{\varkappa}\, dr \leqslant C_9 \|\varphi\|^p_{p,\,\varkappa,\,1},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{3.31}$$

Теперь заметим, что, в силу неравенств (3.29),

$$\int_1^{+\infty} |\varphi(x)|^p\, x^{\varkappa}\, dx \leqslant C_{10} \|\varphi\|^p_{p,\,\varkappa,\,1},$$

и поэтому, по теореме В, в частности, справедливо неравенство

$$\sup_{0<\theta<\pi} \left\{ \int_{1/2}^{+\infty} |\Psi_2^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p\, r^{\varkappa}\, dr \right\} \leqslant C_{11} \|\varphi\|^p_{p,\,\varkappa,\,1}.$$

Наконец, вновь пользуясь оценками (3.29), приходим к неравенству

$$\sup_{0<\theta<\pi} \left\{ \int_{1/2}^{+\infty} |\Psi_2^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p\, |re^{\pm i\theta} \pm i|^{\varkappa}\, dr \right\} \leqslant C_{12} \|\varphi\|^p_{p,\,\varkappa,\,1}. \tag{3.32}$$

Из (3.31) и (3.32) следует нужное нам неравенство (3.25) для $j=2$.

Поскольку оба неравенства (3.25) доказаны, то, определив функцию

$$\Psi_+^{\pm}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-z}\, dt = \Psi_1^{\pm}(z) + \Psi_2^{\pm}(z),\ z \in G^{\pm},$$

мы легко приходим к оценке

$$\sup_{0<\theta<\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |\Psi_+^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p\, |re^{\pm i\theta} \pm i|^{\varkappa}\, dr \right\}^{1/p} \leqslant C_{13} \|\varphi\|_{p,\,\varkappa,\,1}. \tag{3.33}$$

Но функцию $\Phi^{\pm}(z)$ теоремы мы можем представить в виде суммы

$$\Phi^{\pm}(z) = \Psi_-^{\pm}(z) + \Psi_+^{\pm}(z),\ z \in G^{\pm}, \tag{3.34}$$

где

$$\Psi_-^{\pm}(z) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(t)}{t-z}\, dt,\ z \in G^{\pm}.$$

С другой стороны, простой заменой переменных t и z интеграл $\Psi_-^{\pm}(z)$ может быть сведен к интегралу вида $\Psi_+^{\pm}(z)$. Поэтому оценка (3.33) остается в силе и для функции $\Psi_-^{\pm}(z)$:

$$\sup_{0<\theta<\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |\Psi_-^{\pm}(re^{\pm i\theta})|^p\, |re^{\pm i\theta} \pm i|^{\varkappa}\, dr \right\}^{1/p} \leqslant C_{14} \|\varphi\|_{p,\,\varkappa,\,1}. \tag{3.35}$$

Наконец, из (3.33), (3.35) и (3.34) вытекает оценка

$$\sup_{0<\theta<\pi}\left\{\int_0^{+\infty}|\Phi^{\pm}(re^{-i\theta})|^p\,|re^{\pm i\theta}\pm i|^{\varkappa}\,dr\right\}^{1/p}\leqslant C_{15}\|\varphi\|_{p,\,\varkappa,\,1},$$

и, значит, соответственно $(z\pm i)^{\varkappa/p}\,\Phi^{\pm}(z)\in\dot{H}^p_{\pm}$, откуда на основании теоремы Б следует утверждение теоремы.

(б) Перейдем к доказательству основных результатов §§ 2 и 3.

Теорема 3.1. *Пусть* $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty}\in l^{p,\,\varkappa}$ $(1<p<+\infty,\ -1<\varkappa<p-1)$, *а параметр* ν *удовлетворяет условию*

$$\frac{1+\varkappa}{p}<\nu<1+\frac{1+\varkappa}{p}. \tag{3.11'}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. *Ряд*

$$f(z)=\sigma^{-1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'a_k\,\frac{S_\nu(\sigma z)}{\dot{S}_\nu(\sigma x_k)(z-x_k)} \tag{3.36}$$

равномерно сходится в любом круге $|z|\leqslant R<+\infty$, *согласно лемме* 3.3, *и сходится также в метрике* $W^{p,\,\varkappa}_\sigma$ *к целой функции* $f(z)\in W^{p,\,\varkappa}_\sigma$.

2°. *Функция* $f(z)$ *удовлетворяет интерполяционным условиям*

$$f(x_k)=a_k\ (-\infty<k<+\infty), \tag{3.37}$$

и для ее нормы имеет место оценка

$$\|f\|_{p,\,\varkappa}\leqslant C\,\|\{a_k\}\|_{p,\,\varkappa}, \tag{3.38}$$

где $C>0$ — *постоянная, не зависящая от последовательности* $\{a_k\}$.

Доказательство. Для произвольных значений целых чисел $-\infty<n<m<+\infty$ введем в рассмотрение функции

$$f_{n,\,m}(z)=\sigma^{-1}\sum_{k=n}^{m}a_k\,\frac{S_\nu(\sigma z)}{\dot{S}_\nu(\sigma x_k)(z-x_k)}\equiv S_\nu(\sigma z)\,\varphi_{n,\,m}(z).$$

Поскольку, согласно лемме 1.4,

$$\frac{S_\nu(\sigma z)}{z-x_k}\in W^{p,\,\varkappa}_\sigma\ (-\infty<k<+\infty),$$

то очевидно, что также $f_{n,\,m}(z)\in W^{p,\,\varkappa}_\sigma$, и, в силу леммы 2.3, имеют место неравенства

$$\|f_{n\ m}(x)\|_{p,\,\varkappa}\leqslant C_1\|f(x+i)\|_{p,\,\varkappa}<C_2\|f_{n,\,m}(x+i)\|_{p,\,\varkappa,\,1}{}^{*},$$

т. е.

$$\|f_{n,\,m}\|^p_{p,\,\varkappa}\leqslant C_2^p\int_{-\infty}^{+\infty}|S_\nu(x+i)\,\varphi_{n,\,m}(x+i)|^p\,|x+i|^{\varkappa}\,dx.$$

Заметив теперь, что по лемме 1.3′ двойное неравенство

$$|S_\nu(\sigma(x+i))|\asymp|x+i|^{1-\nu},\ -\infty<x<+\infty,$$

* Здесь и в дальнейшем зависимость постоянных C_j $(j=1,\,2,\cdots)$ от параметров p, $\varkappa$, $\nu,\cdots$ и т. д., как и раньше, мы специально не будем отмечать.

справедливо равномерно для всех x, будем иметь, далее,

$$\|f_{n,m}\|^p_{p,\alpha} \leqslant C_3 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{n,m}(x+i)|^p \, |x+i|^\delta \, dx, \tag{3.39}$$

где $\delta = \alpha + p(1-\nu)$, причем $-1 < \delta < p-1$, ввиду условия (3.11′) теоремы.

Но по теореме Хана-Банаха

$$\|\varphi_{n,m}(x+i)\|_{p,\delta,1} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{n,m}(x+i)|^p \, |x+i|^\delta \, dx \right\}^{1/p} =$$

$$= \sup_{\|g\|_q \leqslant 1} \left\{ \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,m}(x+i)\, g(x) \, |x+i|^{\delta/p} \, dx \right| \right\}; \; q = \frac{p}{p-1},$$

и, следовательно, существует функция $g_0(x) \in L_q(-\infty, +\infty)$ такая, что $\|g_0\|_q \leqslant 1$ и

$$\|\varphi_{n,m}(x+i)\|_{p,\alpha,1} \leqslant 2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,m}(x+i) g_0(x) \, |x+i|^{\delta/p} \, dx \right|. \tag{3.40}$$

Теперь, наряду с функцией $g_0(x)$, рассмотрим функцию $G_0(x) = g_0(x) \, |x+i|^{\delta/p}$ и заметим, что

$$\|G_0\|_{q,\delta_1,1} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |G_0(x)|^q \, |x+i|^{\delta_1} \, dx \right\}^{1/q} = \|g_0\|_q \leqslant 1, \tag{3.41}$$

где $\delta_1 = -\frac{\delta}{p} q$, причем $-1 < \delta_1 < q-1$. Кроме того, ввиду (3.40),

$$\|\varphi_{n,m}(x+i)\|_{p,\alpha,1} \leqslant 2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,m}(x+i) \, G_0(x) \, dx \right|. \tag{3.40′}$$

Рассмотрим также интеграл типа Коши

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_0(t)}{t-z} \, dt, \; z \in G^-,$$

для которого, на основании теоремы Г и неравенства (3.41) можем утверждать:

$$\begin{aligned} &1) \quad G(z)(z-i)^{\delta_1/q} \in H^q_-, \\ &2) \quad \|G(x)(x-i)^{\delta_1/q}\|_q \leqslant C^*_{p,\alpha} \|G_0\|_{q,\delta_1,1} \leqslant C^*_{p,\alpha}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Но имея ввиду определение функции

$$\varphi_{n,m}(z+i) = \sigma^{-1} \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{S_\nu(\sigma x_k)[z-(x_k-i)]},$$

будем иметь

$$J_{n,m} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,m}(x+i)\, G_0(x)\, dx = \sigma^{-1} \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{S_\nu'(\sigma x_k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_0(x)}{x-(x_k-i)}\, dx =$$

$$= \sigma^{-1} \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{S_\nu'(\sigma x_k)} G(x_k - i) = \sigma^{-1} \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k\,(x_k-2i)^{-\frac{\delta_1}{q}}}{S_\nu'(\sigma x_k)} \times$$

$$\times \{G(x_k - i)[(x_k - i) - i]^{\delta_1/q}\}. \tag{3.43}$$

Для оценки величин $J_{n,m}$ воспользуемся неравенством Гёльдера и заметим, что по лемме 1.5 и по (3.14)

$$|x_k - 2i| \asymp 1 + |k| \text{ и } |S_\nu'(\sigma x_k)| \asymp (1+|k|)^{1-\nu}, \quad -\infty < k < +\infty.$$

Тогда из (3.43) по лемме 3.2 мы получим

$$|J_{n,m}| \leqslant C_4 \|\{a_k\}_n^m\|_{p,\varkappa} \left\{\sum_{k=n}^{m} |G(x_k - i)|^q\, |(x_k - i) - i|^{\delta_1}\right\}^{1/q}. \tag{3.44}$$

Но согласно (3.42) и лемме 3.2 справедлива оценка

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |G(x_k - i)|^q\, |(x_k - i) - i|^{\delta_1} \leqslant C_5,$$

откуда, а также из (3.39), (3.40′), (3.43) и (3.44) мы приходим к оценке

$$\|f_{n,m}\|_{p,\varkappa} \leqslant C_6 \|\{a_k\}_n^m\|_{p,\varkappa}.$$

Наконец, в силу леммы 2.2 о полноте пространства $W_\sigma^{p,\varkappa}$ и в силу леммы 3.3, переходом к пределу при $n \to -\infty$ и $m \to +\infty$, мы заключаем о справедливости обоих утверждений 1° и 2° нашей теоремы, поскольку $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^{p,\varkappa}$.

Теорема 3.2. *Если*

$$f(z) \in W_\sigma^{p,\varkappa} \quad (1 < p < +\infty,\ -1 < \varkappa < p-1),$$

то при условии (3.11′) *имеет место разложение*

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x_k) \frac{S_\nu(\sigma z)}{S_\nu'(\sigma x_k)(z - x_k)}, \tag{3.45}$$

сходящееся равномерно в любом круге $|z| \leqslant R$ *и в среднем по метрике пространства* $W_\sigma^{p,\varkappa}$.

Доказательство. Природа сходимости ряда (3.45) следует из леммы 3.1 и теоремы 3.1, причем, если мы обозначим его сумму через $f_*(z)$, то функция

$$\omega(z) = f(z) - f_*(z) \in W_\sigma^{p,\varkappa}$$

удовлетворяет условиям

$$\omega(x_k)=0 \quad (-\infty<k<+\infty). \tag{3.46}$$

Далее, в силу неравенства (2.20) леммы 2.2 (1°), справедлива оценка

$$|\omega(z)|\leqslant C_1\|\omega\|_{p,\,z}(1+|z|)^{-\frac{\varkappa}{p}}e^{\sigma|\operatorname{Im}z|},\ z\in\mathbf{C}. \tag{3.47}$$

Определим теперь функцию

$$\varphi(z)=\frac{\omega(z)}{S_\nu(\sigma z)}, \tag{3.48}$$

которая вновь будет целой в силу (3.46) и того, что $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — суть все, притом простые, нули функции $S_\nu(\sigma z)$.

Более того, поскольку $\omega(z)$ и $S_\nu(\sigma z)$ — целые функции экспоненциального типа $\leqslant\sigma$, то из тождества

$$\omega(z)=S_\nu(\sigma z)\,\varphi(z),$$

на основании известной теоремы (см., например, [24], гл. 1, § 9), непосредственно следует, что $\varphi(z)$ также является целой функцией первого порядка и нормального типа.

Далее, согласно лемме 1.3, в областях

$$D_\pm=\left\{z:\ \left|\arg z\mp\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{4},\ 1<|z|<+\infty\right\}$$

справедлива двусторонняя оценка вида

$$|S_\nu(\sigma z)|\asymp(1+|z|)^{1-\nu}e^{\sigma|\operatorname{Im}z|},\ z\in\overline{D}=\overline{D}_+\cup\overline{D}_-. \tag{3.49}$$

Рассматривая, далее, угловые области

$$D_\pm^0=\left\{z:\ \left|\arg z\mp\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant|z|<+\infty\right\},$$

заметим, что из (3.47) и (3.49) вытекает справедливость оценок

$$|\varphi(z)|\leqslant C_2(1+|z|)^{\nu-\frac{\varkappa}{p}-1},\ z\in D_\pm^0.$$

Но если ввести также целую функцию

$$\Psi(z)=\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{z}, \tag{3.50}$$

которая также экспоненциального типа, то будем иметь

$$|\Psi(z)|\leqslant C_3(1+|z|)^{\nu-\frac{\varkappa}{p}-2}+\frac{C_4}{1+|z|},\ z\in D_\pm^0.$$

Так как по условию $\nu<1+\dfrac{1+\varkappa}{p}$, т. е. $\nu-\dfrac{\varkappa}{p}-2<-\dfrac{1}{q}$, то из последнего неравенства непосредственно следует, что

$$\sup_{z\in D_\pm^0}\{|\Psi(z)|\}\leqslant C_5<+\infty,\ \lim_{|y|\to+\infty}\Psi(iy)=0. \tag{3.51}$$

Поскольку $\Psi(z)$ — экспоненциального типа и ограничена на границах угловых областей $\Omega_+^0 = \{z: |\arg z| < \pi/4\}$ и $\Omega_-^0 = \{z: |\arg z - \pi| < \pi/4\}$ раствора $\pi/2$, то, по принципу Фрагмена-Линделёфа, наряду с (3.51) имеем также

$$\sup_{z \in \Omega_\pm^0} ||\Psi(z)|| \leqslant C_0 < +\infty. \tag{3.52}$$

Из свойств (3.51) и (3.52) функции $\Psi(z)$ по теореме Лиувилля следует, что $\Psi(z) \equiv 0$, т. е. $\varphi(z) \equiv \varphi(0)$, и, таким образом, в силу (3.50) и (3.51) мы приходим к тождеству

$$\omega(z) \equiv \varphi(0)\, S_\nu(\sigma z),\ z \in \mathbf{C}.$$

Но, с одной стороны, $\omega(z) \in W_2^{p,\varkappa}$, а с другой, согласно утверждению (1.22) леммы 1.4, $S_\nu(\sigma z) \notin W_2^{p,\varkappa}$. Таким образом, мы не приходим к противоречию лишь когда $\varphi(0) = \varphi(z) \equiv 0$.

Итак, мы получили тождество

$$\omega(z) = f(z) - f_*(z) \equiv 0,$$

чем и завершается доказательство теоремы.

На основании теорем 3.1_2° и 3.2, а также леммы 3.1 вытекает

Теорема 3.3. *Для произвольной последовательности* $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^{p,\varkappa}$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < \varkappa < p-1)$, *и при любом значении параметра* $\nu \in \left(\frac{1+\varkappa}{p},\ 1+\frac{1+\varkappa}{p}\right)$ *ряд*

$$f(z) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \frac{S_\nu(\sigma z)}{S_\nu'(\sigma x_k)(z - x_k)},$$

где $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty} \subset (-\infty, +\infty)$ — *нули функции*

$$S_\nu(\sigma z) = \sigma z E_{1/2}(-\sigma^2 z^2;\ 1+\nu),$$

сходящийся равномерно в любом круге $|z| \leqslant R$, *а также в метрике* $W_\sigma^{p,\varkappa}$, *осуществляет взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства* $l^{p,\varkappa}$ *на все пространство функций* $f(z) \in W_\sigma^{p,\varkappa}$, *причем*

$$\|f\|_{p,\varkappa} \asymp \|\{a_k\}\|_{p,\varkappa} \text{ и } \{f(x_k) = a_k\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

§ 4. Интерполяционные разложения в классах $W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ целых функций второго порядка

4.1 (а) Пусть

$$e\{+\} = \{z: z \in (-\infty, +\infty) \cup (-i\infty, +i\infty)\} -$$

совокупность координатных осей комплексной плоскости z.

Обозначим через $W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < \omega < p-1)$ множество целых функций $f(z)$ порядка $\rho = 2$ и типа $\leqslant \sigma$, для которых

$$\|f;\ e\{+\}\|_{\rho,\infty}=\Big(\int\limits_{e\{+\}}|f(z)|^{p}\,|z|^{\infty}\,|dz|\Big)^{1/p}=$$

$$=\Big(\sum_{k=0}^{3}\int\limits_{0}^{+\infty}|f(re^{i\frac{\pi}{2}k})|^{p}\,r^{\infty}\,dr\Big)^{1/p}<+\infty. \tag{4.1}$$

Отметим, что как множество $W_{\sigma}^{\rho,\varkappa}$ целых функций экспоненциального типа с нормой (2.1)—$\|f\|_{\rho,\varkappa}$, так и множество $W_{2,\sigma}^{\rho,\infty}$ с нормой (4.1)—$\|f;\ e\{+\}\|_{\rho,\infty}$, будут банаховыми пространствами. Это утверждение, в частности, следует из леммы, приводимой ниже.

Лемма 4.1. 1°. *Класс $W_{2,\sigma}^{\rho,\infty}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, представимых в виде*

$$f(z)=\varphi(z^{2})+z\psi(z^{2}), \tag{4.2}$$

где

$$\varphi(w)\in W_{\sigma}^{\rho,\varkappa_1},\ \varkappa_1=\frac{\infty-1}{2}; \tag{4.3'}$$

$$\psi(w)\in W_{\sigma}^{\rho,\varkappa_2},\ \varkappa_2=\frac{\infty-1+\rho}{2}. \tag{4.3''}$$

2°. *Справедливы неравенства*

$$\frac{1}{2}\{\|\varphi\|_{\rho,\varkappa_1}+\|\psi\|_{\rho,\varkappa_2}\}\leqslant\|f;\ e\{+\}\|_{\rho,\infty}\leqslant\{\|\varphi\|_{\rho,\varkappa_1}+\|\psi\|_{\rho,\varkappa_2}\}, \tag{4.4}$$

а также

$$2^{-1}\{\|\varphi\|_{\rho,\varkappa_1}^{\rho}+\|\psi\|_{\rho,\varkappa_2}^{\rho}\}\leqslant\|f;\ e\{+\}\|_{\rho,\infty}^{\rho}\leqslant 2^{\rho}\{\|\varphi\|_{\rho,\varkappa_1}^{\rho}+\|\psi\|_{\rho,\varkappa_2}^{\rho}\}. \tag{4.4'}$$

Доказательство. Сначала же заметим, что вообще, если $f(z)$—целая функция порядка ρ и типа $\leqslant\sigma$, то положив

$$\varphi(z^{2})\equiv\frac{1}{2}[f(z)+f(-z)]\ \text{и}\ z\psi(z^{2})\equiv\frac{1}{2}[f(z)-f(-z)], \tag{4.5}$$

мы получим представление вида (4.2), где $\varphi(w)$ и $\psi(w)$ будут целыми функциями порядка $\leqslant\rho/2$ и типа $\leqslant\sigma$. Точнее, хотя бы одна из этих функций будет ровно порядка $\rho/2$.

Верно и обратное утверждение—если $\varphi(w)$ и $\psi(w)$—суть целые функции порядка $\rho/2$ и типа $\leqslant\sigma$, то формула (4.2) определяет целую функцию порядка $\leqslant\rho$ и типа $\leqslant\sigma$.

1°. Из определения чисел $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ легко следуют равенства

$$\|\varphi\|_{\rho,\varkappa_1}^{\rho}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(u)|^{\rho}\,|u|^{\varkappa_1}\,du=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x^{2})|^{\rho}\,|x|^{\infty}\,dx+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(-y^{2})|^{\rho}\,|y|^{\infty}\,dy=\int\limits_{e\{+\}}|\varphi(z^{2})|^{\rho}\,|z|^{\infty}\,|dz|=\|\varphi(z^{2});\ e\{+\}\|_{\rho,\infty}^{\rho}, \tag{4.6'}$$

и аналогично

$$\|\psi\|^p_{p,\,\varkappa_2}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\psi(u)|^p\,|u|^{\varkappa_2}\,du=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x\psi(x^2)|^p\,|x|^{\omega}\,dx+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|iy\psi(-y^2)|^p\,|y|^{\omega}\,dy=\int\limits_{e\{+\}}|z\psi(z^2)|^p\,|z|^{\omega}\,|dz|=\|z\psi(z^2);\,e\{+\}\|^p_{p,\,\omega}. \quad (4.6'')$$

При этом заметим, что наше условие $-1<\omega<p-1$ соответственно равносильно условиям: $-1<\varkappa_1<\frac{p}{2}-1$ и $\frac{p}{2}-1<\varkappa_2<p-1$. Поэтому, из наших равенств (4.6′) и (4.6″) следует, что утверждения

$$\varphi(w)\in W^{p,\,\varkappa_1}_{\sigma}\ \text{и}\ \varphi(z^2)\in W^{p,\,\omega}_{2,\,\sigma},$$

а также

$$\psi(w)\in W^{p,\,\varkappa_2}_{\sigma}\ \text{и}\ z\psi(z^2)\in W^{p,\,\omega}_{2,\,\sigma}$$

совершенно равносильны.

2°. Из представления (4.2) в силу неравенства Минковского и равенств (4.6′) и (4.6″) мы, во-первых, будем иметь

$$\|f;\,e\{+\}\|_{p,\,\omega}\leqslant\|\varphi(z^2);\,e\{+\}\|_{p,\,\omega}+\|z\psi(z^2);e\{+\}\|_{p,\,\omega}=\|\varphi\|_{p,\,\varkappa_1}+\|\psi\|_{p,\,\varkappa_2}. \quad (4.7')$$

Отсюда, в силу известного неравенства $(a+b)^p\leqslant 2^p(a^p+b^p)(0\leqslant a,\ b<+\infty)$, следует еще, что

$$\|f;\,e\{+\}\|^p_{p,\,\omega}<2^p\{\|\varphi\|^p_{p,\,\varkappa_1}+\|\psi\|^p_{p,\,\varkappa_2}\}. \quad (4.7'')$$

Во-вторых, по (4.5) и (4.6′)—(4.6″) имеем также

$$\|\varphi\|_{p,\,\varkappa_1}=\|\varphi(z^2);\,e\{+\}\|_{p,\,\omega}\leqslant\|f;\,e\{+\}\|_{p,\,\omega},$$

$$\|\psi\|_{p,\,\varkappa_2}=\|z\psi(z^2);\,e\{+\}\|_{p,\,\omega}\leqslant\|f;\,e\{+\}\|_{p,\,\omega},$$

откуда следуют оценки

$$\|\varphi\|_{p,\,\varkappa_1}+\|\psi\|_{p,\,\varkappa_2}\leqslant 2\,\|f;\,e\{+\}\|_{p,\,\omega}, \quad (4.8')$$

$$\|\varphi\|^p_{p,\,\varkappa_1}+\|\psi\|^p_{p,\,\varkappa_2}\leqslant 2\,\|f;\,e\{+\}\|^p_{p,\,\omega}. \quad (4.8'')$$

Из установленных выше неравенств (4.7′)—(4.7″) и (4.8′)—(4.8″) вытекают двусторонние оценки (4.4) и (4.4′) леммы.

(б) Вернемся к обозначениям § 1, 3 и введем здесь новые.

Во-первых, определим целую функцию второго порядка и типа σ $(0<\sigma<+\infty)$, положив

$$\pi_\nu(z)\equiv S_\nu(\sigma z^2)=\sigma z^2\,E_{1/2}(-\sigma^2 z^4;\ 1+\nu),\ 0\leqslant\nu<2. \quad (4.9)$$

На основании леммы 1.1 можно утверждать, что для рассматриваемых нами значений параметра $\nu\in[0,2)$ все нули функции $\pi_\nu(z)$, кроме двукратного нуля $z=0$, простые и расположены только на координатных осях $\operatorname{Im} z=0$ и $\operatorname{Re} z=0$.

В начале § 3 был приведен краткий обзор о распределении нулей функции $S_\nu(\sigma z)$—

$$x_k = \sigma^{-1} x_{\nu, k} \ (-\infty < k < +\infty),$$

которые при $0 \leqslant \nu < 2$ все простые и симметрично расположены на вещественной оси, причем так, что

$$x_0 = 0, \ x_{-k} = -x_k \ (1 \leqslant k < +\infty).$$

Определим теперь две последовательности чисел, лежащие соответственно на вещественной и мнимой осях комплексной плоскости z:

$$\mu_k = \sqrt{x_k}, \ \mu_{-k} = -\mu_k = -\sqrt{x_k}; \quad (1 \leqslant k < +\infty), \tag{4.10}$$

$$\nu_k = i\sqrt{x_k}, \ \nu_{-k} = -\nu_k = -i\sqrt{x_k};$$

которыми исчерпывается множество всех нулей функции $\pi_\nu(z)$, кроме двукратного нуля $z = 0$.

Введем, наконец, единую нумерацию для всех нулей функции $\pi_\nu(z)$, определив последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ таким образом:

$$\lambda_0 = 0, \ \lambda_{2k-1} = \mu_k = \sqrt{x_k}, \ \lambda_{-2k+1} = \mu_{-k} = -\sqrt{x_k}; \quad (1 \leqslant k < +\infty)$$

$$\lambda_{2k} = \nu_k = i\sqrt{x_k}, \ \lambda_{-2k} = \nu_{-k} = -i\sqrt{x_k}. \tag{4.11}$$

Например, отметим, что в случае $\nu = 1$

$$\pi_1(z) = S_1(\sigma z^2) = \sin \sigma z^2, \tag{4.9'}$$

и последовательность нулей этой функции запишется в явном виде

$$\lambda_0 = 0, \ \lambda_{2k-1} = \sqrt{\pi\sigma^{-1} k}, \ \lambda_{-2k+1} = -\sqrt{\pi\sigma^{-1} k}; \quad (1 \leqslant k < +\infty).$$

$$\lambda_{2k} = i\sqrt{\pi\sigma^{-1} k}, \ \lambda_{-2k} = -i\sqrt{\pi\sigma^{-1} k}. \tag{4.11'}$$

(в) Напомним, что, по определению (3.1), $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^{p, \varkappa}$ $(1 < p < +\infty, -1 < \varkappa < p-1)$, если

$$\|\{a_k\}\|_{p, \varkappa} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^p (1+|k|)^\varkappa \right)^{1/p} < +\infty. \tag{4.12}$$

Кроме того, ради краткости, для значений параметров $1 < p < +\infty$ и $-1 < \omega < p-1$ введем также в рассмотрение интервал вида

$$\Delta_{p, \omega} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\omega}{2p}, \ 1 + \frac{1+\omega}{2p} \right). \tag{4.13}$$

Докажем теперь следующую теорему вложения.

Теорема 4.1. *Пусть в определении функции* $S_\nu(\sigma z)$ *и ее нулей* $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty} = \{\sigma^{-1} x_{\nu, k}\}_{-\infty}^{+\infty}$ *параметр*

$$\nu \in \Delta_{p, \omega} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\omega}{2p}, \ 1 + \frac{1+\omega}{2p} \right). \tag{4.14}$$

Тогда для любой функции $f(z) \in W^p_{2,\omega}$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < \omega < p-1)$ *будем иметь*

$$\{f(\lambda_k)\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^{p,\ \frac{\omega-1}{2}}; \tag{4.15}$$

при этом справедливы неравенства вида

$$d\,\|\{f(\lambda_k)\}\|_{p,\ \frac{\omega-1}{2}} \leqslant \|f;\ e\ \{+\infty\}\|_{p,\ \omega} \leqslant D\{|f'(\lambda_0)|^p + \|\{f(\lambda_k)\}\|^p_{p,\ \frac{\omega-1}{2}}\}^{1/p}, \tag{4.16}$$

где $d = d_\omega(p, \omega) > 0$ *и* $D = D_\omega(p, \omega) > 0$ *— постоянные, не зависящие от* f.

Доказательство. По лемме 4.1 функция $f(z)$ допускает представление вида (4.2), где $\varphi(w) \in W^{p,\ x_1}_\omega\left(x_1 = \frac{\omega-1}{2}\right)$ и $\psi(w) \in W^{p,\ x_2}_\omega$ $\left(x_2 = \frac{\omega+p-1}{2}\right)$ и, как уже отмечалось, $-1 < x_1 < \frac{p}{2} - 1$ и $\frac{p}{2} - 1 < x_2 < p-1$. Поэтому, согласно теореме 3.3, если

$$\nu \in \left(\frac{1+x_1}{p},\ 1+\frac{1+x_1}{p}\right) = \left(\frac{1+\omega}{2p},\ 1+\frac{1+\omega}{2p}\right) \subset [0,\ 2), \tag{4.17}$$

то

$$\|\{\varphi(x_k)\}\|_{p,\ x_1} \asymp \|\varphi\|_{p,\ x_1}; \tag{4.18}$$

если же

$$\nu \in \left(\frac{1+x_2}{p},\ 1+\frac{1+x_2}{p}\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1+\omega}{2p},\ \frac{3}{2}+\frac{1+\omega}{2p}\right) \subset [0,2), \tag{4.19}$$

то

$$\|\{\psi(x_k)\}\|_{p,\ x_2} \asymp \|\psi\|_{p,\ x_2}. \tag{4.20}$$

Следовательно, если параметр ν принадлежит общей части обоих интервалов (4.17) и (4.19), т. е. $\nu \in \Delta_{p,\omega}$, то двойные неравенства (4.18) и (4.20) будут одновременно справедливы. Далее, пользуясь обозначениями (4.11), мы будем иметь

$$f(\lambda_{\pm 2k}) = f(\nu_{\pm k}) = \varphi(-x_k) \pm i\sqrt{x_k}\,\psi(-x_k), \qquad (1 \leqslant k < +\infty)$$

$$f(\lambda_{\pm 2k \mp 1}) = f(\mu_{\pm k}) = \varphi(x_k) \pm \sqrt{x_k}\,\psi(x_k),$$

откуда непосредственно следуют неравенства

$$|f(\lambda_{\pm 2k})|^p \leqslant 2^p\,\{|\varphi(-x_k)|^p + x_k^{p/2}\,|\psi(-x_k)|^p\},\ 0 \leqslant k < +\infty, \tag{4.21}$$

$$|f(\lambda_{\pm 2k \mp 1})|^p \leqslant 2^p\,\{|\varphi(x_k)|^p + x_k^{p/2}\,|\psi(x_k)|^p\},\ 1 \leqslant k < +\infty.$$

В начале § 3 мы вновь напомнили природу распределения нулей $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ функции $S_\nu(\sigma z)$; она была исследована нами в § 1. Как отмечалось уже, из их распределения, в частности, следовало двойное неравенство вида

$$|x_k| = |\sigma^{-1}\,x_{\nu,\ k}| \asymp 1 + |k|\ (1 \leqslant |k| < +\infty). \tag{4.22}$$

Поэтому, заметив, что $x_1 + \frac{p}{2} = x_2$ и $x_{-k} = -x_k$ $(1 \leqslant k < +\infty)$, мы, ввиду неравенств (4.21), приходим к оценкам

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|2k|)^{\varkappa_1}|f(\lambda_{2k})|^p \leqslant C_1\left\{\sum_{k=-\infty}^{0}(1+|k|)^{\varkappa_1}|\varphi(x_k)|^p + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=-\infty}^{0}(1+|k|)^{\varkappa_2}|\psi(x_k)|^p\right\}, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|2k+1|)^{\varkappa_1}|f(\lambda_{2k+1})|^p \leqslant$$

$$\leqslant C_2\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}(1+|k|^{\varkappa_1})|\varphi(x_k)|^p + \sum_{k=1}^{+\infty}(1+|k|)^{\varkappa_2}|\psi(x_k)|^p\right\},$$

где здесь и дальше $C_j = C_j(p, \omega) > 0$ $(j=1, 2, \cdots)$ — постоянные, не зависящие от функции f.

Сложив эти оценки, а затем пользуясь правыми из двусторонних неравенств (4.18) и (4.20), получим

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|)^{(\omega-1/2)}|f(\lambda_k)|^p \leqslant C_3\{\|\varphi(x_k)\|^p_{p,\,\varkappa_1} + \|\psi(x_k)\|^p_{p,\,\varkappa_2}\} \leqslant$$

$$\leqslant C_4\{\|\varphi\|^p_{p,\,\varkappa_1} + \|\psi\|^p_{p,\,\varkappa_2}\}.$$

Отсюда, пользуясь левым из неравенств (4.4′) леммы 4.1, заключаем, что справедливо как утверждение (4.15), так и левое из неравенств (4.16) теоремы.

Установим теперь правое из требуемых неравенств (4.16).

Поскольку по (4.5)

$$|(\varphi(z^2)|^p \leqslant |f(z)|^p + |f(-z)|^p \text{ и } |\psi(z^2)|^p \leqslant (|f(z)|^p + |f(-z)|^p)\,|z|^{-p}\ (z \neq 0), \tag{4.23}$$

то, во-первых, в силу обозначений (4.11) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|k|)^{\varkappa_1}|\varphi(x_k)|^p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(1+|k|)^{\varkappa_1}|f(\sqrt{x_k})|^p +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(1+|k|)^{\varkappa_1}|f(-\sqrt{x_k})|^p = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'(1+|k|)^{\varkappa_1}|f(\mu_k)|^p,$$

и аналогично

$$\sum_{k=-\infty}^{-1}(1+|k|)^{\varkappa_1}|\varphi(x_k)|^p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(1+|k|)^{\varkappa_1}|f(i\sqrt{x_k})|^p +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(1+|k|)^{\varkappa_1}|f(-i\sqrt{x_k})|^p = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'(1+|k|)^{\varkappa_1}|f(\nu_k)|^p,$$

где штрих у знака суммы означает, что индекс $k=0$ пропускается.

Сложением этих двух неравенств и равенства $|\varphi(x_0)|^p = |f(\lambda_0)|^p$, с учетом того, что последовательность точек $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ является объединением последовательностей $\{\mu_k\}_{-\infty}^{+\infty} \subset (-\infty, +\infty)$, $\{\nu_k\}_{-\infty}^{+\infty} \subset (-i\infty, +i\infty)$ и точки $\lambda_0 = 0$, мы приходим к оценке

$$\|\varphi(x_k)\|_{p,\,\varkappa_1} \leqslant C_5\|f(\lambda_k)\|_{p,\,\frac{\omega-1}{2}}. \tag{4.24}$$

Во-вторых, ввиду тех же обозначений (4.11), а также в силу второй из оценок (4.23), если учесть также, что $\varkappa_2 - p/2 = \varkappa_1$ и (4.22), мы будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|k|)^{x_1}|\psi(x_k)|^p \leqslant$$

$$\leqslant C_6\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1+|k|)^{x_1}|f(\sqrt{x_k})|^p+\sum_{k=1}^{\infty}(1+|k|)^{x_1}|f(-\sqrt{x_k})|^p\right\}=$$

$$=C_6\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'(1+k|)^{x_1}|f(\mu_k)|^p,$$

и аналогично получим

$$\sum_{k=-\infty}^{-1}(1+|k|)^{x_2}|\psi(x_k)|^p\leqslant C_6\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'(1+|k|)^{x_1}|f(\nu_k)|^p.$$

Складывая эти два неравенства с равенством $|\psi(x_0)|^p=|f'(\lambda_0)|^p$, мы приходим к оценке

$$\|\{\psi(x_k)\}\|_{p,\,x_2}\leqslant C_7\{|f'(\lambda_0)|^p+\|f(\lambda_k)\|^p_{p,\,\frac{m-1}{2}}\}^{1/p}. \tag{4.25}$$

Наконец, из (4.24) и (4.25), принимая во внимание правое из неравенств (4.4) леммы 4.1, мы придем к правому из неравенств (4.16) чем и завершим доказательство теоремы.

4.2. В этом пункте все введенные в пункте 4.1 обозначения и определения останутся в силе. А именно, пусть, согласно (4.9) и (4.11)

$$\pi_\nu(z)=S_\nu(\sigma z^2)=\sigma z^2\,E_{1/2}(-\sigma^2 z^4;\ 1+\nu),\ 0\leqslant\nu<2,$$

и $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — последовательность нулей целой функции $\pi_\nu(z)$, которые, кроме двойного нуля $\lambda_0=0$, являются простыми и лежат на координатных осях.

Заметив теперь, что $S'_\nu(0)=\Gamma^{-1}(1+\nu)$, введем в рассмотрение последовательность функций, ассоциированную с нулями $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ функции $\pi_\nu(z)$. А именно, положив

$$\Omega_0^*(z)=\Gamma(1+\nu)\frac{\pi_\nu(z)}{\sigma z}=\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{\sigma z\,S'_\nu(0)},$$

$$\Omega_0(z)=\Gamma(1+\nu)\frac{\pi_\nu(z)}{\sigma z^2}=\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{\sigma z^2\,S'_\nu(0)}, \tag{4.26}$$

$$\Omega_k(z)=\frac{\pi_\nu(z)}{\pi'_\nu(\lambda_k)(z-\lambda_k)}=\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{2\sigma\lambda_k\,S'_\nu(\sigma\lambda_k^2)(z-\lambda_k)}$$
$$(k=\pm1,\ \pm2,\cdots),$$

определим систему функций

$$\{\Omega_0^*(z),\ [\Omega_k(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}. \tag{4.27}$$

Имея ввиду природу нулей $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ функции $\pi_\nu(z)$, а также (4.26), нетрудно убедиться в том, что система (4.27) обладает следующими, весьма важными для всего дальнейшего изложения, интерполяционными свойствами:

$$\Omega_0^*(\lambda_j)=0\ (j=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots);\quad \frac{d\Omega_0^*(z)}{dz}\Big|_{z=\lambda_0}=1; \tag{4.28}$$

$$\Omega_k^*(\lambda_0)=0,\ \Omega_k(\lambda_j)=\delta_{kj}=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j,\end{cases}\ (k,\ j=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots). \tag{4.29}$$

(а) Прежде, чем доказывать вторую основную теорему данного параграфа, приведем следующую лемму.

Лемма 4.2. 1°. *Для любой последовательности комплексных чисел* $\{a_0^*,\ [a_k]_{-n}^{+m}\}$ *суммы вида*

$$S_{n,m}(z)=a_0^*\,\Omega_0^*(z)+\sum_{k=-n}^{m}a_k\,\Omega_k(z)\ (1\leqslant n,\ m<+\infty) \tag{4.30}$$

удовлетворяют интерполяционным условиям

$$S_{n,m}(\lambda_j)=\begin{cases}a_j, & j\in[-n,\ m],\\ 0, & j\overline{\in}\,[-n,\ m],\end{cases}\quad S_{n,m}(\lambda_0)=a_0^*. \tag{4.31}$$

2°. *Если*

$$\frac{1}{2}+\frac{1+\omega}{2p}<\nu<2, \tag{4.32}$$

то каждая из функций системы (4.27), *следовательно, и любая сумма вида* $S_{n,m}(z)$ *принадлежит классу* $W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$.

Доказательство. Что касается утверждения 1°, то оно является непосредственным следствием интерполяционных свойств (4.28)—(4.29) нашей системы (4.27).

Отметим теперь, что, пользуясь леммой 1.2, мы приходим к оценке

$$|\pi_\nu(z)|=|S_\nu(\sigma z^2)|\leqslant C\,(1+|z|^2)^{1-\nu},\ z\in e\{+\},$$

где $C>0$ не зависит от z.

Поэтому для любого k $(1\leqslant|k|<+\infty)$ существует число $r_k>|\lambda_k|$ такое, что справедливы оценки вида

$$|(z-\lambda_k)^{-1}\pi_\nu(z)|\leqslant C_k|z|^2,\ |z|\leqslant r_k;$$

$$|(z-\lambda_k)^{-1}\pi_\nu(z)|\leqslant C_k^*|z|^{1-2\nu};\ z\in e\{+\},\ |z|\geqslant r_k;$$

и, наконец, $|\pi_\nu(z)|\leqslant C_0|z|^2$, $|z|\leqslant1$, где C_k, C_k^* и C_0 — постоянные, не зависящие от z.

Из этих оценок легко вытекает конечность всех интегралов при условии $\nu>\frac{1}{2}+\frac{1+\omega}{2p}$. Итак, при условии (4.32) утверждение 2° также справедливо.

(б) Обозначим теперь для $f(z)\in W_{2,\sigma}^{p,\omega}$

$$S_{n,m}(z;f)=f'(0)\,\Omega_0^*(z)+\sum_{k=-n}^{m}f(\lambda_k)\,\Omega_k(z) \tag{4.33}$$

$$(1\leqslant n,\ m<+\infty)$$

и докажем теорему.

Теорема 4.2. 1°. *Для любой функции* $f(z) \in W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ $(1<p<+\infty,$ $-1<\omega<p-1)$ *и при любом значении параметра* $\nu \in \Delta_{p,\omega}$, *т. е. при*

$$\frac{1}{2}+\frac{1+\omega}{2p}<\nu<1+\frac{1+\omega}{2p},$$

справедливо разложение

$$f(z)=f'(0)\,\mathcal{Q}_0^{\circ}(z)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\lambda_k)\,\mathcal{Q}_k(z),\quad z\in\mathbf{C}, \tag{4.34}$$

равномерно сходящееся в любом круге $|z|\leqslant R<\infty$.

2°. *Ряд* (4.34) *сходится к функции* $f(z)$ *также в метрике* $W_{2,\sigma}^{p,\omega}$, *т. е.*

$$\lim_{n,\,m\to+\infty} \|f(z)-S_{n,m}(z;f);\ e(+)\|_{p,\omega}=0. \tag{4.35}$$

Доказательство. 1°. Согласно лемме 4.1 мы имеем представление

$$f(z)=\varphi(z^2)+z\psi(z^2),$$

где

$$\varphi(w)\in W_{\sigma}^{p,\,\varkappa_1}\left(\varkappa_1=\frac{\omega-1}{2}\right)\ \text{и}\ \psi(w)\in W_{\sigma}^{p,\,\varkappa_2}\left(\varkappa_2=\frac{\omega-1+p}{2}\right).$$

Поэтому, согласно теореме 3.2, мы можем утверждать:
Если

$$\nu\in\left(\frac{1+\varkappa_1}{p},\ 1+\frac{1+\varkappa_1}{p}\right)\ \text{или}\ \nu\in\left(\frac{1+\varkappa_2}{p},\ 1+\frac{1+\varkappa_2}{p}\right), \tag{4.36}$$

то для функций $\varphi(w)$ и $\psi(w)$ будут справедливы разложения

$$\begin{aligned}\varphi(w)&=\sigma^{-1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi(x_k)\frac{S_\nu(\sigma w)}{S_\nu'(\sigma x_k)(w-x_k)},\\ \psi(w)&=\sigma^{-1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\psi(x_k)\frac{S_\nu(\sigma w)}{S_\nu'(\sigma x_k)(w-x_k)},\end{aligned} \tag{4.37}$$

сходящиеся равномерно в любом круге $|w|\leqslant R<+\infty$, а также соответственно в метриках $W_{\sigma}^{p,\,\varkappa_1}$ и $W_{\sigma}^{p,\,\varkappa_2}$.

Но условия (4.36) на допустимые значения параметра ν для справедливости разложений (4.37) соответственно могут быть записаны также в виде

$$\nu\in\left(\frac{1+\omega}{2p},\ 1+\frac{1+\omega}{2p}\right)\ \text{или}\ \nu\in\left(\frac{1}{2}+\frac{1+\omega}{2p},\ \frac{3}{2}+\frac{1+\omega}{2p}\right). \tag{4.36'}$$

Но поскольку, как отмечалось и раньше

$$\Delta_{p,\omega}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1+\omega}{2p},\ 1+\frac{1+\omega}{2p}\right)$$

—суть общая часть интервалов (4.36'), то разложения (4.37) справедливы одновременно, если $\nu\in\Delta_{p,\omega}$.

Теперь отметим, что из представлений (4.5) функций $\varphi(z^2)$ и $z\psi(z^2)$, пользуясь нашими обозначениями (4.11), мы можем вычислить значения коэффициентов разложений (4.37):

$$\varphi(x_k)=\frac{1}{2}[f(\mu_k)+f(\mu_{-k})],\ \psi(x_k)=\frac{1}{2\mu_k}[f(\mu_k)-f(\mu_{-k})](1\leqslant k<+\infty),$$

$$\varphi(x_k)=\frac{1}{2}[f(\nu_k)+f(\nu_{-k})],\ \psi(x_k)=\frac{1}{2\nu_k}[f(\nu_k)-f(\nu_{-k})](-\infty<k\leqslant -1),$$

отметив также, что $\psi(0)=f'(0)$.

Из разложений (4.37), с учетом только что приведенных формул для значений $\varphi(x_k)$ и $\psi(x_k)$, мы приходим к следующим разложениям, также сходящимся равномерно в любом круге $|z|\leqslant R<+\infty$:

$$\varphi(z^2)=\frac{1}{2}[f(z)+f(-z)]=f(0)\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{\sigma z^2 S_\nu'(0)}+$$

$$+\frac{1}{2\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}[f(\mu_k)+f(\mu_{-k})]\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{S_\nu'(\sigma\mu_k^2)(z^2-\mu_k^2)}+$$

$$+\frac{1}{2\sigma}\sum_{k=-\infty}^{-1}[f(\nu_k)+f(\nu_{-k}]\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{S_\nu'(\sigma\nu_k^2)(z^2-\nu_k^2)},$$

$$z\psi(z^2)=\frac{1}{2}[f(z)-f(-z)]=f'(0)\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{\sigma z S_\nu'(0)}+$$

$$+\frac{1}{2\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}[f(\mu_k)-f(\mu_{-k})]\frac{zS_\nu(\sigma z^2)}{\mu_k S_\nu'(\sigma\mu_k^2)(z^2-\mu_k^2)}+$$

$$+\frac{1}{2\sigma}\sum_{k=-\infty}^{-1}[f(\nu_k)-f(\nu_{-k})]\frac{zS_\nu(\sigma z^2)}{\nu_k S_\nu'(\sigma\nu_k^2)(z^2-\nu_k^2)}.$$

Складывая эти разложения, принимая при этом во внимание, что $\mu_k=-\mu_{-k}$ и $\nu_k=-\nu_{-k}$ $(1\leqslant k<+\infty)$, мы приходим к разложению с той же природой сходимости

$$f(z)=f'(0)\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{\sigma z S_\nu'(0)}+f(0)\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{\sigma z^2 S_\nu'(0)}+$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'f(\mu_k)\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{2\sigma\mu_k S_\nu'(\sigma\mu_k^2)(z-\mu_k)}+$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'f(\nu_k)\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{2\sigma\nu_k S_\nu'(\sigma\nu_k^2)(z-\nu_k)}.$$

Наконец, учитывая определения (4.11) и (4.26) последовательности чисел $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ и последовательности функций $\{\Omega_0^*(z),[\Omega_t(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}$, мы приходим к утверждению 1° теоремы.

2°. Ввиду установленного нами разложения (4.34) и в силу определения (4.33) суммы $S_{n,m}(z;f)$ и ее свойств (4.31), функция

$$R_{n,m}(z)=f(z)-S_{n,m}(z;f)\in W_{2,\sigma}^{p,\infty}$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$R^{\cdot}_{n,m}(\lambda_0)=0;\ R_{n,m}(\lambda_k)=0,\ k\in[-n,m];$$
$$R_{n,m}(\lambda_k)=f(\lambda_k),\ k\in[-n,m].$$

Следовательно, для функции $R_{n,m}(z)$ разложение (4.34) принимает такой вид

$$R_{n,m}(z)=\sum_{\substack{k\le -n-1\\ k\ge m+1}} f(\lambda_k)\,\Omega_k(z).$$

Но, в силу правой из оценок (4.16) теоремы вложения 4.1, имеет место неравенство

$$\|R_{n,m};\ e\{+\}\|_{p,\omega}=\|f(z)-S_{n,m}(z;f);\ e\{+\}\|_{p,\omega}\le$$
$$\le D\Big\{\sum_{\substack{k\le -n-1\\ k\ge m+1}}(1+|k|)^{(\omega-1)/2}\,|f(\lambda_k)|^p\Big\}^{1/p}.$$

Поскольку, по той же теореме, стоящий справа ряд в последнем неравенстве сходящийся, то переходом к пределу при $n, m\to+\infty$ мы докажем и утверждение 2°. Итак, теорема доказана полностью.

Из доказанной теоремы, в частности, вытекает следующая теорема единственности.

Теорема 4.3. *Если* $f(z)\in W^{p;\ \omega}_{2,\sigma}$ *и*

$$f'(\lambda_0)=f(\lambda_k)=0,\ -\infty<k<+\infty,$$

то $f(z)\equiv 0$.

(в) Как и прежде, вновь будем полагать, что параметр ν удовлетворяет условию $\nu\in\Delta_{p,\omega}$, обеспечивающему соответствующие свойства нулей функции $\pi_\nu(z)=S_\nu(\sigma z^2)$.

Докажем теперь обращение теоремы 4.2.

Теорема 4.4. *Пусть*

$$|a_k|_{-\infty}^{+\infty}\in l^{p,\frac{\omega-1}{2}}\quad(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1) \tag{4.38}$$

—произвольная последовательность комплексных чисел. Тогда:

1°. *Для любого* $a_0^{\cdot}\in\mathbb{C}$ *ряд*

$$f(z)=a_0^{\cdot}\Omega_0^{\cdot}(z)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\Omega_k(z) \tag{4.39}$$

равномерно сходится в любом круге $|z|\le R<+\infty$ *и определяет целую функцию* $f(z)\in W^{p;\ \omega}_{2,\sigma}$ *с нормой*

$$\|f;\ e\{+\}\|_{p,\omega}\le D\Big\{|a_0^{\cdot}|^p+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|)^{\frac{\omega-1}{2}}|a_k|^p\Big\}^{1/p}, \tag{4.40}$$

удовлетворяющую интерполяционным условиям

$$f'(\lambda_0)=a_0^{\cdot},\ f(\lambda_k)=a_k\ (-\infty<k<+\infty); \tag{4.40'}$$

2°. *Ряд* (4.39) *сходится к своей сумме* $f(z)$ *также и в метрике* $W^{p;\ \omega}_{2,\sigma}$.

Доказательство. 1°. Сначала же отметим, что по (4.22)

$$|x_k|\asymp 1+|k|\quad(1\le|k|<+\infty),$$

и по лемме 1.6

$$|S_\nu'(\sigma x_k)| \asymp (1+|k|)^{1-\nu} \quad (1 \leqslant |k| < \infty).$$

Поэтому для любого $R\,(0 < R < +\infty)$ целое число $N = N(R, \sigma) \geqslant 1$ может быть выбрано таким образом, чтобы выполнялись оценки вида

$$|z - \lambda_k| \geqslant C_1 \sqrt{|k|}, \quad |\lambda_k| > C_2 \sqrt{|k|},$$

при $|z| \leqslant R$ и $|k| > N$, где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — постоянные, не зависящие от k.

Отсюда, принимая во внимание определение (4.26) системы функций (4.27), мы приходим к оценке вида

$$\left| \sum_{\substack{-N<k<-n \\ N<k<m}} a_k \Omega_k(z) \right| = \left| \sum_{\substack{-N<k<-n \\ N<k<m}} a_k \frac{S_\nu(\sigma z^2)}{2\sigma\lambda_k S_k'(\sigma\lambda_k^2)\,(z - i_k)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C(\sigma, R) \sum_{|k|>N} \frac{|a_k|}{(1+|k|)^{2-\nu}}, \quad |z| \leqslant R;\ n,\ m \geqslant N.$$

Но по неравенству Гёльдера

$$\sum_{|k|>N} \frac{|a_k|}{(1+|k|)^{2-\nu}} \leqslant \|\{a_k\}\|_{p,\,\frac{\omega-1}{2}} \left(\sum_{|k|>N} (1+|k|)^{-\alpha} \right)^{1/q},$$

где $q = \dfrac{p}{p-1}$ и $\alpha = \left(2 - \nu + \dfrac{\omega-1}{2p}\right) q > 1$, поскольку по условию $\nu < 1 + \dfrac{1+\omega}{2p}$.

Следовательно, если в предыдущих двух неравенствах устремить $N \to +\infty$, то можем заключить, что утверждение о природе сходимости ряда (4.39), а также интерполяционные свойства (4.40') его суммы $f(z)$ непосредственно следуют из свойств (4.28)—(4.29) функций системы (4.27).

Таким образом, части утверждения 1° теоремы доказаны; нам остается установить, что сумма нашего ряда $f(z) \in W_{2,\,\frac{\omega-1}{2}}^{p,\,\infty}$.

Чтобы убедиться в этом, поступим таким образом.

Определим две последовательности комплексных чисел $\{b_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ и $\{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, полагая

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[a_{2k-1} + a_{-2k+1}], & 1 \leqslant k < +\infty, \\ \dfrac{1}{2}[a_{2k} + a_{-2k}], & -\infty < k \leqslant 0; \end{cases} \tag{4.41}$$

$$c_0 = a_0^*, \quad c_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[a_{2k-1} - a_{-2k+1}]\, x_k^{-\frac{1}{2}}, & 1 \leqslant k < +\infty, \\ \dfrac{1}{2}[a_{-2k} - a_{2k}]\, i\, |x_k|^{-\frac{1}{2}}, & -\infty < k \leqslant -1. \end{cases} \tag{4.42}$$

Тогда из очевидных оценок

$$|b_k|^p \leqslant \begin{cases} |a_{2k-1}|^p + |a_{-2k+1}|^p, & 1 \leqslant k < +\infty, \\ |a_{2k}|^p + |a_{-2k}|^p, & -\infty < k \leqslant 0; \end{cases}$$

$$|c_0|^p = |a_0^*|^p,\ |c_k|^p \leqslant \gamma_1 (1+|k|)^{-\frac{p}{2}} \cdot \begin{cases} |a_{2k-1}|^p + |a_{-2k+1}|^p, & 1 \leqslant k < +\infty, \\ |a_{-2k}|^p + |a_{2k}|^p, & -\infty < k \leqslant -1, \end{cases}$$

где $\gamma_j = \gamma_j(p, \sigma) > 0$ $(j = 1, 2, \cdots)$, здесь и дальше — постоянные, не зависящие от k, мы для норм последовательностей (4.41) и (4.42) получим следующие оценки:

$$\|\{b_k\}\|_{p, x_1} \leqslant \gamma_2 \|\{a_k\}\|_{p, \frac{\omega-1}{2}} < +\infty,$$

$$\|\{c_k\}\|_{p, x_2} \leqslant \gamma_2' \{|a_0^*|^p + \|\{a_k\}\|^p_{p, \frac{\omega-1}{2}}\}^{1/p} < +\infty. \tag{4.43}$$

Но тогда, согласно теореме 3.1, ряды

$$\varphi(w) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \frac{S_\nu(\sigma w)}{S_\nu'(\sigma x_k)(w - x_k)},\ \nu \in \left(\frac{1+\varkappa_1}{p}, 1 + \frac{1+\varkappa_1}{p}\right); \tag{4.44}$$

$$\dot{\psi}(w) = \sigma^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{S_\nu(\sigma w)}{S_\nu'(\sigma x_k)(w - x_k)},\ \nu \in \left(\frac{1+\varkappa_2}{p}, 1 + \frac{1+\varkappa_2}{p}\right),$$

при отмеченных значениях параметра ν равномерно в любом круге $|w| \leqslant R < +\infty$ и в среднем в соответствующих метриках сходятся к целым функциям $\varphi(w) \in W_\sigma^{p, x_1}$ и $\dot{\psi}(w) \in W_\sigma^{p, x_2}$, для норм которых, в силу (4.43), будем иметь оценки

$$\|\varphi\|_{p, x_1} \leqslant \gamma_3 \|\{a_k\}\|_{p, \frac{\omega-1}{2}},$$

$$\|\psi\|_{p, x_2} \leqslant \gamma_4 \{|a_0^*|^p + \|\{a_k\}\|^p_{p, \frac{\omega-1}{2}}\}^{1/p}. \tag{4.45}$$

Оба наши разложения (4.44), как отмечалось уже раньше, справедливы одновременно, если $\nu \in \Delta_{p, \omega} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\omega}{2p}, 1 + \frac{1+\omega}{2p}\right)$.

Если образовать теперь функцию

$$f(z) = \varphi(z^2) + z\dot{\psi}(z^2), \tag{4.46}$$

то она, согласно лемме 4.1, принадлежит классу $W_{2, \sigma}^{p, \omega}$, причем, в силу неравенства (4.4),

$$\|f;\ e\ \{+\}\|_{p, \omega} < \|\varphi\|_{p, x_1} + \|\psi\|_{p, x_2}.$$

Поэтому и ввиду (4.45) справедлива оценка

$$\|f;\ e\ \{+\}\|_{p, \omega} \leqslant D(p, \sigma) \{|a_0^*|^p + \|\{a_k\}\|^p_{p, \frac{\omega-1}{2}}\}^{1/p}, \tag{4.47}$$

откуда, в частности, вытекает, что $f(z) \in W_{2, \sigma}^{p, \omega}$.

Убедимся теперь, что наша функция $f(z)$ имеет разложение (4.39) теоремы, сходящееся к ней не только равномерно в любом круге $|z| \leqslant R < +\infty$, но и в метрике $W_{2, \sigma}^{p, \omega}$.

Доказательство, по существу, проводится аналогично доказательству теоремы 4.2.

Во-первых, из разложений (4.44), ввиду наших обозначений (4.41)—(4.42) и (4.11), будем иметь

$$\varphi(z^2)=a_0\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{\sigma z^2 S_\nu'(0)}+\frac{1}{2\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}[a_{2k-1}+a_{-2k+1}]\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{S_\nu'(\sigma\mu_k^2)(z^2-\mu_k^2)}+$$

$$+\frac{1}{2\sigma}\sum_{k=-\infty}^{-1}[a_{2k}+a_{-2k}]\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{S_\nu'(\sigma\nu_k^2)(z^2-\nu_k^2)},$$

и аналогично

$$z\psi(z^2)=a_0^*\frac{S_\nu(\sigma z^2)}{\sigma z S_\nu'(0)}+\frac{1}{2\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}[a_{2k-1}-a_{-2k+1}]\frac{zS_\nu(\sigma z^2)}{\mu_k S_\nu'(\sigma\mu_k^2)(z^2-\mu_k^2)}+$$

$$+\frac{1}{2\sigma}\sum_{k=-\infty}^{-1}[a_{2k}-a_{-2k}]\frac{zS_\nu(\sigma z^2)}{\nu_k S_\nu'(\sigma\nu_k^2)(z^2-\nu_k^2)}.$$

Сложением этих рядов, с учетом того, что $\mu_k=-\mu_{-k}$ и $\nu_k=-\nu_{-k}$ $(1\leqslant k<+\infty)$, мы, в силу (4.46), придем к разложению (4.39) теоремы, если принять во внимание определения (4.11) и (4.26) последовательности чисел $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ и системы функций $\{\Omega_0^*(z),\ [\Omega_k(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}$.

2°. Ввиду интерполяционных свойств (4.40) суммы $f(z)$ ряда (4.39) его частные суммы просто совпадают с суммами $S_{n,m}(z;f)$ из (4.33).

Поэтому и ввиду условия (4.38) — $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty}\in l_{*}^{p,\frac{\omega-1}{2}}$ теоремы, сходимость ряда (4.39) к своей сумме $f(z)\in W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ и в метрике $W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ устанавливается вполне аналогично утверждению 2° теоремы 4.2.

(г) В заключение параграфа приведем общую интерполяционную теорему, вытекающую из результатов, приведенных выше.

Но предварительно, наряду с пространством $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty}\in l_{*}^{p,\frac{\omega-1}{2}}$ с нормой $\|\{a_k\}\|_{p,\frac{\omega-1}{2}}$, для любого $a_0^*\in\mathbf{C}$ введем также в рассмотрение пространство $l_{*}^{p,\frac{\omega-1}{2}}$ последовательностей $\{a_k\}^*=\{a_0^*,\ [a_k]_{-\infty}^{+\infty}\}$ с нормой

$$\|\{a_k\}^*\|_{p,\frac{\omega-1}{2}}=\left\{|a_0^*|^p+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^p(1+|k|)^{\frac{\omega-1}{2}}\right\}^{1/p}<+\infty. \tag{4.48}$$

Теорема 4.5. 1°. *Для любой последовательности комплексных чисел*

$$\{a_0^*,\ [a_k]_{-\infty}^{+\infty}\}\in l_{*}^{p,\frac{\omega-1}{2}}\quad(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1) \tag{4.49}$$

ряд

$$f(z)=a_0^*\Omega_0^*(z)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\Omega_k(z),\ z\in\mathbf{C}, \tag{4.50}$$

равномерно сходится в любом круге $|z|\leqslant R<+\infty$ *и удовлетворяет интерполяционным условиям*

$$f'(\lambda_0)=a_0^*,\ f(\lambda_k)=a_k\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots); \tag{4.51}$$

2°. *Ряд* (4.50) *сходится к свой сумме* $f(z)\in W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ *также и в*

метрике $W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ *и осуществляет линейное непрерывное отображение всего пространства* $l_*^{p,\frac{\omega-1}{2}}$ $\left(\equiv l^{p,\frac{\omega-1}{2}}\right)$ *на все пространство* $W_{2,\sigma}^{p,\omega}$, *причем*

$$\|f;\ e\{+\}\|_{p,\omega} \asymp \|\{a_k\}^*\|_{p,\frac{\omega-1}{2}}. \tag{4.52}$$

Доказательство. Все утверждения этой теоремы, кроме двойного неравенства (4.52), были установлены нами в теоремах 4.1, 4.2 и 4.4.

В теоремах 4.1 и 4.4 было установлено, что для любого элемента $\{a_k\}^* \in l_*^{p,\frac{\omega-1}{2}}$ и для каждой функции $f(z)$, представимой рядом (4.50), справедлива оценка вида (4.40), которая, если воспользоваться обозначением (4.48), принимает вид

$$\|f,\ e\{+\}\|_{p,\omega} \leqslant D(p,\sigma)\|\{a_k\}^*\|_{p,\frac{\omega-1}{2}}, \tag{4.53}$$

где $D(p,\sigma)>0$ от $\{a_k\}^*$ не зависит.

Таким образом, посредством ряда (4.50) определяется некоторый линейный и ограниченный оператор L, отображающий банахово пространство $l_*^{p,\frac{\omega-1}{2}}$ в банахово пространство $W_{2,\sigma}^{p,\omega}$.

Далее, поскольку любая функция $f(z)\in W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ разлагается в ряд вида (4.50) с коэффициентами $\{a_k\}^*\in l_*^{p,\frac{\omega-1}{2}}$, то по теореме 4.3 оператор L обратимый. Следовательно, по известной теореме С. Банаха об обратном операторе, оператор L^{-1} также ограничен. Иначе говоря, для любой функции $f(z)\in W_{2,\sigma}^{p,\omega}$ и для коэффициентов $\{a_k\}^*$ ее разложения в ряд (4.50) будем иметь

$$\|\{a_k\}^*\|_{p,\frac{\omega-1}{2}} = \|L^{-1}f\|_{p,\frac{\omega-1}{2}} \leqslant d_p\|f;\ e\{+\}\|_{p,\omega}, \tag{4.54}$$

где $d_p>0$ не зависит от f.

Из приведенных двух неравенств (4.53) и (4.54) следует утверждение (4.52), и, тем самым, теорема полностью доказана.

Наконец, отметим, что если определить другую систему функций

$$\{\widetilde{\Omega}_0^*(z),\ [\widetilde{\Omega}_k(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}, \tag{4.55}$$

положив

$$\widetilde{\Omega}_0^*(z)=\Omega_0^*(z),\ \widetilde{\Omega}_k(z)=(1+|k|)^{(1-\omega)/2\rho}\Omega_k(z)\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots), \tag{4.56}$$

то из последней теоремы вытекает

Теорема 4.6. 1°. *Система функций* (4.55) *при любом* $p\in(1,+\infty)$ *является базисом, изоморфным стандартному базису пространства* l^p.

2°. *В частности, при* $p=2$ *система* (4.55) *является базисом Рисса пространства* $W_{2,\sigma}^{2,\omega}$.

§ 5. Построение биортогональных систем вектор-функций и их базисность

5.1. В данном пункте приводятся результаты, на которые существенно опирается все наше дальнейшее изложение.

(а) Нам, во-первых, понадобятся две простые, но известные леммы о функциях типа Миттаг—Леффлера $E_2(z;\ \mu)$, доказательство которых мы приведем и здесь, ради полноты изложения (см. [1], гл. III, § 1 и гл. VI, § 3).

Лемма 5.1. *Для любых значений параметров* α *и* β $(0<\alpha, \beta<+\infty)$ *и для произвольных комплексных чисел* z *и* λ $(z\neq\lambda)$ *справедлива формула*

$$\int_0^\sigma E_2(z\tau^{1/2};\ \alpha)\,\tau^{\alpha-1}E_2(\lambda(\sigma-\tau)^{1/2};\ \beta)\,(\sigma-\tau)^{\beta-1}\,d\tau=$$

$$=\frac{E_2\left(\sigma^{1/2}z;\ \alpha+\beta-\frac{1}{2}\right)-E_2\left(\sigma^{1/2}\lambda;\ \alpha+\beta-\frac{1}{2}\right)}{z-\lambda}\,\sigma^{\alpha+\beta-\frac{3}{2}} \qquad (5.1)$$

$$(0<\sigma<+\infty).$$

Доказательство. Пользуясь разложениями

$$E_2(z\tau^{1/2};\ \alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^{n/2}z^n}{\Gamma(\alpha+n/2)},$$

$$E_2(\lambda(\sigma-\tau)^{1/2};\ \beta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\sigma-\tau)^{m/2}\lambda^m}{\Gamma(\beta+m/2)},$$

будем иметь при $\lambda\neq 0$

$$\int_0^\sigma \tau^{\alpha-1}E_2(z\tau^{1/2};\ \alpha)(\sigma-\tau)^{\beta-1}E_2(\lambda(\sigma-\tau)^{1/2};\ \beta)\,d\tau=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^n\lambda^m}{\Gamma(\alpha+n/2)\,\Gamma(\beta+m/2)}\int_0^\sigma \tau^{\frac{n}{2}+\alpha-1}(\sigma-\tau)^{\frac{m}{2}+\beta-1}\,d\tau=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^n\lambda^m\sigma^{\frac{n+m}{2}+\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+(n+m)/2}=\sigma^{\alpha+\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^n\lambda^{k-n}\sigma^{k/2}}{\Gamma(\alpha+\beta+k/2)}=$$

$$=\sigma^{\alpha+\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k\sigma^{k/2}}{\Gamma(\alpha+\beta+k/2)}\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^n=\frac{\sigma^{\alpha+\beta-1}}{z-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma^{k/2}(z^{k+1}-\lambda^{k+1})}{\Gamma(\alpha+\beta+k/2)}=$$

$$=\frac{zE_2(\sigma^{1/2}z;\ \alpha+\beta)-\lambda E_2(\sigma^{1/2}\lambda;\ \alpha+\beta)}{z-\lambda}\,\sigma^{\alpha+\beta-1}. \qquad (5.1')$$

Но легко видеть, что в установленном тождестве ограничение $\lambda\neq 0$ уже может быть снято. Наконец, пользуясь очевидным тождеством

$$zE_2\left(z;\ \mu+\frac{1}{2}\right)=E_2(z;\ \mu)-\frac{1}{\Gamma(\mu)},$$

из (5.1′) приходим к формуле (5.1) леммы.

Лемма 5.2. *Справедливы тождества*

$$\sum_{k=0}^{3} e^{-i\frac{\pi k}{2}r} E_2\left(e^{i\frac{\pi k}{2}}z;\ \mu\right) = 4z^r\ E_{1/2}\left(z^4;\ \mu + r/2\right) \qquad (5.2)$$

$$(r = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Доказательство. Легко убедиться в справедливости следующих формул:

$$\sum_{k=0}^{3} e^{i\frac{\pi k}{2}(n-r)} = \begin{cases} 4, & n = r + 4m, \\ 0, & n \neq r + 4m, \end{cases} \quad (r = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\ m = 0,\ 1,\ 2, \cdots). \qquad (5.3)$$

Поскольку

$$E_2\left(e^{i\frac{\pi k}{2}}z;\ \mu\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi k}{2}n} z^n}{\Gamma(\mu + n/2)},$$

то из (5.3) следует

$$\sum_{k=0}^{3} e^{-i\frac{\pi k}{2}r} E_2\left(e^{i\frac{\pi k}{2}}z;\ \mu\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/2)} \sum_{k=0}^{3} e^{i\frac{\pi k}{2}(n-r)} =$$

$$= 4z^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{4m}}{\Gamma(\mu + r/2 + 2m)}.$$

Отсюда вытекает формула (5.2) леммы, поскольку, по определению (1.2′) самой функции $E_{1/2}(z;\ \mu)$,

$$E_{1/2}\left(z;\ \mu + \frac{r}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\mu + r/2 + 2m)}.$$

Отметим еще, что из общей формулы (5.2) при $r = 2$, в частности, следует также тождество

$$\sum_{k=0}^{3} (-1)^k\ E_2\left(e^{i\frac{\pi k}{2}}z;\ \mu\right) = 4z^2 E_{1/2}\left(z^4;\ \mu + 1\right), \qquad (5.4)$$

и поскольку по (1.6)

$$E_{1/2}(z;\ 2) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

то при $\mu = 1$ получим также тождество

$$\sum_{k=0}^{3} (-1)^k\ E_2\left(e^{i\frac{\pi k}{2}}z;\ 1\right) = 4\operatorname{sh} z^2. \qquad (5.4')$$

Следующая лемма также играет важную роль в дальнейших наших построениях.

Лемма 5.3 *Для любых* $z,\ \lambda \in \mathbf{C}$ *и при произвольных значениях параметров*

$$\nu \geqslant 0 \text{ и } 0 < \mu < \frac{1}{2} + \nu$$

справедлива формула

$$\sum_{k=0}^{3} e^{-i\frac{\pi}{2}k}\int_0^\sigma E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}z\tau^{1/2};\ \mu\}\,\tau^{\mu-1}E_2\left\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\lambda(\sigma-\tau)^{1/2};\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}+\nu-\mu\right\}(\sigma-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\mu}d\tau=\frac{4e^{i\frac{\pi}{4}}\sigma^{\nu-1}}{z-\lambda}\{\pi_\nu(z)-\pi_\nu(\lambda)\},\qquad(5.5)$$

где, согласно определению (4.9)

$$\pi_\nu(z)\equiv S_\nu(\sigma z^2)=\sigma z^2E_{1/2}(-\sigma^2z^4;\ 1+\nu).\qquad(5.6)$$

Доказательство. Полагая пока, что $z\neq\lambda$, воспользуемся формулой (5.1) леммы 5.1, предварительно заменив в ней параметры $\alpha=\mu$, $\beta=\frac{1}{2}+\nu-\mu$, а вместо переменных z и λ соответственно положив $e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}z$ и $e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\lambda$. Тогда будем иметь для $k=0, 1, 2, 3$

$$\int_0^\sigma E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}z\tau^{1/2};\ \mu\}\,\tau^{\mu-1}E_2\left\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\lambda(\sigma-\tau)^{1/2};\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}+\nu-\mu\right\}(\sigma-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\mu}d\tau=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{z-\lambda}\{e^{-i\frac{\pi}{2}k}E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\sigma^{1/2}z;\ \nu\}-$$

$$-e^{-i\frac{\pi}{2}k}E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\sigma^{1/2}\lambda;\ \nu\}\}\sigma^{\nu-1}.\qquad(5.7)$$

Но, согласно формуле (5.4), справедливы тождества:

$$\sum_{k=0}^{3}e^{-i\pi k}E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\sigma^{1/2}z;\ \nu\}=$$

$$=4i\sigma z^2E_{1/2}(-\sigma^2z^4;\ 1+\nu)=4i\pi_\nu(z),$$

$$\sum_{k=0}^{3}e^{-i\pi k}E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\sigma^{1/2}\lambda;\ \nu\}=$$

$$=4i\sigma\lambda^2E_{1/2}(-\sigma^2\lambda^4;\ 1+\nu)=4i\pi_\nu(z).$$

Поэтому, умножая тождества (5.7) на $e^{-i\frac{\pi}{2}k}$ и суммируя их по индексу $0\leqslant k\leqslant 3$, мы приходим к формуле (5.5) леммы при $z\neq\lambda$. Но легко видеть, что она остается в силе и при $z=\lambda$.

(б) Приведем, во-вторых, формулировки двух основных теорем — специальные случаи ранних, значительно более общих результатов развитой автором теории гармонического анализа в комплексной области (см. [1], гл. IV, теорему 4.1 и гл. VI, теорему 6.11).

Теорема Д. *Пусть* $\frac{1}{2}<\mu<1$ *и* $\varphi(\tau)\in L_2(0,\sigma)$. *Тогда:*

1°. *Интеграл*

$$F(z)=\int_0^{\sigma} E_2(z\tau^{1/2};\ \mu)\,\tau^{\rho-1}\varphi(\tau)\,d\tau \tag{5.8}$$

определяет целую функцию порядка $\leqslant 2$ *и типа* $\leqslant \sigma$.

2°. *Справедливо неравенство*

$$\sup_{\frac{\pi}{4}<|\varphi|<\pi}\left\{\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega}\,dr\right\}\leqslant M_{\mu}\int_0^{\sigma}|\varphi(\tau)|^2\,d\tau, \tag{5.9}$$

где $\omega=4\mu-3$ *и* M_{μ} *— постоянная, зависящая только от* μ.

Далее, пусть, как и в § 4, $W_{2,\sigma}^{2,\omega}$ $(-1<\omega<1,\ 0<\sigma+\infty)$ — класс целых функций $f(z)$ порядка $\rho=2$ и нормального типа $\leqslant\sigma$, подчиненных условию

$$\|f;\ e\,\{+\}\|_{2,\omega}=\left(\int_{e\{+\}}|f(z)|^2|z|^{\omega}|dz|\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{3}\int_0^{+\infty}|f(re^{i\frac{\pi}{2}k})|^2 r^{\omega}\,dr\right)^{1/2}<+\infty. \tag{5.10}$$

Второе из необходимых нам предложений — это частный случай теоремы II введения при $p=2$.

Теорема Е. 1°. *Класс* $W_{2,\sigma}^{2,\omega}(-1<\omega<1)$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *допускающих представление вида*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma}E_2\left(e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}z\tau^{1/2};\ \mu\right)\tau^{\mu-1}\varphi_k(\tau)\,d\tau, \tag{5.11}$$

где $\mu=\dfrac{\omega+3}{4}$, *а функции* $\varphi_k(\tau)\in L_2(0,\ \sigma)(0\leqslant k\leqslant 3)$ *произвольны.*

2°. *Для данной функции* $f(z)\in W_{2,\sigma}^{2,\omega}$ *функции* $\{\varphi_k(\tau)\}_0^3$ *единственны и почти всюду на* $(0,\ \sigma)$ *определяются из соотношений*

$$\varphi_k(\tau)=\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\Phi_{k+1}(-\tau)-e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\Phi_k(\tau)\right\}\ (0\leqslant k\leqslant 3), \tag{5.12}$$

где почти всюду на $(-\infty,\ +\infty)$

$$\Phi_k(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\tau}\int_0^{+\infty}f(e^{-i\frac{\pi}{2}k}v^{1/2})\,\frac{e^{-i\tau v}-1}{-iv}\,v^{\mu-1}\,dv\ (0\leqslant k\leqslant 3), \tag{5.13}$$

при этом следует положить $\Phi_4(\tau)=\Phi_0(\tau)$.

Иначе говоря, посредством формул (5.11) и (5.12) — (5.13) реализуется линейное, взаимно-однозначное соответствие между пространством $W_{2,\sigma}^{2,\omega}$ целых функций $f(z)$ с нормой $\|f;\ e\,\{+\}\|_{2,\omega}$ и прост-

ранством $L_2(0, \sigma)$ четырехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3$, $\varphi_k(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ $(0 \leqslant k \leqslant 3)$ с нормой

$$\|\varphi\| = \left(\sum_{k=0}^{3} \int_0^\sigma |\varphi_k(\tau)|^2 \, d\tau \right)^{1/2}. \tag{5.14}$$

Но, кроме того, это соответствие непрерывное, поскольку справедлива

Лемма 5.4. *В дополнение к утверждениям теоремы* E *имеет место также двойное неравенство*

$$\|f;\ e\{+\}\|_{2,\omega} \asymp \|\varphi\| \tag{5.15}$$

Доказательство. Во-первых, из (5.13) по равенству Парсеваля имеем

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_k(\tau)|^2 d\tau \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_k(\tau)|^2 d\tau =$$

$$= \int_0^{+\infty} |f(e^{-i\frac{\pi}{2}k} v^{1/2})|^2 v^{2(\mu-1)} dv = 2\int_0^{+\infty} |f(e^{-i\frac{\pi}{2}k} r)|^2 r^\omega dr,$$

так как $\mu = \dfrac{\omega+3}{4}$.

Отсюда и из (5.12), во-вторых, вытекает неравенство

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=0}^{3} \int_0^\sigma |\varphi_k(\tau)|^2 d\tau \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{3} \int_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_k(\tau)|^2 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{3} \int_0^{+\infty} |f(e^{-i\frac{\pi}{2}k} r)|^2 r^\omega dr = \frac{1}{\pi} \|f;\ e\{+\}\|_{2,\omega}^2, \tag{5.16}$$

т. е. одна из двусторонних оценок (5.15) леммы.

Чтобы установить вторую из требуемых оценок, введем в рассмотрение целые функции

$$f_k(z) = \int_0^\sigma E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} z\tau^{1/2};\ \mu\}\, \tau^{\mu-1} \varphi_k(\tau)\, d\tau$$

$$(0 \leqslant k \leqslant 3) \tag{5.17}$$

и интервалы

$$\delta_k = \left\{\varphi : \left| \frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right) + \varphi \right| < \frac{\pi}{4} \right\} \ (0 \leqslant k \leqslant 3),$$

заметив, что по теореме Д

$$\sup_{\varphi \in \delta_k} \left\{ \int_0^{+\infty} |f_k(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\} \leqslant M_\mu \int_0^\sigma |\varphi_k(\tau)|^2 d\tau \ (0 \leqslant k \leqslant 3).$$

Легко видеть, что последние оценки имеют место одновременно для всех $0 \leqslant k \leqslant 3$ лишь при $\varphi = \frac{\pi}{2} j$ $(0 \leqslant j \leqslant 3)$.

Итак, справедливы неравенства

$$\int_0^{+\infty} |f_k(re^{i\frac{\pi}{2}j})|^2 r^{\nu} dr \leqslant M_\mu \int_0^{\sigma} |\varphi_k(\tau)|^2 d\tau \quad (0 \leqslant k, j \leqslant 3),$$

и поскольку по (5.11) и (5.17)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{3} f_k(z),$$

то мы будем иметь

$$\int_0^{+\infty} |f(re^{i\frac{\pi}{2}j})|^2 r^{\nu} dr \leqslant 4 \sum_{k=0}^{3} \int_0^{+\infty} |f_k(re^{i\frac{\pi}{2}j})|^2 r^{\nu} dr \leqslant$$

$$\leqslant 4M_\mu \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\sigma} |\varphi_k(\tau)|^2 d\tau \quad (0 \leqslant j \leqslant 3).$$

Сложением этих неравенств по индексу $j=0, 1, 2, 3$ получим обратную к (5.16) оценку

$$\|f;\ e\,[+]\|^2_{2,\nu} \leqslant 16\, M_\mu \|\varphi\|^2. \tag{5.18}$$

Из (5.16) и (5.18) следует утверждение (5.15) леммы.

5.2. (а) В начале § 4 нами была определена последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — множество всех нулей целой функции $\pi_\nu(z) = S_\nu(\sigma z^2)$ $(0 \leqslant \nu < 2)$. Все эти нули простые, кроме двукратного нуля $\lambda_0 = 0$ и записываются в виде

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_{2k-1} = \sqrt{x_k},\ \lambda_{-2k+1} = -\sqrt{x_k}, \quad (1 \leqslant k < +\infty)$$
$$\lambda_{2k} = i\sqrt{x_k},\ \lambda_{-2k} = -i\sqrt{x_k}, \tag{5.19}$$

где $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — суть простые и вещественные нули функции $S_\nu(\sigma z)$.

Для значения параметра $\nu = 1$

$$\pi_1(z) = S_1(\sigma z^2) = \sin \sigma z^2 \tag{5.20}$$

и очевидно, что

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_{2k-1} = \sqrt{\pi\sigma^{-1} k},\ \lambda_{-2k+1} = -\sqrt{\pi\sigma^{-1} k}, \quad (1 \leqslant k < +\infty)$$
$$\lambda_{2k} = i\sqrt{\pi\sigma^{-1} k},\ \lambda_{-2k} = -i\sqrt{\pi\sigma^{-1} k}. \tag{5.19'}$$

Там же в § 4 была определена система целых функций

$$\{\Omega_0^*(z), [\Omega_k(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}, \tag{5.21}$$

где

$$\Omega_0^*(z) = \Gamma(1+\nu)\frac{\pi_\nu(z)}{\sigma z},\ \Omega_0(z) = \Gamma(1+\nu)\frac{\pi_\nu(z)}{\sigma z^2},$$

$$\Omega_k(z)=\frac{\pi_\nu(z)}{\pi_\nu'(\lambda_k)(z-\lambda_k)}\quad(k=\pm1,\ \pm2,\cdots). \tag{5.22}$$

Отметим также, что, в силу (5.20), при $\nu=1$

$$\Omega_0^*(z)=\frac{\sin\sigma z^2}{\sigma z},\quad \Omega_0(z)=\frac{\sin\sigma z^2}{\sigma z^2},$$

$$\Omega_k(z)=(\cos\sigma)^{-1}\lambda_k^2\frac{\sin\sigma z^2}{2\sigma\lambda_k(z-\lambda_k)}\quad(k=\pm1,\ \pm2,\cdots), \tag{5.22'}$$

где последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ определяется уже из (5.19').

(б) Согласно лемме 4.2 (2°), при $p=2$ и $-1<\omega<1$, если параметр $\nu\in\left(\frac{3+\omega}{4},\ 2\right)$, то каждая из функций системы (5.21) принадлежит классу $W_{2,\nu}^2$. Поэтому, на основании теоремы E (1°) можно утверждать, что при условии

$$-1<\omega<1,\quad \mu=\frac{3+\omega}{4},\quad \nu\in(\mu,\ 2)$$

функции нашей системы допускают интегральные представления вида

$$\Omega_0^*(z)=\sum_{k=0}^{3}\int_0^\sigma E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}z\tau^{1/2};\ \mu\}\,\tau^{\mu-1}\varphi_{0,k}^*(\tau)\,d\tau,$$

$$\Omega_n(z)=\sum_{k=0}^{3}\int_0^\sigma E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}z\tau^{1/2};\ \mu\}\,\tau^{\mu-1}\varphi_{n,k}(\tau)\,d\tau \tag{5.23}$$

$$(-\infty<n<+\infty),$$

где вектор-функции $\varphi_0^*(\tau)=\{\varphi_{0,k}^*(\tau)\}_0^3$ и $\varphi_n(\tau)=\{\varphi_{n,k}(\tau)\}_0^3$ единственны и из класса $L_2(0,\sigma)$.

Пользуясь теоремой E (2°) можно обратить формулы (5.23) и записать значения искомых вектор-функций в виде довольно сложных несобственных интегралов, вычисление которых не удается.

Однако оказалось возможным найти их явный вид совершенно иным путем — на основании леммы 5.3, притом при меньших ограничениях на параметры μ и ν. Докажем лемму.

Лемма 5.5. *Для значений параметров*

$$0\leqslant\nu<2,\quad 0<\mu<\frac{1}{2}+\nu$$

функции системы (5.21) *допускают представления вида* (5.23), *где для* $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

$$\varphi_{0,k}^*(\tau)=e^{-i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^\nu\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-\mu\right)}(\sigma-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\mu}, \tag{5.24}$$

$$\varphi_{0,k}(\tau)=\frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^{\nu}\,\Gamma(1+\nu-\mu)}(\sigma-\tau)^{\nu-\mu}, \tag{5.25}$$

$$\varphi_{n,k}(\tau)=\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{4\sigma^{\nu-1}\,\pi_{\nu}(l_n)}E_2\left\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\lambda_n(\sigma-\tau)^{1/2};\ \frac{1}{2}+\nu-\mu\right\}(\sigma-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\mu}, \tag{5.26}$$

$$n=\pm1,\ \pm2,\cdots.$$

Доказательство. Заметим, что в разложении функции $E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\lambda(\sigma-\tau)^{1/2};\ \frac{1}{2}+\nu-\mu\}$ по степеням переменной λ свободный член и коэффициенты при λ соответственно равны

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-\mu\right)}\quad\text{и}\quad e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{(\sigma-\tau)^{1/2}}{\Gamma(1+\nu-\mu)}.$$

Поэтому формулу (5.24) мы получим из тождества (5.5) леммы 5.3, положив в ней $\lambda=0$ и пользуясь определением (5.22) функции $\Omega_0^*(z)$. Если же продифференцировать тождество (5.5) по λ, а затем вновь положить $\lambda=0$, то получим формулу (5.25), пользуясь определением (5.22) функции $\Omega_0(z)$.

Наконец, формулы (5.26) также непосредственно следуют из того же тождества (5.5), если в нем положить $\lambda=\lambda_n$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ и вновь учесть определение (5.22) функций $\Omega_n(z)$. Лемма доказана, причем, согласно теореме E (2°), если $\mu=\frac{3+\omega}{4}$ и $\nu\in(\mu,2)$, то в представлениях (5.23) подынтегральные вектор-функции $\varphi_0^*(\tau)$ и $\varphi_n(\tau)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ почти везде на $(0,\sigma)$ единственны.

(в) На интервале $(0,\sigma)$ определим две системы четырехкомпонентных вектор-функций:

Систему

$$\{e_{0,k}^*(\tau),\ [e_{n,k}(\tau)]_{-\infty}^{+\infty}\}\ (k=0,1,2,3), \tag{5.27}$$

где

$$e_{0,k}^*(\tau)=e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{\tau^{\mu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}, \tag{5.28}$$

$$e_{n,k}(\tau)=E_3\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\lambda_n\tau^{1/2};\ \mu\}\,\tau^{\mu-1}\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

и систему

$$\{\omega_{0,k}^*(\tau),\ [\omega_{n,k}(\tau)]_{-\infty}^{+\infty}\}\ (k=0,1,2,3), \tag{5.29}$$

где

$$\omega^*_{0,k}(\tau)=e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^{\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-\mu\right)}(\sigma-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\mu},$$

$$\omega_{0,k}(\tau)=\frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^{\nu}\Gamma(1+\nu-\mu)}(\sigma-\tau)^{\nu-\mu}, \tag{5.30}$$

$$\omega_{n,k}(\tau)\equiv\overline{\varphi_{n,k}(\tau)}=$$

$$=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{4\sigma^{\nu-1}\overline{\pi'_{\nu}(\lambda_n)}}E_2\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\overline{\lambda_n}(\sigma-\tau)^{1/2};\ \frac{1}{2}+\nu-\mu\right\}(\sigma-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\mu},$$

$$n=\pm1,\ \pm2,\cdots. \tag{5.31}$$

Легко видеть, что как сами функции наших систем (5.27) и (5.29), так и произведения любых двух функций, взятых в отдельности по каждой из них, будут из $L_1(0,\sigma)$ при том же условии $0<\mu<\frac{1}{2}+\nu$, поставленном нами в лемме 5.5.

Кроме того, легко видеть также, что если вместо прежнего параметр μ удовлетворяет условию $\frac{1}{2}<\mu<\nu$ $(0<\nu<2)$, то функции наших систем будут уже из класса $L_2(0,\sigma)$, а произведения соответствующих пар функций из них вновь будут из $L_1(0,\sigma)$.

(г) Пусть

$$y(\tau)=\{y_k(\tau)\}_0^3 \text{ и } z(\tau)=\{z_k(\tau)\}_0^3 \tag{5.32}$$

— две произвольные четырехкомпонентные вектор-функции из $\mathbf{L}_2(0,\sigma)$. Определим их скалярное произведение таким образом:

$$[y(\tau),\ z(\tau)]\equiv[y,\ z]=\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma}y_k(\tau)\overline{z_k(\tau)}\,d\tau. \tag{5.33}$$

Заметим, что для любой вектор-функции $y(\tau)\in\mathbf{L}_2(0,\sigma)$

$$\|y\|=[y,\ y]^{1/2}=\left(\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma}|y_k(\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2}\geqslant0,$$

при этом $\|y\|=0$, лишь если на $(0,\sigma)$ почти везде $y(\tau)=0$, т. е. если $y_k(\tau)=0$ $(0\leqslant k\leqslant3)$ почти везде на $(0,\sigma)$.

Докажем теперь теорему.

Теорема 5.1. *Системы вектор-функций* (5.27) *и* (5.29) *биортогональны в метрике* (5.33). *Иными словами, положив*

$$e^*_0(\tau)=\{e^*_{0,k}(\tau)\}_0^3,\ e_n(\tau)=\{e_{n,k}(\tau)\}_0^3\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots), \tag{5.34}$$

$$\omega_0^*(\tau) = \{\omega_{0,k}^*(\tau)\}_0^3,\ \omega_n(\tau) = \{\omega_{n,k}(\tau)\}_0^3\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

будем иметь

$$[e_0^*, \omega_0^*] = 1, \tag{5.35}$$

$$[e_0^*, \omega_m] = 0,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{5.36}$$

$$[e_n, \omega_0^*] = 0,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{5.37}$$

$$[e_n, \omega_m] = \delta_{nm},\ n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{5.38}$$

где δ_{nm} — *символ Кронеккера.*

Доказательство. Пользуясь представлением (5.23) функции $\Omega_0^*(z)$ и формулами (5.28)—(5.30), будем иметь

$$\Omega_0^*(z) \equiv \Gamma(1+\nu)\frac{\pi_\nu(z)}{\sigma z} = \Gamma(1+\nu)\, z E_{1/2}(-\sigma^2 z^4;\ 1+\nu) =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \int_0^\sigma E_2\left(e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} z\tau^{1/2};\ \mu\right) \tau^{\mu-1}\, \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)}\, d\tau. \tag{5.39}$$

Поскольку $\Omega_0^*(0) = 0$ и $\dfrac{d}{dz}\Omega_0^*(z)|_{z=0} = 1$, то, пользуясь значениями $e_{0,k}(\tau)$ и $e_{0,k}^*(\tau)$ из (5.28), отсюда соответственно получим

$$[e_0, \omega_0^*] = \sum_{k=0}^{3} \int_0^\sigma e_{0,k}(\tau)\, \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)}\, d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \int_0^\sigma E_2(0;\ \mu)\, \tau^{\mu-1}\, \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)}\, d\tau = \Omega_0^*(0) = 0,$$

$$[e_0^*, \omega_0^*] = \sum_{k=0}^{3} \int_0^\sigma e_{0,k}^*(\tau)\, \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)}\, d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \int_0^\sigma \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\, \tau^{\mu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\, \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)}\, d\tau = \frac{d}{dz}\Omega_0^*(z)|_{z=0} = 1.$$

Итак, как формула (5.35), так и (5.37), но пока лишь для значения $n = 0$, установлены. Но мы имеем также $\Omega_0^*(\lambda_n) = 0$ $(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$, и поэтому, вновь пользуясь формулой (5.39), положив в ней $z = \lambda_n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ и принимая во внимание значения функций $e_{n,k}(\tau)$ из (5.28), получим

$$[e_n, \omega_0^*] = \sum_{k=0}^{3} \int_0^\sigma e_{n,k}(\tau)\, \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)}\, d\tau = \Omega_0^*(\lambda_n) = 0\ (n = \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Тем самым, утверждения (5.37) полностью доказаны.

Далее, из определений (5.28) и (5.30) функций $e^*_{0,k}(\tau)$ и $\omega_{0,k}(\tau)$ имеем:

$$[e^*_0, \omega_0] =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^{\nu}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+\nu-\mu)} \int_0^{\sigma} \tau^{\mu-\frac{1}{2}} (\sigma-\tau)^{\nu-\mu}\, d\tau =$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sigma}}{4} \sum_{k=0}^{3} e^{i\frac{\pi}{2}k} = 0,$$

т. е. формула (5.36) для значения $m=0$ справедлива.

Чтобы установить формулы (5.36) для остальных значений $m = \pm 1, \pm 2, \cdots$, пользуясь значением функции $\omega_{m,k}(\tau)$ из (5.31), запишем формулу (5.23) для функции $\Omega_m(z)$ в виде

$$\Omega_m(z) = \frac{\pi_\nu(z)}{\pi_\nu'(\lambda_m)(z-\lambda_m)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\sigma} E_2\left(e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} z\tau^{1/2};\ |\mu|\right) \tau^{\mu-1} \overline{\omega_{m,k}(\tau)}\, d\tau, \qquad (5.40)$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Отсюда, пользуясь обозначением (5.28), получим для $m = \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$[e^*_0, \omega_m] = \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\sigma} e^*_{0,k}(\tau)\, \overline{\omega_{m,k}(\tau)}\, d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\sigma} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \tau^{\mu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \overline{\omega_{m,k}(\tau)}\, d\tau = \frac{d}{dz}\, \Omega_m(z)|_{z=0} = 0,$$

поскольку для функции $\Omega_m(z)$, как и для $\pi_\nu(z)$, точка $z=0$ является нулем второго порядка. Итак, все формулы (5.36) также справедливы.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы нам осталось установить формулы (5.38).

Из определения (5.22) следует, что для $n, m = \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$\Omega_m(0) = 0,\ \Omega_m(\lambda_n) = \delta_{nm}.$$

Поэтому, в силу наших обозначений (5.28), из (5.40) получим, во-первых

$$[e_0, \omega_m] = \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\sigma} e_{0,k}(\tau)\, \overline{\omega_{m,k}(\tau)}\, d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\sigma} \frac{\tau^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \varphi_{m,k}(\tau)\, d\tau = \Omega_m(0) = 0,\ m = \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

и, во-вторых

$$[e_n, \omega_m] = \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\infty} e_{n,k}(\tau)\,\overline{\omega_{m,k}(\tau)}\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\infty} E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\lambda_n \tau^{1/2};\ \mu\}\,\tau^{\mu-1}\,\overline{\omega_{m,k}(\tau)}\,d\tau =$$

$$= \Omega_m(\lambda_n) = \delta_{nm};\ n, m = \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Представление (5.40) функции $\Omega_m(z)$, как суммы интегралов, очевидно остается в силе и при $m=0$, т. е. мы имеем

$$\Omega_0(z) = \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\infty} E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} z\tau^{1/2};\ \mu\}\,\tau^{\mu-1}\,\overline{\omega_{0,k}(\tau)}\,d\tau.$$

Заметив, что по (5.22) $\Omega_0(0)=1$, $\Omega_0(\lambda_n)=0$ $(n=\pm 1, \pm 2, \cdots)$, получим, во-первых

$$[e_0, \omega_0] = \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\infty} e_{0,k}(\tau)\,\overline{\omega_{0,k}(\tau)}\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\,\overline{\omega_{0,k}(\tau)}\,d\tau = \Omega_0(0) = 1,$$

и, во-вторых

$$[e_n, \omega_0] = \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\infty} e_{n,k}(\tau)\,\overline{\omega_{0,k}(\tau)}\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\infty} E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\lambda_n \tau^{1/2};\ \mu\}\,\tau^{\mu-1}\,\overline{\omega_{0,k}(\tau)}\,d\tau =$$

$$= \Omega_0(\lambda_n) = 0,\ n = \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Легко видеть, что совокупность последних четырех соотношений эквивалентна требуемой формуле (5.38), и теорема полностью доказана.

5.3. Переходим к доказательству теорем разложений по системам вектор-функций

$$\{e_0^*(\tau),\ [e_n^*(\tau)]_{-\infty}^{\pm\infty}\} \text{ и } \{\omega_0^*(\tau),\ [\omega_n(\tau)]_{-\infty}^{\pm\infty}\}, \tag{5.41}$$

которые были определены нами формулами (5.34), (5.28) и (5.30)—(5.31).

С этой целью, во-первых, напомним, что теоремы 4.1—4.5 для значения $p=2$ были установлены нами в предположении, что параметр ν, участвующий в определении (5.6) функции $\pi_\nu(z)$, а, следовательно, и в определении системы целых функций $\{\Omega_0^*(z), [\Omega_k(z)]_{-\infty}^{\pm\infty}\}$ и систем вектор-функций (5.41), удовлетворяет условию

$$\nu \in \left(\frac{3+\omega}{4}, \frac{5+\omega}{4}\right) \subset \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad -1 < \omega < 1. \tag{5.42}$$

Во-вторых, напомним также, что при условии (5.42) нули $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ целой функции $\pi_\nu(z) = S_\nu(\sigma z^2)$ обладают всеми свойствами, отмеченными в 4.1 (б), поскольку тогда, в частности, будем иметь $\nu \in [0,2)$.

Наконец, учитывая замечание, приведенное в конце пункта 5.2 (в), можем утверждать, что при условии

$$\frac{1}{2} < \mu = \frac{3+\omega}{4} < \nu < \frac{5+\omega}{4} < \frac{3}{2}, \quad -1 < \omega < 1 \tag{5.43}$$

система вектор-функций (5.24)—(5.26) полностью определена и принадлежит классу $L_2(0, \sigma)$.

(а) Как в следующей лемме, так и в приводимой за ней теореме, условие (5.43) считается соблюденным.

Лемма 5.6. *Система вектор-функций*

$$\{e_0^*(\tau), [e_n(\tau)]_{-\infty}^{+\infty}\} \tag{5.44}$$

полна в классе вектор-функций

$$\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3 \in L_2(0, \sigma).$$

Доказательство. Для любой вектор-функции $\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3 \in L_2(0, \sigma)$ введем в рассмотрение целую функцию

$$f_\varphi(z) = \sum_{k=0}^{3} \int_0^\sigma E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} z\tau^{1/2}; \mu\} \tau^{\mu-1} \overline{\varphi_k(\tau)}\, d\tau,$$

которая, согласно теореме E (1°), принадлежит классу $W_{2,\sigma}^{\mu}$ при $\mu = \frac{3+\omega}{4}$ $(-1 < \omega < 1)$.

Ввиду определения (5.28) системы вектор-функций (5.44) и скалярного произведения (5.33), мы получим

$$f_\varphi(\lambda_n) = \sum_{k=0}^{3} \int_0^\sigma E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} \lambda_n \tau^{1/2}; \mu\} \tau^{\mu-1} \overline{\varphi_k(\tau)}\, d\tau =$$

$$= [e_n, \varphi] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \tag{5.45}$$

$$f_\varphi^{(\nu)}(\lambda_0) = f_\varphi^{(\nu)}(0) = \sum_{k=0}^{3} \int_0^\sigma \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \tau^{\mu-\frac{1}{2}} \overline{\varphi_k(\tau)}\, d\tau = [e_0^*, \varphi]. \tag{5.45'}$$

Поэтому, если для некоторой вектор-функции $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$

$$[e_0^*, \varphi] = [e_n, \varphi] = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

то из (5.45)—(5.45′) будет следовать, что для ассоциированной с нею функции $f_\varphi(z) \in W_{2,\sigma}^{\mu}$ имеем

$$f'_{\varphi}(\lambda_0) = f_{\varphi}(\lambda_n) = 0 \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Отсюда, согласно теореме единственности 4.3, вытекает, что $f_{\varphi}(z) \equiv 0$, и поэтому, по теореме E (2°) имеем также $\varphi_k(\tau) = 0$ $(0 \leqslant k \leqslant 3)$, т. е. вектор-функция $\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3 = 0$ почти всюду на $(0, \sigma)$, и лемма доказана.

(6) Как и в пункте 4.2 (г), обозначим через $l_*^{2, \frac{\omega-1}{2}}$ $(-1 < \omega < 1)$ пространство последовательностей комплексных чисел $\{a_0^*, [a_k]_{-\infty}^{+\infty}\}$, для которых конечна норма

$$\|\{a_k\}^*\|_{2, \frac{\omega-1}{2}} = \left\{|a_0^*|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{\frac{\omega-1}{2}} |a_k|^2\right\}^{1/2} < +\infty. \tag{5.46}$$

Теорема 5.2. 1°. *Для любого элемента* $\{a_0^*, [a_k]_{-\infty}^{+\infty}\} \in l_*^{2, \frac{\omega-1}{2}}$ $(-1 < \omega < 1)$ *вектор-ряд*

$$\varphi(\tau) = a_0^* \omega_0^*(\tau) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \omega_j(\tau) \tag{5.47}$$

осуществляет взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l_*^{2, \frac{\omega-1}{2}}$ *на все пространство вектор-функций* $\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3 \in \mathbf{L}_2(0, \sigma)$.

При этом коэффициенты ряда (5.47) *определяются по формулам*

$$a_0^* = [\varphi, e_0^*], \ a_j = [\varphi, e_j] \ (j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{5.48}$$

2°. *Для норм вектор-функции* $\varphi(\tau)$ *и последовательности чисел* $\{a_0^*, [a_k]_{-\infty}^{+\infty}\}$ *справедлива двойная оценка*

$$\|\varphi\| = [\varphi, \varphi]^{1/2} \asymp \|\{a_k\}^*\|_{2, \frac{\omega-1}{2}}. \tag{5.49}$$

Доказательство. Согласно теореме 4.5 ряд

$$f(z) = \overline{a_0^*}\, \Omega_0^*(z) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{a_j}\, \Omega_j(z), \ z \in \mathbf{C}$$

осуществляет линейное взаимно-однозначное отображение всего пространства $\{a_0^*, [a_k]_{-\infty}^{+\infty}\} \in l_*^{2, \frac{\omega-1}{2}}$ на все пространство целых функций $f(z) \in W_{2, \omega}^2$. При этом справедливо двойное неравенство

$$\|f;\ e\,(+)\,\|_{2, \omega} \asymp \|\{a_k\}^*\|_{2, \frac{\omega-1}{2}}, \tag{5.50}$$

и в силу интерполяционных свойств (4.29) функций системы $\{\Omega_0^*(z), [\Omega_k(z)]_{-\infty}^{+\infty}\}$, будем иметь:

$$f'(\lambda_0) = \overline{a_0^*}, \ f(\lambda_k) = \overline{a_k} \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{5.51}$$

С другой стороны, согласно теореме E, посредством формулы представления функций всего класса $W_{2,\sigma}^{2,\omega}$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma} E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)} z\tau^{1/2};\ \mu\}\,\tau^{\mu-1}\,\overline{\varphi_k(\tau)}\,d\tau \tag{5.52}$$

осуществляется линейное взаимно-однозначное отображение всего пространства целых функций $f(z)\in W_{2,\sigma}^{2,\omega}$ на все пространство четырехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau)=\{\varphi_k(\tau)\}_0^3\in L_2(0,\sigma)$. При этом, согласно лемме 5.4, имеет место двойное неравенство

$$\|f;\ e\ |+|\|_{2,\omega}\asymp\|\varphi\|. \tag{5.53}$$

Из двойных неравенств (5.50) и (5.53) легко следует непрерывность обоих наших отображений, а также справедливость двойного неравенства (5.49) теоремы.

Поскольку, таким образом, пространство последовательностей $l_\sigma^{2,\frac{\omega-1}{2}}$ гомеоморфно пространству вектор-функций $L_2(0,\sigma)$, то для завершения доказательства теоремы нам остается лишь установить справедливость интерполяционных формул (5.48). Для этого заметим, что из (5.52) мы по (5.28), во-первых, имеем

$$f'(\lambda_0)=f'(0)=\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma}\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\tau^{\mu-\frac{1}{2}}\,\overline{\varphi_k(\tau)}\,d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma} e_{0,k}^{*}(\tau)\,\overline{\varphi_k(\tau)}\,d\tau=[e_0^{*},\varphi]=\overline{[\varphi,e_0^{*}]},$$

и, во-вторых

$$f(\lambda_n)=\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma} E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\lambda_n\tau^{1/2};\ \mu\}\,\tau^{\mu-1}\,\overline{\varphi_k(\tau)}\,d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma} e_{n,k}(\tau)\,\overline{\varphi_k(\tau)}\,d\tau=[e_n,\varphi]=\overline{[\varphi,e_n]},\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

Отсюда, в силу (5.51), следуют требуемые формулы (5.48), и теорема полностью доказана.

В заключение отметим еще неравенство

$$|a_0^{*}|\leqslant\sqrt{2}\left\{\sigma^{\mu}\sqrt{\pi\mu}\ \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\right\}^{-1}\|\varphi\|, \tag{5.54}$$

которое легко следует из (5.48).

(б) Перейдем теперь к доказательству теоремы разложения для второй из биортогональных вектор-систем (5.41), т. е. для системы $\{e_0^{*}(\tau),\ [e_n(\tau)]_{-\infty}^{+\infty}\}$.

Сначала же отметим, что если взамен параметра $\mu=\frac{3+\omega}{4}$ $(-1<\omega<1)$ ввести новый —

$$\bar{\mu}=\frac{1}{2}+\nu-\mu, \tag{5.55}$$

то из основного условия (5.43) легко вытекает справедливость аналогичного условия и для $\bar{\mu}$, т. е. мы будем иметь

$$\frac{1}{2}<\bar{\mu}=\frac{3+\tilde{\omega}}{4}<\nu<\frac{5+\bar{\omega}}{4}, \quad -1<\tilde{\omega}<1, \tag{5.43'}$$

где $\tilde{\omega}=4(\nu-1)-\omega$.

С параметром $\bar{\mu}$ будем ассоциировать последовательность вектор-функций $\{\bar{e}^{*}_{0,k}(\tau),\ [\tilde{e}_{n,k}(\tau)]_{-\infty}^{+\infty}\}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$, по аналогии с формулами (5.28):

$$\bar{e}^{*}_{0,k}(\tau)=e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{\tau^{\bar{\mu}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\bar{\mu}+\frac{1}{2}\right)},$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{5.28'}$$

$$\tilde{e}_{n,k}(\tau)=E_2\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\lambda_n\tau^{\frac{1}{2}};\ \bar{\mu}\}\tau^{\bar{\mu}-1} \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots).$$

Сравнивая формулы (5.28′) и (5.30)—(5.31), ввиду обозначения (5.55) мы приходим к следующим соотношениям для $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

$$\tilde{e}^{*}_{0,k}(\tau)=e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{4\sigma^{\nu}}{\Gamma(1+\nu)}\overline{\omega_{0,k}(\sigma-\tau)},$$

$$\tilde{e}_{0,k}(\tau)=e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{4\sigma^{\nu}}{\Gamma(1+\nu)}\overline{\omega^{*}_{0,k}(\sigma-\tau)},$$

$$\tilde{e}_{n,k}(\tau)=e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}4\sigma^{\nu-1}\pi_{n}(\lambda_n)\overline{\omega_{n,k}(\sigma-\tau)} \tag{5.56}$$

$$(n=\pm1,\ \pm2,\cdots).$$

Наряду с этим по аналогии с формулами (5.30) — (5.31) введем вторую систему вектор-функций $[\bar{\omega}^{*}_{0,k}(\tau),\ [\tilde{\omega}_{n,k}(\tau)]_{-\infty}^{+\infty}]$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$, положив

$$\bar{\omega}^{*}_{0,k}(\tau)=e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^{\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-\tilde{\mu}\right)}(\sigma-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\tilde{\mu}},$$

$$\overline{\omega}_{0,k}(\tau)=\frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^{\nu}\Gamma(1+\nu-\overline{\mu})}(\sigma-\tau)^{\nu-\overline{\mu}}, \tag{5.30'}$$

$$\overline{\omega}_{n,k}(\tau)=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{4\sigma^{\nu-1}\overline{\pi}'_{\nu}(\lambda_n)}E_2\left[e^{-i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\overline{\lambda}_n(\sigma-\tau)^{\frac{1}{2}};\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}+\nu-\widetilde{\mu}\right](\sigma-\tau)^{\nu-\frac{1}{2}-\widetilde{\mu}} \tag{5.31'}$$

$$(n=\pm 1,\ \pm 2,\cdots).$$

Сравнивая формулы (5.30′) — (5.31′) и (5.28), ввиду обозначения (5.55), приходим к соотношениям для $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

$$\overline{\omega}^{*}_{0,k}(\tau)\,e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^{\nu}}\overline{e_{0,k}(\sigma-\tau)},$$

$$\widetilde{\omega}_{0,k}(\tau)=e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^{\nu}}\overline{e^{*}_{0,k}(\sigma-\tau)}, \tag{5.57}$$

$$\overline{\omega}_{n,k}(\tau)=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{4\sigma^{\nu-1}\overline{\pi}'_{\nu}(\lambda_n)}\overline{e_{n,k}(\sigma-\tau)}\quad(n=\pm 1,\ \pm 2,\cdots).$$

На основании теоремы 5.1 докажем, что справедлива также

Теорема 5.1′. *Системы вектор-функций* (5.56) *и* (5.57) *биортогональны в принятой нами метрике* (5.33).

Иными словами, положив

$$\overline{e}^{*}_{0}(\tau)=\{\overline{e}^{*}_{0,k}(\tau)\}_0^3,\ \overline{e}_n(\tau)=\{\widetilde{e}_{n,k}(\tau)\}_0^3\ (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots),$$
$$\overline{\omega}^{*}_{0}(\tau)=\{\overline{\omega}^{*}_{0,k}(\tau)\}_0^3,\ \widetilde{\omega}_n(\tau)=\{\widetilde{\omega}_{n,k}(\tau)\}_0^3\ (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots), \tag{5.58}$$

будем иметь:

$$[\overline{e}^{*}_{0},\ \widetilde{\omega}^{*}_{0}]=1,\ [\overline{e}^{*}_{j},\ \overline{\omega}_m]=0\quad(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots),$$
$$[\widetilde{e}_n,\ \widetilde{\omega}^{*}_{0}]=0\ (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots),\ [\overline{e}_n,\ \widetilde{\omega}_m]=\delta_{nm}\ (n,m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots). \tag{5.59}$$

Доказательство. Будем опираться на формулы (5.56), (5.57) и одновременно воспользуемся утверждениями (5.35) — (5.38) теоремы 5.1. Тогда будем иметь

$$[\overline{e}^{*}_{0},\ \widetilde{\omega}^{*}_{0}]=\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma}\overline{\omega_{0,k}(\sigma-\tau)}\,e_{0,k}(\sigma-\tau)\,d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma}e_{0,k}(\tau)\,\overline{\omega_{0,k}(\tau)}\,d\tau=[e_0,\ \omega_0]=1,$$

$$[\bar{e}_0, \tilde{\omega}_0^*] = \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\sigma} e_{0,k}(\tau)\,\overline{\omega_{0,k}^*(\tau)}\,d\tau = [e_0, \omega_0^*] = 0,$$

$$[\bar{e}_n, \bar{\omega}_0^*] = \sigma^{-1}\pi_\nu'(\lambda_n')\,\Gamma(1+\nu)\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma} e_{0,k}(\tau)\,\overline{\omega_{n,k}(\tau)}\,d\tau =$$

$$= \sigma^{-1}\pi_\nu'(\lambda_n)\,\Gamma(1+\nu)\,[e_0, \omega_n] = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Аналогично будем иметь:

$$[\bar{e}_0^*, \tilde{\omega}_0] = \sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma} e_{0,k}^*(\tau)\,\overline{\omega_{0,k}(\tau)}\,d\tau = [e_0^*, \omega_0] = 0,$$

$$[\tilde{e}_0^*, \tilde{\omega}_m] = \frac{\sigma}{\Gamma(1+\nu)\,\pi_\nu'(\lambda_m)}\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma} e_{m,k}(\tau)\,\overline{\omega_{0,k}(\tau)}\,d\tau =$$

$$\frac{\sigma}{\Gamma(1+\nu)\,\pi_\nu'(\lambda_m)}[e_m, \omega_0] = 0 \quad (m = \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$[\bar{e}_0, \bar{\omega}_0] = \sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma} e_{0,k}^*(\tau)\,\overline{\omega_{0,k}^*(\tau)}\,d\tau = [e_0^*, \omega_0^*] = 1,$$

$$[\tilde{e}_0, \bar{\omega}_m] = \frac{\sigma}{\Gamma(1+\nu)\,\pi_\nu'(\lambda_m)}\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma} e_{m,k}(\tau)\,\overline{\omega_{0,k}^*(\tau)}\,d\tau =$$

$$= \frac{\sigma}{\Gamma(1+\nu)\,\pi_\nu'(\lambda_m)}[e_m, \omega_0^*] = 0 \quad (m = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

и, наконец,

$$[\bar{e}_n, \bar{\omega}_m] = \frac{\pi_\nu'(\lambda_n)}{\pi_\nu'(\lambda_m)}\sum_{k=0}^{3}\int_0^{\sigma} e_{m,k}(\tau)\,\overline{\omega_{m,k}(\tau)}\,d\tau =$$

$$= \frac{\pi_\nu'(\lambda_n)}{\pi_\nu'(\lambda_m)}[e_m, \omega_n] = \delta_{nm} \quad (n,\ m = \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Таким образом, все соотношения (5.59) теоремы доказаны.

В связи с введением параметров

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} + \nu - \mu \text{ и } \bar{\omega} = 4(\nu - 1) - \omega \quad (-1 < \tilde{\omega} < 1),$$

мы выше видели, что они удовлетворяют условию (5.43′), не только аналогичному, но и эквивалентному условию (5.43), при соблюдении которого была доказана теорема 5.2.

Пусть $l_{2,\frac{1-\omega}{2}}$ $(-1 < \omega < 1)$ — пространство последовательностей комплексных чисел $\{b_0^*, [b_k]_{-\infty}^{+\infty}\}$, для которых конечна норма

$$\|\{b_k\}^*\|_{2,\frac{1-\omega}{2}}=\left\{|b_0^*|^2+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|)^{\frac{1-\omega}{2}}|b_k|^2\right\}^{1/2}<+\infty. \tag{5.60}$$

Теорема 5.3. 1°. *Для любого элемента* $\{b_0^*, [b_k]_{-\infty}^{+\infty}\}\in l_{2,\frac{1-\omega}{2}}^*$ $(-1<\omega<1)$ *при условии* (5.43) *вектор-ряд*

$$\varphi(\tau)=b_0^*\,e_0^*(\tau)+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}b_j\,e_j(\tau) \tag{5.61}$$

осуществляет взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l_{2,\frac{1-\omega}{2}}^*$ *на все пространство вектор-функций* $\varphi(\tau)=\{\varphi_k(\tau)\}_0^3\in L_2(0,\sigma)$. *При этом, коэффициенты ряда* (5.61) *определяются по формулам*

$$b_0^*=[\varphi,\omega_0^*],\quad b_j=[\varphi,\omega_j]\ (j=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{5.62}$$

2°. *Для норм вектор-функций* $\varphi(\tau)$ *и последовательности чисел* $\{b_0^*, [b_k]_{-\infty}^{+\infty}\}$ *справедлива двойная оценка*

$$\|\varphi\|=[\varphi,\varphi]^{1/2}\asymp\|\{b_k\}^*\|_{2,\frac{1-\omega}{2}}. \tag{5.63}$$

Доказательство. Заметим сначала, что множества вектор-функций

$$\varphi(\tau)=\{\varphi_k(\tau)\}_0^3\in L_2(0,\sigma)\ \text{ и }\ \overline{\varphi}(\tau)=\{e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\overline{\varphi_k(\sigma-\tau)}\}_0^3\in L_2(0,\sigma)$$

совпадают, причем, очевидно, $\|\Phi(\sigma-\tau)\|=\|\Phi(\tau)\|$. Следовательно, все утверждения теоремы 5.2 относительно множества вектор-рядов

$$\widetilde{\varphi}(\tau)=\widetilde{a}_0^*\,\widetilde{\omega}_0^*(\tau)+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\overline{a}_j\,\widetilde{\omega}_j(\tau) \tag{5.64}$$

и пространств последовательностей $\{\widetilde{a}_0^*, [\overline{a}_k]_{-\infty}^{+\infty}\}\in l_{2,\frac{\widetilde{\omega}-1}{2}}^*$ останутся в силе.

Убедимся, что указанные утверждения эквивалентны утверждениям данной теоремы.

Воспользовавшись тождествами (5.56) и (5.57), мы последовательно будем иметь из (5.64):

$$\widetilde{a}_0^*=[\overline{\varphi},\overline{e}_0^*]=\frac{4\sigma^\nu}{\Gamma(1+\nu)}[\overline{\varphi(\sigma-\tau)},\overline{\omega_0(\sigma-\tau)}]=$$

$$=\frac{4\sigma^\nu}{\Gamma(1+\nu)}\overline{[\varphi,\omega_0]},$$

$$\overline{a}_0\,\overline{\omega}_{0,k}^*(\tau)=e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\overline{[\varphi,\omega_0]}\;\overline{e_{0,k}(\sigma-\tau)}\quad(0\leqslant k\leqslant3), \tag{5.65}$$

$$\overline{a}_0=[\overline{\varphi},\overline{e}_0]=\frac{4\sigma^\nu}{\Gamma(1+\nu)}\overline{[\varphi(\sigma-\tau),\omega_0^*(\sigma-\tau)]}=\frac{4\sigma^\nu}{\Gamma(1+\nu)}\overline{[\varphi,\omega_0^*]},$$

$$\widetilde{a_0}\,\widetilde{\omega_{0,k}}(\tau) = e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\,\overline{[\varphi,\ \omega_0^*]}\ \overline{e^*_{0,k}(\sigma-\tau)}\ (0\leqslant k\leqslant 3). \tag{5.66}$$

Далее, из тех же тождеств получим для всех $j=\pm 1,\ \pm 2,\cdots$

$$\widetilde{a_j} = [\widetilde{\varphi},\ \widetilde{e_j}] = 4\sigma^{\nu-1}\,\overline{\pi_\nu(\lambda_j)}\ [\overline{\varphi(\sigma-\tau)},\ \overline{\omega_j(\sigma-\tau)}] =$$

$$= 4\sigma^{\nu-1}\,\overline{\pi_\nu(\lambda_j)}\ \overline{[\varphi,\ \omega_j]}$$

и поэтому

$$\widetilde{a_j}\,\widetilde{\omega_{j,k}}(\tau) = e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\,\overline{[\varphi,\ \omega_j]}\ \overline{e_{j,k}(\sigma-\tau)}\ (0\leqslant k\leqslant 3). \tag{5.67}$$

Ввиду формул (5.65), (5.66) и (5.67) вектор-ряд (5.64) может быть записан в виде скалярных рядов

$$e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\,\overline{\varphi_k(\sigma-\tau)} = e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\Big\{\overline{[\varphi,\ \omega_0^*]}\ \overline{e^*_{0,k}(\sigma-\tau)} +$$

$$+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\overline{[\varphi,\ \omega_j]}\ \overline{e_{j,k}(\sigma-\tau)}\Big\}\ (0\leqslant k\leqslant 3).$$

Перейдя в них к сопряженным величинам, предварительно заменив переменную $\sigma-\tau$ на τ, эти ряды вновь можем записать в векторной форме (5.61) теоремы, причем коэффициенты $\{b_0^*, [b_k]_{-\infty}^{+\infty}\}$ определятся из соотношений

$$b_0^* = [\varphi,\ \omega_0^*] = \frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^\nu}\,\overline{[\widetilde{a_0}]},\quad b_0 = [\varphi,\ \omega_0] = \frac{\Gamma(1+\nu)}{4\sigma^\nu}\,\overline{[\widetilde{a_0}]^*}, \tag{5.68}$$

$$b_j = [\tau,\ \omega_j^*] = \frac{\overline{[a_j]}}{4\sigma^{\nu-1}\pi_\nu(\lambda_j)}\ (j=\pm 1,\ \pm 2,\cdots).$$

Заметим теперь, что поскольку по определению $\pi_\nu(z) = S_\nu(\sigma z^2)$, то

$$\pi_\nu'(\lambda_j) = 2\sigma\lambda_j S_\nu'(\sigma\lambda_j^2)\quad (1\leqslant|j|<+\infty). \tag{5.69}$$

Далее, по лемме 1.6

$$|S_\nu'(\sigma\lambda_j^2)| \asymp |\lambda_j|^{2(1-\nu)}\quad (1\leqslant|j|<+\infty),$$

а по определению (4.11) последовательности $\{\lambda_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ и по (4.22)

$$|\lambda_j| \asymp (1+|j|)^{1/2}\quad (1\leqslant|j|<+\infty).$$

Поэтому из (5.69) следует двойное неравенство

$$|\pi_\nu'(\lambda_j)| \asymp (1+|j|)^{\frac{3}{2}-\nu}\quad (1\leqslant|j|<+\infty),$$

откуда и из (5.68) следуют двойные неравенства

$$|b_j| \asymp (1+|j|)^{\nu-\frac{3}{2}}\,\overline{|a_j|}\ (1\leqslant|j|<+\infty),$$

$$(1+|j|)^{\frac{1-\omega}{2}}|b_j|^2 \asymp (1+|j|)^{\frac{\omega-1}{2}}\,\overline{|a_j|}^2\ (1\leqslant|j|<+\infty), \tag{5.70}$$

поскольку $\tilde{\omega} = 4\nu - 4 - \omega$.

Следовательно, нормы

$$\|\{b_j\}\|^* \Big|_{2,\frac{1-\omega}{2}} \quad \text{и} \quad \|\{a_j\}^*\| \Big|_{2,\frac{\tilde{\omega}-1}{2}}$$

конечны одновременно и так как, очевидно,

$$\|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\| \asymp \|\{\tilde{a}_j\}^*\| \Big|_{2,\frac{\tilde{\omega}-1}{2}},$$

то двойное неравенство (5.63) теоремы также доказано.

(в) В заключение параграфа отметим следующее.

От рассмотренных выше вектор-систем (5.41) перейдем к вектор-системам

$$\{\Phi_0^*(\tau), [\Phi_n(\tau)]_{-\infty}^{+\infty}\} \quad \text{и} \quad \{\Psi_0^*(\tau), [\Psi_n(\tau)]_{-\infty}^{+\infty}\}, \tag{5.71}$$

положив

$$\Phi_0^*(\tau) = e_0^*(\tau), \quad \Phi_n(\tau) = (1+|n|)^{(1-\omega)/4} e_n(\tau),$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{5.72}$$
$$\Psi_0^*(\tau) = \omega_0^*(\tau), \quad \Psi_n(\tau) = (1+|n|)^{(\omega-1)/4} \omega_n(\tau).$$

Очевидно, что системы (5.71), в силу теоремы 5.1, также биортогональны в принятой нами метрике $L_2(0, \sigma)$. Тогда установленные выше две основные теоремы 5.2 и 5.3 могут быть сформулированы в таком виде.

Теорема 5.4. *Биортогональные на* $(0, \sigma)$ *вектор-системы* (5.72) *являются базисами Рисса пространства вектор-функций* $L_2(0, \sigma)$.

В связи с приведенной формулировкой отметим, что теорему 5.3 можно свести к теореме 5.2 также на основании известной теоремы о базисности Рисса биортогональных систем (см. [7], гл. VI). Однако, автор предпочел изложить здесь метод прямого сведения одной теоремы к другой.

Наконец, в заключение параграфа отметим еще, что как в теоремах 5.2 и 5.3, так и в их объединении—теореме 5.4, на параметр ν ставилось ограничение (5.43)

$$\frac{1}{2} < \mu = \frac{3+\omega}{4} < \nu < \frac{5+\omega}{4} < \frac{3}{2}, \quad -1 < \omega < 1,$$

и, тем самым, он, в частности, может принимать и значение $\nu = 1$.

Но в этом случае нули $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ функции $\pi_1(z) = \sin \sigma z^2$ записывались в явном виде (5.19′), ввиду чего формулы (5.27)—(5.31), посредством которых были определены наши биортогональные системы вектор-функций, также запишутся в наиболее простом и явном виде.

§ 6. Задача типа Коши и особая краевая задача в комплексной области

6.1. В данном пункте сначала приводятся определение и сводка лишь некоторых простейших свойств интегро-дифференциальных операторов Римана—Лиувилля. Более полно эти свойства изложены в

монографии автора (см. [1], гл. IX, § 1). Затем для одного модельного оператора типа Римана—Лиувилля в комплексной области ставится задача типа задачи Коши, единственное решение которой выражается посредством функции типа Миттаг—Леффлера $E_\rho(z;\mu)$.

(а) Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $L(0, l)(0 < l < +\infty)$. *Интегралом порядка* α $(0 < \alpha < +\infty)$ *от функции* $f(x)$ *с началом в точке* $x = 0$ *принято называть функцию*

$$D^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad x \in (0, l). \tag{6.1}$$

На основании теоремы Фубини приходим к интегральному неравенству

$$\int_0^l |D^{-\alpha} f(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^l (l-t)^{\alpha} |f(t)|\, dt < +\infty$$

и, следовательно, к утверждению

1°. *Если* $f(x) \in L(0, l)$, *то при любом* α $(0 < \alpha < +\infty)$ *функция* $D^{-\alpha} f(x)$ *определена почти всюду на* $(0, l)$ *и принадлежит классу* $L(0, l)$.

В связи с этим отметим, что применение оператора $D^{-\alpha}$ к функции x^γ $(-1 < \gamma < +\infty)$ легко приводит нас к формуле

$$D^{-\alpha}\left\{\frac{x^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}\right\} = \frac{x^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(1+\gamma+\alpha)} \in L(0, l). \tag{6.2}$$

2°. *В каждой точке Лебега функции* $f(x) \in L(0, l)$ *и, следовательно, почти всюду на* $(0, l)$

$$\lim_{\alpha \to +0} D^{-\alpha} f(x) = f(x). \tag{6.3}$$

Ввиду этого свойства естественно определение (6.1) оператора $D^{-\alpha} f(x)$ распространить на значение $\alpha = 0$, положив

$$D^{-0} f(x) = f(x), \quad x \in (0, l). \tag{6.1'}$$

3°. *Если* $f(x) \in L(0, l)$ *и числа* α_k $(0 \leqslant \alpha_k < +\infty)$ $(k = 1, 2)$ *произвольны, то почти всюду на* $(0, l)$

$$D^{-\alpha_2}\{D^{-\alpha_1} f(x)\} = D^{-\alpha_1}\{D^{-\alpha_2} f(x)\} = D^{-(\alpha_1+\alpha_2)} f(x). \tag{6.4}$$

Перейдем теперь к определению производной произвольного порядка и укажем ряд ее свойств.

Пусть α $(0 < \alpha < +\infty)$ задано, и целое число $p \geqslant 1$ определяется из условия

$$p - 1 < \alpha \leqslant p.$$

Пусть, далее, $f(x) \in L(0, l)$ и функция

$$\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\{D^{-(p-\alpha)} f(x)\}$$

почти всюду на $(0, l)$ имеет производную (не обязательно из $L(0, l)$), при этом, если $\alpha = p \geqslant 1$, мы должны воспользоваться определением (6.1′) оператора D^{-0}.

Тогда функцию

$$D^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d^p}{dx^p} \{D^{-(p-\alpha)} f(x)\}, \quad x \in (0, l), \tag{6.5}$$

принято называть *производной порядка α от $f(x)$ с началом в точке $x = 0$*.

Ввиду (6.1′) при целом $\alpha = p \geqslant 1$ имеем

$$D^{p} f(x) = f^{(p)}(x), \quad x \in (0, l),$$

т. е. $D^{p} f(x)$ есть обычная производная функции $f(x)$ порядка p.

В частности, если $0 < \alpha \leqslant 1$ и, таким образом, $p = 1$, то будем иметь

$$D^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d}{dx} \{D^{-(1-\alpha)} f(x)\}, \quad x \in (0, l), \tag{6.5′}$$

причем, ввиду (6.1′), почти всюду на $(0, l)$

$$D^{-0} f(x) = \frac{d}{dx} \{D^{-1} f(x)\} = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)\, dt = f(x).$$

Поэтому, вообще, естественно полагать, что

$$D^{-0} f(x) = D^{+0} f(x) \equiv D^{0} f(x) = f(x) \tag{6.6}$$

почти всюду на $(0, l)$.

Из общего определения производной D^{α} $(0 < \alpha < +\infty)$ и ввиду (6.2) имеем, например

$$D^{\alpha} \left\{ \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \right\} = \frac{d^p}{dx^p} D^{-(p-\alpha)} \left\{ \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \right\} = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)}$$
$$(-1 < \gamma < +\infty). \tag{6.7}$$

Объединив (6.2) и (6.7), получим общую формулу

$$D^{\alpha} \left\{ \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \right\} = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)} \quad (-1 < \gamma < +\infty, \ -\infty < \alpha < +\infty). \tag{6.7′}$$

В заключение приведем формулировки еще двух свойств операторов Римана—Лиувилля.

4°. *Пусть $f(x) \in L(0, l)$. Тогда почти всюду на $(0, l)$*

1) *при $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$*

$$D^{\alpha} D^{-\beta} f(x) = D^{-(\beta-\alpha)} f(x), \tag{6.8}$$

2) *при $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$, если $D^{\alpha-\beta} f(x)$ существует почти всюду на $(0, l)$, то*

$$D^{\alpha} D^{-\beta} f(x) = D^{\alpha-\beta} f(x). \tag{6.9}$$

5°. *Пусть* $f(x) \in L(0, l)$ *и существует производная* $D^{\beta} f(x) \in L(0, l)$, *причем* $p-1<\beta \leqslant p$ $(p \geqslant 1)$. *Тогда для любого* $\alpha \geqslant 0$

$$D^{-\alpha} D^{\beta} f(x)=D^{\beta-\alpha} f(x)-\sum_{k=1}^{p}\{D^{\beta-k} f(t)\}_{t=0} \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)}. \tag{6.10}$$

Отметим, что отсюда, в частности, следует, что при любых $0 \leqslant \alpha<+\infty$ и $0<\beta \leqslant 1$

$$D^{-\alpha} D^{\beta} f(x=D^{\beta-\alpha} f(x)-\{D^{-(1-\beta)} f(t)\}_{t=0} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{6.10'}$$

Приведенные выше определения и свойства интеграла и производной дробного порядка могут быть распространены на функции комплексной переменной.

Положим, что функция $f(z)$ определена на римановой поверхности G^{∞} функции $\operatorname{Ln} z$, или, более общо, в области $G \subset G^{\infty}$, звездообразной относительно точки ветвления $z=0$ (т. е. $(0, z_0) \subset G$, $\forall z_0 \in G$).

Если на данном интервале $(0, z_0) \subset G$, соединяющем точки $z=0$ и $z_0= \in G$:

$$(0, z_0)=\{z=r \exp[i \operatorname{Arg} z_0]: 0<r<|z_0|\},$$

функция $f(z)$ удовлетворяет надлежащим условиям, то для любой точки $z \in (0, z_0)$ оператор интегро-дифференцирования $D^{-\alpha} f(z)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, может быть определен способом, вполне аналогичным вышеприведенному.

Например, вместо формул (6.1) и (6.5) будем иметь:

$$D^{-\alpha} f(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-\zeta)^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta, \quad 0<\alpha<+\infty,$$

$$D^{\alpha} f(z) \equiv \frac{d^p}{dz^p}[D^{-(\alpha-p)} f(z)], \quad p-1<\alpha \leqslant p \quad (p \geqslant 1), \tag{6.11}$$

предполагая, что как интегрирование, так и дифференцирование производятся вдоль интервала $(0, z) \subset (0, z_0)$.

Разумеется, все приведенные выше свойства 1°—5° и формулы для операторов $D^{-\alpha} f(z)$ и $D^{\alpha} f(z)$ также останутся в силе.

(б) На поверхности G^{∞} рассмотрим функцию

$$y_{\mu}(z; \lambda)=E_2(\lambda z^{1/2}; \mu) z^{\mu-1}, \tag{6.12}$$

где берутся главные ветви функций $z^{1/2}$ и $z^{\mu-1}$, в предположении, что $0<\mu<+\infty$ и $\lambda \in \mathbf{C}$ — произвольные параметры.

Лемма 6.1. *Функция* $y_{\mu}(z; \lambda)$ *удовлетворяет уравнению*

$$D^{1/2} y_{\mu}(z; \lambda)=\frac{z^{\mu-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}+\lambda y_{\mu}(z; \lambda), \quad z \in G^{\infty}, \tag{6.13}$$

и начальному условию

$$D^{-(1-\mu)} y_{\mu}(z; \lambda)|_{z=0}=1. \tag{6.14}$$

Доказательство. Поскольку мы имеем разложение

$$y_\mu(z;\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{z^{\frac{k}{2}+\mu-1}}{\Gamma(\mu+k/2)}, \tag{6.15}$$

то, пользуясь формулой (6.7) для $\alpha=1/2$, получим

$$D^{1/2}y_\mu(z;\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k D^{1/2}\left\{\frac{z^{\frac{k}{2}+\mu-1}}{\Gamma(\mu+k/2)}\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{z^{\frac{k-2}{2}+\mu}}{\Gamma\left(\mu+\frac{k-1}{2}\right)}=\frac{z^{\mu-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\mu-1/2)}+\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{z^{\frac{k}{2}+\mu-1}}{\Gamma(\mu+k/2)}.$$

Отсюда, ввиду (6.15), следует формула (6.13) леммы.

Далее, пользуясь уже формулой (6.7′), но для значения $\alpha=\mu-1$, будем иметь

$$D^{-(1-\mu)}y_\mu(z;\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k D^{\mu-1}\left\{\frac{z^{\frac{k}{2}+\mu-1}}{\Gamma(\mu+k/2)}\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{z^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}=E_2(\lambda z^{1/2};1), \tag{6.14′}$$

откуда следует начальное условие (6.14), так как $E_2(0;1)=1$.

Если на параметр μ накладывать дополнительные ограничения, то оператор дифференцирования $D^{1/2}$ в формуле (6.13) леммы 6.1 можно заменить оператором интегро-дифференцирования L_μ более сложной природы так, чтобы функция $y_\mu(z;\lambda)$ взамен (6.13) удовлетворяла уже однородному уравнению вида

$$L_\mu y_\mu(z;\lambda)=\lambda y_\mu(z;\lambda),\ z\in G^\infty. \tag{6.16}$$

Лемма 6.2. *Если* $\frac{1}{2}<\mu<1$, *то функция* $y_\mu(z;\lambda)$ *является решением уравнения* (6.16), *где*

$$L_\mu=D^{-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}D^1D^{-(1-\mu)}. \tag{6.17}$$

Доказательство. Воспользуемся вторым из утверждений 4°, т. е. формулой (6.9) для $\alpha=1$, $\beta=1-\mu$, заметив, что $\alpha>\beta>0$. Тогда получим

$$D^1D^{-(1-\mu)}y_\mu(z;\lambda)=D^\mu y_\mu(z;\lambda),$$

и, таким образом

$$L_\mu y_\mu(z;\lambda)=D^{-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}D^\mu y_\mu(z;\lambda). \tag{6.18}$$

Обратимся теперь к формуле (6.10′), положив там $\alpha = \mu - \frac{1}{2}$, $\beta = \mu$ и заметив, что в этом случае $\alpha > 0$ и $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Тогда из (6.18) получаем

$$L_\lambda y_\mu(z;\lambda) = D^{1/2} y_\mu(z;\lambda) - [D^{-(1-\mu)} y_\mu(z;\lambda)]_{z=0} \frac{z^{\mu-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\mu-\frac{1}{2}\right)},$$

откуда, ввиду начального условия (6.14) и тождества (6.13) леммы 6.1, следует наше утверждение (6.16).

На основании лемм 6.1 и 6.2, при надлежащих условиях на заданную функцию $\Phi(z)$, $z \in (0, z_0)$, мы вправе воспользоваться двумя формами оператора L_μ, если $\frac{1}{2} < \mu < 1$, т. е.

$$L_\mu \Phi(z) \equiv D^{-(\mu-1/2)} D^1 D^{-(1-\mu)} \Phi(z) \equiv$$

$$\equiv D^{1/2} \Phi(z) - \frac{z^{\mu-3/2}}{\Gamma(\mu-1/2)}, \quad z \in (0, z_0). \tag{6.19}$$

(в) *Для данного значения* $z_0 \in G^\infty$ обозначим через $L_p(0, z_0)$ $(p \geqslant 1)$ множество измеримых на интервале $(0, z_0)$ функций $\Phi(z)$, для которых

$$\int_0^{z_0} |\Phi(z)|^p |dz| < +\infty.$$

В заключение пункта докажем теорему.

Теорема 6.1. *При условии*

$$\frac{1}{2} < \mu < 1$$

задача типа Коши

$$L_\mu \Phi(z) = \lambda \Phi(z), \quad z \in (0, z_0), \tag{6.20}$$

$$D^{-(1-\mu)} \Phi(z)|_{z=0} = 1, \tag{6.21}$$

в классе функций $\Phi(z) \in L_2(0, z_0)$, $z \in (0, z_0)$, *имеет единственное решение*

$$\Phi_0(z) = y_\mu(z;\lambda) = E_2(\lambda z^{1/2}; \mu)\, z^{\mu-1}. \tag{6.22}$$

Доказательство. Заметим сначала, что если $\mu > 1/2$, то функция $y_\mu(z;\lambda) \in L_2(0, z_0) \subset L_1(0, z_0)$ при любом $z_0 \in G^\infty$ и $\lambda \in \mathbf{C}$, по лемме 6.1, является решением задачи (6.20)—(6.21). Поэтому, если положить

$$\Psi(z) = \Phi(z) - y_\mu(z;\lambda),$$

то нам достаточно доказать, что при условии (6.19) задача типа Коши

$$L_\mu \Psi(z) = D^{1/2} \Psi(z) = \lambda \Psi(z), \tag{6.23}$$

$$D^{-(1-\mu)} \Psi(z)|_{z=0} = 0, \tag{6.24}$$

в классе $L_3(0, z_0)$ имеет единственное решение $\Psi(z)=0$, почти всюду на $(0, z_0)$.

С этой целью запишем (6.23) в виде

$$\frac{d}{dz} D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z) = \lambda \Psi(z), \quad z \in (0, z_0).$$

Интегрированием по интервалу $(0, z_0)$ получим, что почти для всех $z \in (0, z_0)$ справедливо равенство

$$D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z) - [D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z)]_{z=0} = \lambda D^{-1} \Psi(z), \tag{6.25}$$

в правой части которого мы имеем непрерывную на $(0, z_0)$ функцию

$$D^{-1} \Psi(z) = \int_0^z \Psi(\zeta)\, d\zeta.$$

Поскольку, согласно свойству 1^0, функция $D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z)$ почти всюду на $(0, z_0)$ конечна, то из написанного тождества следует, что

$$[D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z)]_{z=0} = C_0 \neq +\infty.$$

Поэтому из тождества (6.25) следует, что функция $D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z)$ также непрерывна на $(0, z_0)$.

Теперь применим к обеим частям (6.25) оператор $D^{-\frac{1}{2}}$. Тогда, в силу свойства 3^c операторов Римана—Лиувилля и частного случая формулы (6.2) для $\alpha=1/2$ и $\gamma=0$, будем иметь

$$D^{-1} \Psi(z) = C_0 \frac{z^{1/2}}{\Gamma(3/2)} + \lambda D^{-\frac{3}{2}} \Psi(z)$$

всюду на $(0, z_0)$.

Дифференцируя, далее, последнее тождество по z, т. е. применив к обеим его частям оператор D^1, в силу первого из утверждений 4^3 для $\alpha=1$ и $\beta=\frac{3}{2}$ получим, что почти для всех $z \in (0, z_0)$

$$\Psi(z) = C_0 \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(1/2)} + \lambda D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z).$$

Если подставить сюда значение $D^{-\frac{1}{2}} \Psi(z)$ из (6.25), то придем к следующей формуле, также справедливой почти всюду на $(0, z_0)$:

$$\Psi(z) = C_0 \lambda + C_0 \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(1/2)} + \lambda^2 D^{-1} \Psi(z). \tag{6.26}$$

Отсюда следует, что функция $\Psi(z) \in L_1(0, z_0)$ непрерывна на $(0, z_0]$.

Применим теперь к обеим частям (6.26) оператор интегрирования $D^{-(1-\mu)}$ ($\mu<1$!). Тогда, в силу следствий из формулы (6.2)

$$D^{-(1-\mu)}\{1\}=\frac{z^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)},\quad D^{-(1-\mu)}\left\{\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(1/2)}\right\}=\frac{z^{\frac{1}{2}-\mu}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\mu\right)},$$

и свойства 3° интегралов Римана—Лиувилля будем иметь тождество

$$D^{-(1-\mu)}\Psi(z)=C_0\frac{\lambda z^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)}+C_0\frac{z^{\frac{1}{2}-\mu}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\mu\right)}+ \tag{6.27}$$

$$+\lambda^2 D^{-(2-\mu)}\Psi(z),\ z\in(0,\ z_0).$$

Так как $\mu<1$, то

$$|D^{-(2-\mu)}\Psi(z)|\leqslant\frac{1}{\Gamma(2-\mu)}\int_0^z|z-\zeta|^{1-\mu}|\Psi(\zeta)|\,|d\zeta|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|z|^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)}\int_0^z|\Psi(\zeta)|\,|d\zeta|,\ z\in(0,\ z_0).$$

Поэтому, если в (6.27) положить $z=0$ и учесть начальное условие (6.24), то ввиду условия $\mu>\frac{1}{2}$ это не приведет к противоречию лишь при $C_0=0$.

Следовательно, тождество (6.26) принимает вид

$$\Psi(z)=\lambda^2\int_0^z\Psi(\zeta)\,d\zeta,\ z\in(0,\ z_0),$$

причем $\Psi(0)=0$. Отсюда вытекает, что $\Psi(z)\equiv 0$, $z\in(0,\ z_0)$, и теорема доказана.

6.2. Для дальнейшего изложения нам необходимо привести здесь также свойства интегро-дифференциальных операторов, несколько отличных от операторов Римана—Лиувилля.

(а) Пусть функция $F(z)$ также определена на поверхности G^∞ или в области $G\subset G^\infty$, звездообразной относительно точки ветвления $z=0$. Полагая, далее, что на каждом интервале $(0,\ z_0)$ с концами в точках $z=0$ и $z=z_0\in G$ функции $F(z)\in L_p(0,\ z_0)$ ($p\geqslant 1$), введем в рассмотрение следующую модификацию интеграла Римана—Лиувилля:

$$\mathbf{D}^{-\alpha}F(z)\equiv\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^z(z^2-\zeta^2)^{\alpha-1}F(\zeta)\,d\zeta,\ z\in G, \tag{6.28}$$

где $0<\alpha<+\infty$ — любое.

При этом, как и в определении $D^{-\alpha}f(z)$, здесь предполагаем, что интегрирование производится вдоль интервала $(0, z) \subset G$.

Далее, поскольку после замены переменной мы имеем представления

$$D^{-\alpha}f(z) = \frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tz)\, dt,$$

$$\mathbf{D}^{-\alpha}\mathbf{F}(z) = \frac{2z^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-1} \mathbf{F}(tz)\, dt, \tag{6.29}$$

то ради однозначности наших определений мы будем рассматривать главные ветви многозначных функций z^{α} и $z^{2\alpha-1}$ на римановой поверхности G^{∞} логарифмической функции $\operatorname{Ln} z$. Вообще говоря, функции $D^{-\alpha}f(z)$ и $\mathbf{D}^{-\alpha}\mathbf{F}(z)$ нами будут рассмотрены на главном листе поверхности G^{∞} с разрезом вдоль полуоси $(-\infty, 0)$: $z = re^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

После простых замен переменных интегрирования легко убедиться в том, что интегральные операторы $D^{-\alpha}$ и $\mathbf{D}^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < +\infty)$ связаны между собой взаимно-обратными соотношениями

$$\mathbf{D}^{-\alpha}\mathbf{F}(z) = \{D^{-\alpha}[\zeta^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F}(\zeta^{1/2})]\}_{\zeta=z^2}, \tag{6.30'}$$

$$z \in (0, z_0)$$

$$D^{-\alpha}f(z) = \{\mathbf{D}^{-\alpha}[\zeta f(\zeta^2)]\}_{\zeta=\sqrt{z}}. \tag{6.30''}$$

Далее, для любого α $(0 < \alpha < +\infty)$ определим также оператор $\mathbf{D}^{\alpha}$—аналог оператора дробного дифференцирования D^{α} по Риману—Лиувиллю. А именно, по аналогии с формулой (6.30'), мы положим для $0 < \alpha < +\infty$

$$\mathbf{D}^{\alpha}\mathbf{F}(z) = \{D^{\alpha}[\zeta^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F}(\zeta^{1/2})]\}_{\zeta=z^2}, \quad z \in (0, z_0), \tag{6.31'}$$

в предположении, что правая часть (6.31'), т. е. производная функции $\zeta^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F}(\zeta^{1/2})$ порядка α в смысле Римана—Лиувилля, существует почти всюду на $(0, z_0)$.

Ввиду свойств (6.6) оператора Римана—Лиувилля, из (6.30') и (6.31') следует, что почти всюду на $(0, z_0)$

$$\mathbf{D}^{-0}\mathbf{F}(z) = \mathbf{D}^{+0}\mathbf{F}(z) = \mathbf{D}^{0}\mathbf{F}(z) \equiv z^{-1}\mathbf{F}(z). \tag{6.32}$$

Если целое число $p \geqslant 1$ определяется из неравенств $p-1 < \alpha \leqslant p$, то по определению (6.5) оператора D^{α} формула (6.31') принимает следующий вид:

$$\mathbf{D}^{\alpha}\mathbf{F}(z) = \left\{\frac{d^p}{d\zeta^p} D^{-(p-\alpha)}[\zeta^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F}(\zeta^{1/2})]\right\}_{\zeta=z^2}. \tag{6.33}$$

Поэтому в частном случае, когда $0 < \alpha < 1$

$$D^{\alpha} F(z) = \left\{ \frac{d}{d\zeta} D^{-(1-\alpha)} \left[\zeta^{-\frac{1}{2}} F(\zeta^{1/2}) \right] \right\}_{\zeta = z^2},$$

откуда, в силу определения (6.30′), получим представление

$$D^{\alpha} F(z) = (2z)^{-1} \frac{d}{dz} D^{-(1-\alpha)} F(z), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{6.33′}$$

справедливое, в частности, и для крайних значений $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ параметра α.

Убедимся теперь, что обращение формулы (6.31′) для любого значения $0 < \alpha < +\infty$ запишется в аналогичном с (6.30″) виде. Точнее, покажем, что если для данного α $(p - 1 < \alpha \leqslant p)$ оператор $D^{\alpha} F(z)$ имеет смысл почти всюду на $(0, z_0)$, то там же почти всюду имеет место также обратная к (6.31′) формула

$$D^{\alpha} F(z) = [D^{\alpha} [\zeta F(\zeta^2)]]_{\zeta = \sqrt{z}}. \tag{6.31″}$$

В самом деле, по (6.33) и (6.5)

$$[D^{\alpha} [\zeta F(\zeta^2)]]_{\zeta = \sqrt{z}} = \left\{ \frac{d^p}{d\zeta^p} D^{-(p-\alpha)} [F(\zeta)] \right\}_{\zeta = z} = D^{\alpha} F(z).$$

(6) На римановой поверхности G^{∞} рассмотрим интегро-дифференциальный оператор

$$\tilde{L}_{\mu} \Psi(z) = D^{1/2} \Psi(z) - \frac{z^{2\mu - 2}}{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{2}\right)}, \quad \mu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \tag{6.34}$$

Обозначим теперь через $L_2^{\cdot}(G^{\infty})$ множество функций $\Psi(z)$, которые определены на римановой поверхности G^{∞}, у которых для любой точки $z_0 \in G^{\infty}$

$$\int_0^{z_0} |\Psi(z)|^2 |z|^{-1} |dz| = \int_0^1 |\Psi(z_0 t)|^2 t^{-1} dt < +\infty. \tag{6.35}$$

При условии

$$\frac{1}{2} < \mu < 1 \tag{6.36}$$

в классе функций $\Psi(z) \in L_2^{\cdot}(G^{\infty})$ ставим следующую задачу типа задачи Коши:

$$\tilde{L}_{\mu} \Psi(z) = \lambda z^{-1} \Psi(z), \quad z \in G^{\infty}, \tag{6.37}$$

$$D^{-(1-\mu)} \Psi(z)|_{z=0} = 1. \tag{6.38}$$

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$Y_{\mu}(z; \lambda) = E_2(\lambda z; \mu) z^{2\mu - 1}, \tag{6.39}$$

входящую в класс $L_2^{\cdot}(G^{\infty})$ при условии $\mu > 1/2$ и заметим также, что по определению (6.12) функции $y_{\mu}(z; \lambda)$

$$Y_\mu(z;\lambda)=zy_\mu(z^2;\lambda),\quad z\in G^\infty. \tag{6.40}$$

Лемма 6.3. *Функция* $Y_\mu(z;\lambda)\left(\frac{1}{2}<\mu<1\right)$ *является решением задачи* (6.37)—(6.38).

Доказательство. Пользуясь определением (6.28) оператора $\mathbf{D}^{-\alpha}$ $(0<\alpha<+\infty)$ и разложением функции $E_2(\lambda\zeta;\mu)$ в ряд Тейлора, последовательно будем иметь

$$\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}Y_\mu(z;\lambda)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^z(z^2-\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}E_2(\lambda\zeta;\mu)\,\zeta^{2\mu-1}\,d\zeta=$$

$$=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu+k/2)}\int_0^z(z^2-\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}\zeta^{2\mu+k-1}\,d\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k z^{2\mu+k-1}}{\Gamma\left(\mu+\frac{k+1}{2}\right)},$$

и, следовательно, по (6.33′)

$$\mathbf{D}^{1/2}Y_\mu(z;\lambda)=(2z)^{-1}\frac{d}{dz}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}Y_\mu(z;\lambda)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k z^{2\mu+k-3}}{\Gamma\left(\mu+\frac{k-1}{2}\right)}=\frac{z^{2\mu-3}}{\Gamma\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}+\lambda z^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k z^{k+2\mu-1}}{\Gamma(\mu+k/2)}\right\}.$$

Итак, функция $Y_\mu(z;\lambda)\in L_2^*(G^\infty)$ является решением уравнения (6.37).

Далее, при $0\leqslant\mu<1$, вновь по (6.28), имеем

$$\mathbf{D}^{-(1-\mu)}Y_\mu(z;\lambda)=\frac{2}{\Gamma(1-\mu)}\int_0^z(z^2-\zeta^2)^{-\mu}E_2(\lambda\zeta;\mu)\,\zeta^{2\mu-1}\,d\zeta=$$

$$=\frac{2}{\Gamma(1-\mu)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu+k/2)}\int_0^z(z^2-\zeta^2)^{-\mu}\zeta^{2\mu+k-1}\,d\zeta=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k z^k}{\Gamma(1+k/2)}=E_2(\lambda z;1).$$

Отсюда следует выполнение начального условия (6.38)

$$\mathbf{D}^{-(1-\mu)}Y_\mu(z;\lambda)|_{z=0}=1.$$

Лемма доказана.

(в) Докажем теперь аналог теоремы 6.1.

Теорема 6.2. *При условии* (6.36) *задача типа Коши* (6.37)—(6.38) *в классе функций* $\Psi(z)\in L_2^*(G^\infty)$ *имеет единственное решение*

$$\Psi_0(z)\equiv Y_\mu(z;\lambda).$$

Доказательство. Поскольку, согласно лемме 6.3, функция $\Psi_0(z) \in L_2^*(G^\infty)$ является решением задачи (6.37)—(6.38), то нам следует лишь убедиться в том, что она является единственным ее решением.

С этой целью, предполагая, что функция $\Psi(z) \in L_2^*(G^\infty)$ является каким-либо решением нашей задачи, образуем функцию

$$\Phi(w) = w^{-\frac{1}{2}} \Psi(w^{1/2}), \quad w \in G^\infty. \tag{6.41}$$

Сначала же отметим, что тогда для любой точки $w_0 \in G^\infty$

$$\int_0^{w_0} |\Phi(w)|^2 |dw| = 2 \int_0^{z_0} |\Psi(z)|^2 |z|^{-1} |dz| < +\infty \quad (z_0 = \sqrt{w_0}),$$

т. е. по аналогии с определением класса $L_2^*(G^\infty)$ можем написать $\Phi(w) \in L_2(G^\infty)$.

Далее, в силу формулы (6.30″)

$$D^{-(1-\mu)} \Phi(w)|_{w=0} = D^{-(1-\mu)} [w^{-\frac{1}{2}} \Psi(w^{1/2})]_{w=0} =$$
$$= \mathbf{D}^{-(1-\mu)} [\Psi(z)]_{z=0} = 1,$$

поскольку предполагалось, что $\Psi(z)$ удовлетворяет условию (6.38). Но это значит, что функция $\Phi(w) \in L_2(G^\infty)$ удовлетворяет второму условию (6.21) теоремы 6.1.

Убедимся теперь, что функция $\Phi(w)$ является также решением уравнения (6.20) теоремы 6.1.

В самом деле, мы предполагали, что функция $\Psi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{L}_\mu \Psi(z) = \mathbf{D}^{1/2} \Psi(z) - \frac{z^{2\mu-3}}{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{2}\right)} = \lambda z^{-1} \Psi(z), \tag{6.42}$$

а из определения (6.41) функции $\Phi(w)$ следует, что

$$\Psi(z) = z\Phi(z^2), \quad z \in G^\infty. \tag{6.41′}$$

Поэтому тождество (6.42) запишется в виде

$$\tilde{L}_\mu \Psi(z) = \tilde{L}_\mu [z\Phi(z^2)] =$$
$$= \mathbf{D}^{1/2} [z\Phi(z^2)] - \frac{z^{2\mu-3}}{\Gamma(\mu - 1/2)} = \lambda \Phi(z^2). \tag{6.42′}$$

Но пользуясь формулой (6.31′) для значения $\alpha = 1/2$, имеем

$$\mathbf{D}^{1/2} [z\Phi(z^2)] = |D^{1/2} [\Phi(\zeta)]|_{\zeta=z^2},$$

и поэтому

$$|\mathbf{D}^{1/2} [z\Phi(z^2)]|_{z=\sqrt{w}} = D^{1/2} \Phi(w).$$

Теперь в тождестве (6.42′) положив $z = \sqrt{w}$, мы получим, что функция $\Phi(w)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$L_\mu \Phi(w) = D^{1/2}\Phi(w) - \frac{w^{\mu-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\mu-\frac{1}{2}\right)} = \lambda\Phi(w) \tag{6.43}$$

и начальному условию

$$D^{-(1-\mu)}\Phi(w)|_{w=0} = 1. \tag{6.44}$$

Но согласно теореме 6.1 решение задачи (6.43)—(6.44) в классе $L_2(G^\infty)$ единственно: $\Phi_0(w) \equiv y_\mu(z; \lambda)$.

Следовательно, решение $\Psi(z)$ нашей задачи (6.37)—(6.38) также единственно, причем мы должны иметь тождество

$$y_\mu(w; \lambda) \equiv w^{-\frac{1}{2}}\Psi(w^{1/2}).$$

Это значит, что решение $\Psi(z)$ задачи (6.37)—(6.38) единственно, причем

$$\Psi(z) \equiv z y_\mu(z^2; \lambda) \equiv Y_\mu(z; \lambda),$$

и теорема доказана.

6.3. Перейдем к выявлению связи предыдущих результатов с краевой задачей в комплексной области для особого модельного интегро-дифференциального оператора, а также с возникающей при этом проблемой разложения функций в ряды по собственным функциям этой задачи, решение которой приводится в п. 6.4.

(а) Но прежде всего напомним, что все теоремы разложения из §§ 4 и 5 связаны с последовательностью нулей $\{\lambda_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ функции

$$S_\nu(\sigma\lambda^2) = \sigma\lambda^2 E_{1/2}(-\sigma^2\lambda^4; 1+\nu). \tag{6.45}$$

Кроме двукратного нуля $\lambda_0 = 0$, при условии $0 \leqslant \nu < 2$ все нули $S_\nu(\sigma\lambda^2)$ простые, лежат только на координатных осях $\operatorname{Im}\lambda = 0$ и $\operatorname{Re}\lambda = 0$ плоскости λ и расположены симметрично относительно начала координат.

Вместе с тем, во всех основных теоремах разложения, установленных в тех же §§ 4 и 5, на параметр ν накладывалось более жесткое ограничение

$$\nu \in \left(\mu, \mu+\frac{1}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \subset [0, 2), \tag{6.46}$$

где, как всегда

$$\mu = \frac{3+\omega}{4} \quad (-1 < \omega < 1). \tag{6.46'}$$

Отметим еще, что поскольку $1 \in (\mu, \mu+1/2)$, то, как уже отмечалось в заключение § 5, как нули функции $S_1(\sigma\lambda^2) = \sin\sigma\lambda^2$, так и формулы (5.27)—(5.31), посредством которых определялись биортогональные системы вектор-функций, в случае $\nu = 1$ записываются в наиболее простом и явном виде.

Наконец, преобразованием $\tilde{\lambda} = e^{i\frac{\pi}{4}}\lambda$, т. е. положительным вращением плоскости λ на угол $\pi/4$, функция $S_\nu(\sigma\lambda^2)$ переходит в функцию

$$S_\nu^*(\sigma\lambda^2) \equiv S_\nu(-i\sigma\lambda^2) = -i\sigma\lambda^2\, E_{1/2}(\sigma^2\lambda^4;\, 1+\nu), \tag{6.45'}$$

а $\{\lambda_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ — в последовательность $\{\tilde{\lambda}_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ ($\tilde{\lambda}_j = e^{i\frac{\pi}{4}}\lambda_j$) ее простых нулей, расположенных на лучах

$$\arg\tilde{\lambda} = \pm\frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \arg\tilde{\lambda} = \pm\frac{3\pi}{4}$$

плоскости $\tilde{\lambda}$ и симметричных относительно начала $\lambda_0 = 0$ — единственного двукратного нуля этой функции.

(б) Вспомнив определение (6.39) функции

$$Y_\mu(z;\lambda) = E_2(\lambda z;\, \mu)\, z^{2\mu-1},$$

при условии (6.46)—(6.46'), пользуясь определением (6.28) интегрального оператора $D^{-\alpha}$ и разложением функции $E_2(\lambda z;\, \mu)$ в ряд Тейлора, получим тождество

$$D^{-(\nu-\mu)}\, Y_\mu(z;\lambda) = E_2(\lambda z;\, \nu)\, z^{2(\nu-1)},\quad z \in G^\infty. \tag{6.47}$$

Отметим теперь, что на нулевом листе поверхности G^∞:

$$G_0 = \{z:\ -\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi\},$$

лежат отрезки

$$e_{\sqrt{\sigma}}^{(k)} = \{z:\ z = re^{i\left(\frac{\pi}{2}-k\right)},\quad 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{\sigma}\}\ (k = -1,\, 0,\, 1,\, 2)$$

с концами в точках $r_k = \sqrt{\sigma}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-k\right)}$ $(-1 \leqslant k \leqslant 2)$.

Совокупность этих отрезков

$$e_+\{\sqrt{\sigma}\} = \bigcup_{k=-1}^{2} e_{\sqrt{\sigma}}^{(k)} \tag{6.48}$$

— это конечный прямоугольный крест — лежащая в круге $|z| \leqslant \sqrt{\sigma}$ часть координатных осей плоскости z.

Ради краткости положим

$$\Phi_k(\lambda;\, \mu,\, \nu) = \{D^{-(\nu-\mu)}\, Y_\mu(z;\lambda)\}_{z=r_k} \tag{6.49}$$

и, введя в рассмотрение функцию от параметра λ

$$\Phi_{\mu,\nu}(\lambda) \equiv \sum_{k=-1}^{2} e^{-i\pi\nu k}\, \Phi_k(\lambda;\, \mu,\, \nu), \tag{6.50}$$

докажем лемму.

Лемма 6.4. *На всей плоскости λ справедливо тождество*

$$\Phi_{\mu,\nu}(\lambda) \equiv 4\sigma^\nu \lambda^2\, E_{1/2}(\sigma^2\lambda^4;\, 1+\nu). \tag{6.51}$$

Доказательство. Из леммы 5.2, в частности, следовала формула (5.4). Заменив в ней переменную z на λz, ее можно записать и в виде

$$\sum_{k=-1}^{2} e^{-i\pi k} E_2\{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-k\right)}\lambda z;\, \nu\} = 4\lambda^2 z^2\, E_{1/2}(\lambda^4 z^4;\, 1+\nu). \tag{6.52}$$

Далее, из формул (6.47) и (6.49) следуют равенства

$$e^{-i\pi\nu k}\,E_2\left(e^{i\frac{\pi}{2}k}\sqrt{z}\,\lambda;\ \nu\right) = z^{1-\nu}\,e^{-i\pi\nu k}\,|D^{-(\nu-\mu)}\,Y_\mu(z;\lambda)|_{z=r_k} =$$

$$= z^{1-\nu}\,e^{-i\pi\nu k}\,\Phi_k(\lambda;\ \mu,\ \nu)\quad (k=-1,\ 0,\ 1,\ 2),$$

откуда и из (6.52) приходим к тождеству (6.51).

(в) Пусть, как и выше, параметры μ и ν подчинены условиям

$$\frac{1}{2}<\mu<1,\quad \mu<\nu<\mu+\frac{1}{2},$$

а λ — произвольный комплексный параметр.

Перейдем, наконец, к постановке нашей краевой задачи.

На кресте комплексной плоскости z

$$e_+\left(\sqrt{z}\right) = \bigcup_{k=-1}^{2}\left\{z: z=re^{i\frac{\pi}{2}k},\ 0\leqslant r\leqslant\sqrt{z}\right\}$$

определить решения $\Psi(z)\in L_2^*(G^\infty)$ *задачи типа Коши*

$$D^{1/2}\,\Psi(z)-\frac{z^{2\mu-2}}{\Gamma\left(\mu-\frac{1}{2}\right)} = \lambda z^{-1}\,\Psi(z),$$

$$z\in e_+\left(\sqrt{z}\right) \qquad (6.53)$$

$$D^{-(\nu-\mu)}\,\Psi(z)|_{z=0}=1,$$

которые на концах $r_k=\sqrt{z}\,e^{i\frac{\pi}{2}k}$ $(k=-1,\ 0,\ 1,\ 2)$ *креста удовлетворяют краевому условию вида*

$$\sum_{k=-1}^{2} e^{-i\pi\nu k}\,|D^{-(\nu-\mu)}\,\Psi(z)|_{z=r_k}=0. \qquad (6.54)$$

Значения параметра λ, для которых поставленная задача имеет нетривиальные решения, естественно называть *собственными числами*, а соответствующие решения $\Psi(z)\equiv\Psi(z;\lambda)$ — *собственными функциями* краевой задачи (6.53)—(6.54).

Теорема 6.3. *Все собственные числа краевой задачи* (6.53)—(6.54) *совпадают с последовательностью комплексных чисел*

$$\{\lambda_j\}_{-\infty}^{+\infty} \equiv \{e^{i\frac{\pi\nu}{4}}\lambda_j\}_{-\infty}^{+\infty},$$

т. е. с множеством всех нулей целой функции $S_\nu^*(z\lambda^2)$, *причем все они простые, за исключением двукратного нуля* $\lambda_0=0$.

Доказательство. Согласно теореме 6.2, для любого значения λ задача типа Коши (6.53) в классе $L_2^*(G^\infty)$ имеет единственное решение

$$\Psi_0(z)\equiv Y_\mu(z;\lambda) = E_2(\lambda z;\ \mu)\,z^{2\mu-1}. \qquad (6.55)$$

Но по лемме 6.4 имеет место тождество

$$\sum_{k=-1}^{2} e^{-i\pi k} [\mathbf{D}^{-(\nu-\mu)} W_0(z)]_{z=r_k} =$$

$$= \Phi_{\mu,\nu}(\lambda) = 4\sigma^{\nu} i^{2} E_{1/2}(\sigma^2\lambda^4; 1+\nu).$$

Поэтому решение задачи (6.53) может удовлетворять также краевому условию (6.54) лишь для значений $\lambda = e^{i\frac{\pi}{4}}\lambda_j$, являющихся нулями целой функции $\Phi_{\mu,\nu}(\lambda) = 4i\sigma^{\nu-1} S_{\nu}^{*}(\sigma\lambda^2)$.

Теорема 6.4. *Краевая задача* (6.53)—(6.54) *на кресте* $e_+[\sqrt{\sigma}]$ *имеет счетную систему собственных функций*

$$[E_2(e^{i\frac{\pi}{4}}\lambda_n z; \mu) z^{2\mu-1}]_{-\infty}^{+\infty}, \quad z \in e_+ [\sqrt{\sigma}], \tag{6.56}$$

и одну присоединенную функцию

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda} E_2(e^{i\frac{\pi}{4}}\lambda z; \mu) z^{2\mu-1}\right\}_{\lambda=\lambda_0=0} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} z^{2\mu}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}, \quad z \in e_+ [\sqrt{\sigma}]. \tag{6.56'}$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 6.4 и теоремы 6.3, если учесть, что все собственные числа нашей краевой задачи — $[e^{i\frac{\pi}{4}}\lambda_j]_{-\infty}^{+\infty}$ — суть простые нули ее характеристической функции $\Phi_{\mu,\nu}(\lambda)$, за исключением только ее двукратного нуля $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0 = 0$.

Двукратный нуль $\lambda_0 = 0$ функции $\Phi_{\mu,\nu}(\lambda)$, являясь двукратным собственным числом краевой задачи (6.53)—(6.54), наряду с собственной функцией

$$E_2(e^{i\frac{\pi}{4}}\lambda_0 z; \mu) z^{2\mu-1} = \frac{z^{2\mu-1}}{\Gamma(\mu)},$$

принадлежащей последовательности (6.56), должен порождать также одну присоединенную функцию. Эта функция, равная

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} z^{2\mu}}{\Gamma(\mu+1/2)}$$

определяется по формуле (6.56'), согласно общепринятой процедуре.

6.4 (а) Рассмотрим теперь значения системы функций (6.56)—(6.56') на отдельных компонентах креста $e_+[\sqrt{\sigma}]$, т. е. на отрезках

$$e_{1,\sigma}^{(k)} = [z: z = re^{i\frac{\pi}{2}k}, \ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{\sigma}] \ (k = -1, 0, 1, 2).$$

Тогда мы приходим к следующей системе четырехкомпонентных вектор-функций на интервале $(0, \sqrt{\sigma})$:

$$[\mathbf{E}_{0,k}^{*}(r), [\mathbf{E}_{n,k}(r)]_{-\infty}^{+\infty}] \ (k = -1, 0, 1, 2), \tag{6.57}$$

где

$$\mathbf{E}^{*}_{0,k}(r)=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma(\mu+1/2)}\quad (re^{i\frac{\pi}{2}k})^{2\mu}, \tag{6.58}$$

$$\mathbf{E}_{n,k}(r)=E_2\left(e^{i\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\lambda_n r;\ \mu\right)(re^{i\frac{\pi}{2}k})^{2\mu-1}\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots).$$

Легко проверить, что система вектор-функций (6.57) с введенной в § 5 системой (5.28) связана соотношениями

$$\mathbf{E}^{*}_{0,k}(r)=\exp\left\{i\pi\left(\mu-\frac{1}{2}\right)k\right\}e^{*}_{0,k}(r^2)\,r,$$

$$(0<r<+\infty) \tag{6.59}$$

$$\mathbf{E}_{n,k}(r)=\exp\left\{i\pi\left(\mu-\frac{1}{2}\right)k\right\}e_{n,k}(r^2)\,r,$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots;\ k=-1,\ 0,\ 1,\ 2),$$

поскольку $e^{*}_{0,-1}(\tau)\equiv e^{*}_{0,3}(\tau)$ и $e_{n,-1}(\tau)\equiv e_{n,3}(\tau)$.

Нам понадобится также эквивалентная форма этих соотношений

$$e^{*}_{0,k}(\tau)=\exp\left\{-i\pi\left(\mu-\frac{1}{2}\right)k\right\}\mathbf{E}^{*}_{0,k}(\tau^{1/2})\,\tau^{-1/2},$$

$$(0<\tau<+\infty) \tag{6.59'}$$

$$e_{n,k}(\tau)=\exp\left\{-i\pi\left(\mu-\frac{1}{2}\right)k\right\}\mathbf{E}_{n,k}(\tau^{1/2})\,\tau^{-1/2},$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots;\ k=-1,0,\ 1,\ 2).$$

Наряду с (6.57) определим также вторую систему вектор-функций

$$\left|\mathbf{F}^{*}_{0,k}(r),\ [\mathbf{F}_{n,k}(r)]^{+\infty}_{-\infty}\right|\ (k=-1,\ 0,\ 1,\ 2), \tag{6.60}$$

положив

$$\mathbf{F}^{*}_{0,k}(r)=2\exp\left\{i\pi\left(\mu-\frac{1}{2}\right)k\right\}\omega^{*}_{0,k}(r^2)\,r,$$

$$(0<r<\sqrt{\sigma}) \tag{6.61}$$

$$\mathbf{F}_{n,k}(r)=2\exp\left\{i\pi\left(\mu-\frac{1}{2}\right)k\right\}\omega_{n,k}(r^2)\,r,$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots;\ k=-1,\ 0,\ 1,\ 2).$$

Здесь $\left|\omega^{*}_{0,k}(\tau),\ [\omega_{n,k}(\tau)]^{+\infty}_{-\infty}\right|$ — система вектор-функций из § 5 — была определена формулами (5.30)—(5.31), причем вновь будем иметь $\omega^{*}_{0,-1}(\tau)\equiv\omega^{*}_{0,3}(\tau)$ и $\omega_{n,-1}(\tau)\equiv\omega_{n,3}(\tau)$.

Соотношения (6.61) могут быть записаны также в виде

$$\omega^{*}_{0,k}(\tau)=\frac{1}{2}\exp\left\{-i\pi\left(\mu-\frac{1}{2}\right)k\right\}\mathbf{F}^{*}_{0,k}(\tau^{1/2})\,\tau^{-1/2},$$

$$(0<\tau<\sigma) \tag{6.61'}$$

$$\omega_{n,k}(\tau) = \frac{1}{2}\exp\left\{-i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)k\right\} F_{n,k}(\tau^{1/2})\,\tau^{-1/2}$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots;\ k=-1,\ 0,\ 1,\ 2).$$

(б) Условимся относить функцию $\rho(r)$, $r\in(0,\sqrt{\sigma})$ к классу $L_2^*(0,\sqrt{\sigma})$, если $\rho(r)\,r^{-1/2}\in L_2(0,\sqrt{\sigma})$.

Введем, далее, в рассмотрение пространство $\mathbf{L}_2^*(0,\sqrt{\sigma})$ вектор-функций

$$\psi(r)=\{\psi_k(r)\}_{-1}^{2},\ \psi_k(r)\in L_2^*(0,\sqrt{\sigma})\ (k=-1,\ 0,\ 1,2),$$

с нормой

$$\|\psi\|_* = \left(\sum_{k=-1}^{2}\int_0^{\sqrt{\sigma}}|\psi_k(r)|^2\,r^{-1}\,dr\right)^{1/2} < +\infty.$$

Далее, для любой пары вектор-функций

$$Y(r)=\{Y_k(r)\}_{-1}^{2}\ \text{и}\ Z(r)=\{Z_k(r)\}_{-1}^{2}$$

из пространства $\mathbf{L}_2^*(0,\sqrt{\sigma})$ определим их скалярное произведение

$$[Y,\ Z]_* = \sum_{k=-1}^{2}\int_0^{\sqrt{\sigma}} Y_k(r)\,\overline{Z_k(r)}\,r^{-1}\,dr, \tag{6.62}$$

заметив, что тогда

$$\|\psi\|_* = [\psi,\ \psi]_*^{1/2} > 0.$$

Наконец, для определенных выше систем вектор-функций (6.57) и (6.60), как обычно, введем более краткие обозначения

$$\mathbf{E}_0^*(r)=\{E_{0,k}^*(r)\}_{-1}^{2},\ \mathbf{E}_n(r)=\{E_{n,k}(r)\}_{-1}^{2}, \tag{6.57'}$$

$$\mathbf{F}_0^*(r)=\{F_{0,k}^*(r)\}_{-1}^{2},\ \mathbf{F}_n(r)=\{F_{n,k}(r)\}_{-1}^{2}. \tag{6.60'}$$

Тогда справедлива

Теорема 6.5. *Системы вектор-функций* (6.57′) *и* (6.60′) *биортогональны в метрике* (6.62). *Иными словами, будем иметь*

$$[\mathbf{E}_0^*,\ \mathbf{F}_0^*]_*=1,\ [\mathbf{E}_0^*,\ \mathbf{F}_m]_*=[\mathbf{E}_n,\ \mathbf{F}_0^*]_*=0,$$

$$[\mathbf{E}_n,\ \mathbf{F}_m]_*=\delta_{nm}\ (n,\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots). \tag{6.63}$$

Доказательство формулы (6.63) непосредственно следует из утверждений (5.35)—(5.38) теоремы 5.1, если принять во внимание определения (6.59) и (6.60) наших систем (6.57′)—(6.60′) вектор-функций. Например, мы будем иметь

$$[\mathbf{E}_n,\ \mathbf{F}_m]_* = \sum_{k=-1}^{2}\int_0^{\sqrt{\sigma}} E_{n,k}(r)\,\overline{F_{m,k}(r)}\,r^{-1}\,dr =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} 2\int_0^{\sqrt{\sigma}} e_{n,k}(r^2)\,\overline{\omega_{m,k}(r^2)}\,r\,dr =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\sigma} e_{n,k}(\tau)\, \overline{\omega_{m,k}(\tau)}\, d\tau = [e_n, \omega_m] = \delta_{nm}$$

$$(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Аналогично получим и остальные формулы (6.63) теоремы.

6.5 (а) В заключение установим один из основных результатов данной работы—теорему о базисности вектор-системы собственных и присоединенных функций нашей краевой задачи.

Теорема 6.6. *Пусть* $|\mathbf{E}_0^*(r), [\mathbf{E}_n(r)]_{-\infty}^{+\infty}|$ *— система собственных и присоединенных вектор-функций краевой задачи* (6.53) — (6.54).

1°. *Тогда любая вектор-функция*

$$\psi(r) = |\psi_k(r)|_{-1}^{2} \in \mathbf{L}_2^*(0, \sqrt{\sigma})$$

разлагается в вектор-ряд

$$\psi(r) = [\psi, \mathbf{F}_0^*]_* \mathbf{E}_0^*(r) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\psi, \mathbf{F}_n]_* \mathbf{E}_n(r) \qquad (6.64)$$

$$r \in (0, \sqrt{\sigma}),$$

сходящийся в метрике $\mathbf{L}_2^*(0, \sqrt{\sigma})$.

2°. *Справедливы двойные неравенства*

$$\|\psi\|_* \asymp \left\{ |[\psi, \mathbf{F}_0^*]_*|^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+|n|)^{2(1-\mu)} |[\psi, \mathbf{F}_n]_*|^2 \right\}^{1/2}. \qquad (6.65)$$

Доказательство. Перейдем от вектор-функции $\psi(r) = |\psi_k(r)|_{-1}^{2}$ к вектор-функции $\varphi(\tau) = |\varphi_k(\tau)|_0^3$, положив для $k = 0, 1, 2, 3$

$$\varphi_k(\tau) = \exp\left\{ -i\pi\left(\mu - \frac{1}{2}\right) k \right\} \psi_{k-1}(\tau^{1/2})\, \tau^{-1/2} \quad (0 < \tau < \sigma). \qquad (6.66)$$

Поскольку

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\sigma} |\varphi_k(\tau)|^2\, d\tau = 2 \sum_{k=-1}^{2} \int_0^{\sqrt{\sigma}} |\psi_k(r)|^2\, r^{-1}\, dr = 2\|\psi\|_*^2 < +\infty, \qquad (6.67)$$

то вектор-функция $\varphi(\tau) \in \mathbf{L}_2(0, \sigma)$.

Далее, воспользовавшись формулами (6.66) и (6.61′), получим

$$[\varphi, \omega_0^*] = \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\sigma} \varphi_k(\tau)\, \overline{\omega_{0,k}^*(\tau)}\, d\tau = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2} \int_0^{\sigma} \psi_{k-1}(\tau^{1/2})\, \overline{\mathbf{F}_{0,k-1}^*(\tau^{1/2})}\, \tau^{-1} d\tau =$$

$$= \sum_{k=-1}^{2} \int_0^{\sqrt{\sigma}} \psi_k(r)\, \overline{\mathbf{F}_{0,k}^*(r)}\, r^{-1}\, dr = [\psi, \mathbf{F}_0^*]_*, \qquad (6.68)$$

а также для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$[\varphi, \omega_n] = \sum_{k=0}^{3} \int_0^{\sigma} \varphi_k(\tau)\, \overline{\omega_{n,k}(\tau)}\, d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2} \int_0^{\sigma} \psi_{k-1}(\tau^{1/2})\, \overline{F_{n,k-1}(\tau^{1/2})}\, \tau^{-1}\, d\tau =$$

$$= \sum_{k=-1}^{2} \int_0^{\sqrt{\sigma}} \psi_k(r)\, \overline{F_{n,k}(r)}\, r^{-1}\, dr = [\psi, F_n]_*. \qquad (6.68')$$

Но, согласно теореме 5.3, вектор-функция $\varphi(\tau) = \{\varphi_k(\tau)\}_0^3$ разлагается в вектор-ряд

$$\varphi(\tau) = [\varphi, \omega_0^*]\, e_0^*(\tau) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\varphi, \omega_n]\, e_n(\tau), \quad \tau \in (0, \sigma), \qquad (6.69)$$

сходящийся в метрике $L_2(0, \sigma)$, причем имеет место двойная оценка

$$\|\varphi\| \asymp \left\{ \|[\varphi, \omega_0^*]\|^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+|n|)^{(1-m)/2} |[\varphi, \omega_n]|^2 \right\}^{1/2}, \qquad (6.70)$$

где $\omega = 4\mu - 3$.

Принимая теперь во внимание определения (6.59′) и (6.66) вектор-функций системы $\{e_0^*(\tau), [e_n(\tau)]_{-\infty}^{+\infty}\}$ и вектор-функции $\varphi(\tau)$, учитывая также формулы (6.68)—(6.68′), перейдем от вектор-ряда к его компонентам. В результате получим разложения

$$\exp\left\{-i\pi\left(\mu - \frac{1}{2}\right)k\right\} \psi_{k-1}(\tau^{1/2})\, \tau^{-1/2} =$$

$$= \exp\left\{-i\pi\left(\mu - \frac{1}{2}\right)k\right\} \left\{ [\psi, F_0^*]_*\, E_{0,k}^*(\tau^{1/2}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\psi, F_n]_*\, E_{n,k}(\tau^{1/2}) \right\} \tau^{-1/2}, \quad \tau \in (0, \sigma),$$

$$(k = 0, 1, 2, 3). \qquad (6.69')$$

Сократив обе части разложения (6.69′) на $\exp\left\{-i\pi\left(\mu - \frac{1}{2}\right)k\right\} \tau^{-1/2}$ и заменив в нем $\tau = r^2$, мы придем к скалярному виду вектор-ряда (6.64) теоремы.

Что же касается двойного неравенства (6.65) теоремы, то оно непосредственно следует из (6.70) и формул (6.68) —(6.68′). Из тех же неравенств вытекает также сходимость вектор-ряда (6.64) в метрике $L_2^*(0, \sqrt{\sigma})$.

В самом деле, положив

$$S(r; N_1, N_2) = [\psi, F_0^*]_*\, E_0^*(r) + \sum_{n=-N_1}^{N_2} [\psi, F_n]_*\, E_n(r),$$

$$1 \leqslant N_1,\ N_2 < +\infty,$$

согласно (6.65), будем иметь

$$\|\psi - S(r;\ N_1,\ N_2)\|_* \asymp \Big(\sum_{\substack{n<-1-N_1\\ n>1+N_2}} (1+|n|)^{2(\mu-1)} |[\psi,\ \mathbf{F}_n]_*|^2\Big)^{1/2}.$$

Отсюда, переходом к пределу при $N_1,\ N_2 \to +\infty$, следует наше утверждение.

Итак теорема полностью доказана.

(б) В заключение параграфа, и вообще данной статьи, приведем некоторые дополнительные замечания.

1°. От биортогональных в метрике $\mathbf{L}_2^{\cdot}(0,\ i\sqrt{\sigma})$ вектор-систем (6.57′) и (6.60′) можно перейти к биортогональным в той же метрике вектор-системам

$$\{\bar{\mathbf{E}}_0^{\cdot}(r),\ [\bar{\mathbf{E}}_n(r)]_{-\infty}^{+\infty}\} \text{ и } \{\bar{\mathbf{F}}_0^{\cdot}(r),\ [\bar{\mathbf{F}}_n(r)]_{-\infty}^{+\infty}\}, \tag{6.71}$$

положив для $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots$

$$\bar{\mathbf{E}}_0^{\cdot}(r) = \mathbf{E}_0^{\cdot}(r),\ \bar{\mathbf{E}}_n(r) = (1+|n|)^{\mu-1}\mathbf{E}_n(r),$$
$$\bar{\mathbf{F}}_0^{\cdot}(r) = \mathbf{F}_0^{\cdot}(r),\ \bar{\mathbf{F}}_n(r) = (1+|n|)^{1-\mu}\mathbf{F}_n(r). \tag{6.71′}$$

Поэтому из теоремы 6.6 вытекает также

Теорема 6.6′. *Биортогональные системы* (6.71) *образуют базис Рисса в пространстве вектор-функций* $\mathbf{L}_2^{\cdot}(0,\ \sqrt{\sigma})$.

В самом деле, для первой из двух вектор-систем (6.71) наше утверждение просто эквивалентно теореме 6.6.

Вторая же система (6.71) будет такой же на основании общих положений теории базисов Рисса.

2°. В теореме 6.4 был дан явный вид системы собственных и присоединенных функций краевой задачи (6.53)—(6.54) на всем кресте $e_+(\sqrt{\sigma})$ комплексной плоскости z.

Эта система может быть записана в виде

$$\{\mathbf{E}_0^{\cdot}(z),\ [\mathbf{E}_n(z)]_{-\infty}^{+\infty}\},\ z \in e_+(\sqrt{\sigma}), \tag{6.72}$$

где

$$\mathbf{E}_0^{\cdot}(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} z^{2\mu}}{\Gamma(\mu+1/2)},$$

$$\mathbf{E}_n(z) = E_2(e^{i\frac{\pi}{4}}\lambda_n z;\ \mu)\, z^{2\mu-1} \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots).$$

Можно доказать существование и записать в явном виде и вторую систему

$$\{\mathbf{F}_0^{\cdot}(z),\ [\mathbf{F}_n(z)]_{-\infty}^{+\infty}\},\ z \in e_+(\sqrt{\sigma}), \tag{6.73}$$

биортогональную с первой системой на всем кресте $e_+(\sqrt{\sigma})$ плоскости z; при этом она принадлежит классу

$$\int_{e_+(\sqrt{\sigma})} |\mathbf{F}(z)|^2\, |z|\, |dz| < +\infty,$$

а первая — классу

$$\int_{e_+\{\sqrt{\sigma}\}} |\mathbf{E}(z)|^2 |z|^{-1} |dz| < +\infty.$$

Что касается самих соотношений биортогональности на кресте $e_+\{\sqrt{\sigma}\}$, то они запишутся в обычном виде, а именно

$$\int_{e_+\{\sqrt{\sigma}\}} \mathbf{E}_0^*(z)\overline{\mathbf{F}_0^*(z)}\,|dz| = 1,$$

$$\int_{e_+\{\sqrt{\sigma}\}} \mathbf{E}_0^*(z)\overline{\mathbf{F}_m(z)}\,|dz| = \int_{e_+\{\sqrt{\sigma}\}} \mathbf{E}_n(z)\overline{\mathbf{F}_0^*(z)}\,|dz| = 0, \tag{6.74}$$

$$\int_{e_+\{\sqrt{\sigma}\}} \mathbf{E}_n(z)\overline{\mathbf{F}_m(z)}\,|dz| = \delta_{nm},$$

$$(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Ввиду приведенных замечаний теорема 6.6 может быть сформулирована также как теорема разложения функций $\psi(z)$, $z \in e_+\{\sqrt{\sigma}\}$, из класса

$$L_2^*[e_+\{\sqrt{\sigma}\}]: \|\psi(z)\|_* = \left(\int_{e_+\{\sqrt{\sigma}\}} |\psi(z)|^2 |z|^{-1} |dz|\right)^{1/2} < +\infty \tag{6.75}$$

на кресте $e_+\{\sqrt{\sigma}\}$. Поэтому справедлива

Теорема 6.7. *Пусть $\psi(z)$ — любая функция из класса $L_2^*[e_+\{\sqrt{\sigma}\}]$.*

1°. *Тогда имеет место следующее разложение по собственным и присоединенным функциям краевой задачи* (6.53)—(6.54):

$$\psi(z) = c_0^* \mathbf{E}_0^*(z) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{E}_n(z), \quad z \in e_+\{\sqrt{\sigma}\}, \tag{6.76}$$

где

$$c_0^* = \int_{e_+\{\sqrt{\sigma}\}} \psi(z)\overline{\mathbf{F}_0^*(z)}\,|dz|, \quad c_n = \int_{e_+\{\sqrt{\sigma}\}} \psi(z)\overline{\mathbf{F}_n(z)}\,|dz| \tag{6.77}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

2°. *Это разложение сходится в метрике $L_2^*[e_+\{\sqrt{\sigma}\}]$, причем справедливо двойное неравенство*

$$\|\psi(z)\|_* \asymp \left\{|c_0^*|^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+|n|)^{2(1-\mu)} |c_n|^2\right\}^{1/2}. \tag{6.78}$$

3.° На основании общих результатов автора по гармоническому анализу в комплексной области вообще, и по теории параметрических представлений целых функций конечного роста, в частности (см. [1], гл. VI), мож-

но существенно обобщить все содержащиеся в данной работе результаты.

А именно, можно дать конструктивное построение биортогональных на данном отрезке вектор-систем любой четной или нечетной размерности, связывая их со специальными краевыми задачами для интегро-дифференциальных операторов дробных порядков, и установить теоремы разложения-базисности по этим системам.

Институт математики АН Армянской ССР
и Ереванский государственный университет .

Поступила 28.XI.1983

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Ինտերպոլյացիոն և սպեկտրալ վերլուծություններ՝ առնչված կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների հետ *(ամփոփում)*

Ներկա հետազոտությունում $L_2(0, \pi)$-ից կոմպոնենտներով 4-չափանի վեկտոր-ֆունկցիաների տարածության համար կառուցվում են բացահայտ տեսքով գրված բիորթոգոնալ բազիսային համակարգեր՝ $L_2(0, \pi)$-ում Ֆուրյեի երկչափ բազիսային համակարգի խորը անալոգներ։

Կառուցված համակարգերը միաժամանակ հանդիսանում են կոմպլեքս տիրույթում $\pm 1/2$ կարգի սոդելային դիֆերենցիալ հավասարման համար եզրային խնդրի սեփական ու միակցված ֆունկցիաներ և արտահայտվում են Միտագ-Լեֆլերի տիպի

$$E_2(z;\ \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/2)}$$

2-րդ կարգի ամբողջ ֆունկցիայի միջոցով։

Այդ համակարգերի բազիսությունն ապացուցվում է $\rho = 1$ և $\rho = 2$ կարգի ամբողջ ֆունկցիաները հատուկ ինտերպոլյացիոն շարքերի վերլուծելու միջոցով։ Այդ ձևերեմների ապացույցները էապես հենվում են հեղինակի կողմից վաղորոք զարգացված կոմպլեքս տիրույթում հարմոնիկ անալիզի ավարտուն տեսության վրա [1]։

M. M. DJRBASHIAN. *Interpolating and spectral expansions associated with differential operators of fractional order* (summary)

In this research we construct biorthogonal bases for the space of 4-component vector-functions with components in $L^2(0, \pi)$, which are deep analogues of Fourier system in $L^2(0, \pi)$.

These systems are simultaneously the eigenfunctions and adjoint vectors for the boundary value problem for a differential equation of order 1/2 in complex domain and are expressed by means of Mittag—Leffler type function

$$E_2(z;\ \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/2)}$$

of second order. Basisness of these systems is proved by expanding special interpolating series of entire functions of orders $\rho = 1$ and $\rho = 2$. These proofs are essentially based on the complete theory of harmonic analysis in complex domain developed by the author earlier [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М. «Наука» (1966).
2. *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л. (1948).
3. *Б. Я. Левин.* О базисах из показательных функций в L_2 $(-\pi, \pi)$. Записки физ.-мат. фак-та Харьковского гос. ун-та и Харьковск. матем. об-ва, 27. сер. 4 (1961), 39—48.

4. *Б. Я. Левин.* Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа. Сб. «Математическая физики и функциональный анализ», ФТИНТ АН УССР, вып. I. Харьков (1969), 136—146.
5. *В. Д. Головин.* О биортогональных разложениях в L^2 по линейным комбинациям показательных функций, Записки мех.-мат. фак-та Харьковского гос. ун-та и Харьковск. матем. об-ва, 30, сер. 4. (1964), 18—29.
6. *Б. Я. Левин. Ю. И. Любарский.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент, Изв. АН СССР, сер. матем., 39, № 3 (1975), 657—702.
7. *И. Ц. Гохберг. М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука» (1965).
8. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян.* Разложения по некоторым биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, Труды ММО, т. 10 (1961), 89—179.
9. *М. М. Джрбашян. С. Г. Рафаэлян.* О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L_p, ДАН Армянской ССР, т. 53, № 1 (1981), 29—36.
10. *С. Г. Рафаэлян.* Об одном классе целых функций конечного роста, ДАН Армянской ССР, т. 50, № 2 (1980), 65—71.
11. *С. Г. Рафаэлян.* О базисности некоторых систем целых функций, ДАН Армянской ССР, т. 50, № 4 (1980), 198—204.
12. *С. Г. Рафаэлян.* Некоторые вопросы интерполяции в комплексной области и дискретного гармонического анализа (кандидатская диссертация), Ереван (1981).
13. *М. М. Джрбашян.* Базисность биортогональных систем, порожденных краевыми задачами для дифференциальных операторов дробного порядка, ДАН СССР, т. 261, № 5 (1981).
14. *G. Polya.* Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen, Math. Zeitschr., v. 2 (1918), 352—383.
15. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М., «Наука» (1974).
16. *Е. Титчмарш.* Теория функций, М., «Наука» (1980).
17. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, т. 2, М., «Наука» (1968).
18. *М. М. Джрбашян. А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. матем. журнал, т. 1, № 3 (1960), 383—426.
19. *С. А. Акопян.* Теорема о двух постоянных для класса H_p, Изв. АН Армянской ССР, «Математика», II, № 2 (1967), 123—127.
20. *А. М. Седлецкий.* Эквивалентное определение пространств H_p в полуплоскости и некоторые приложения, Матем. сборник, 96 (138), № 1 (1975), 75—82.
21. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Армянской ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6 (1978), 490—531.
22. *В. М. Мартиросян.* Новое доказательство теоремы М. М. Джрбашяна о параметрическом представлении общих классов целых функций конечного порядка, Изв. АН Армянской ССР, «Математика», XIX, № 1 (1984), 44—74.
23. *И. М. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., «Мир» (1973).
24. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат (1956).