ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 1, 1984 Математика

УДК 517.547

В. М. МАРТИРОСЯН

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ М. М. ДЖРБАШЯНА О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБЩИХ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Введение

0.1 (а) В своей работе [1] М. М. Джрбашян заложил основы большого цикла исследований по теории гармонического анализа в собственно комплексной области. Он построил стройный аппарат интегральных преобразований в классах L_2^{ω} на произвольной конечной системе лучей, исходящих из начала координат, ассоциированных с функциями e^z и $E_\rho(z;\mu)$, где

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n/\rho)}\left(\rho>\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}\right)$$

—целая функция типа Миттаг—Леффлера порядка ρ и типа 1. Полученные до 1965 г. результаты в этом направлении были подытожены в его монографии [2].

Эти исследования по гармоническому анализу позволили ему установить результаты завершенного характера о представлении целых функций, квадрат модуля которых интегрируем с весом $|z|^{\omega}$ $(-1<\omega<1)$ по лучам, исходящим из одной точки комплексной плоскости. Был получен ряд теорем о параметрическом представлении широких классов целых функций конечного порядка $\rho>1/2$ и нормального типа $\leqslant\sigma$. Эти теоремы М. М. Джрбашяна явились существенно новыми и глубокими аналогами классической теоремы Винера-Пэли [3] о параметрическом представлении класса $W(\sigma)$ целых функций экспоненциального типа $\leqslant\sigma$ из $L_2(-\infty,+\infty)$.

Чтобы сформулировать установленную им общую теорему, введем необходимые обозначения и определения.

(б) Пусть $\rho>1/2$— произвольное, но фиксированное число, а $[2\rho]$— целая часть числа 2ρ. Будем предполагать, что целое число $\varkappa=\varkappa(\rho)\geqslant 0$ удовлетворяет условию

$$\varkappa\geqslant[2\rho]-1. \tag{0.1}$$

Пусть, далее, совокупность чисел $\{\vartheta_0,\cdots,\vartheta_{\varkappa+1}\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$-\pi<\vartheta_0<\cdots<\vartheta_\varkappa\leqslant\pi<\vartheta_{\varkappa+1}=\vartheta_0+2\pi, \tag{0.2}$$

$$\max_{0<k<\varkappa}\{\vartheta_{k+1}-\vartheta_k\}=\frac{\pi}{\rho}. \tag{0.3}$$

Из этой совокупности чисел образуем последовательность пар

$$\{(\vartheta_0, \vartheta_1), \cdots, (\vartheta_\varkappa, \vartheta_{\varkappa+1})\}. \tag{0.4}$$

Затем, сохраняя порядок их взаимного следования, выделим из (0.4) все те пары $\{(\vartheta_{r_k}, \vartheta_{r_k+1})\}_0^N$, для которых выполняется равенство

$$\vartheta_{r_k+1} - \vartheta_{r_k} = \frac{\pi}{\rho} \ (k=0, \cdots, N \leqslant \varkappa). \tag{0.5}$$

При этом, если $N < \varkappa$, то оставшиеся после этого пары из (0.4) обозначим через $(\vartheta_{s_k}, \vartheta_{s_k+1})(k=1, \cdots, q=\varkappa - N)$, опять сохраняя порядок их взаимного следования. Таким образом, для таких пар

$$\vartheta_{s_k+1} - \vartheta_{s_k} < \frac{\pi}{\rho} \ (k=1, \cdots, \varkappa - N). \tag{0.6}$$

Обозначим еще

$$\theta_k = \frac{1}{2} \{\vartheta_{r_k} + \vartheta_{r_k+1}\} \ (k=0, \cdots, N). \tag{0.7}$$

С последовательностью $\{\vartheta_0, \cdots, \vartheta_{\varkappa+1}\}$ ассоциируем класс $A_\sigma^\rho(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$ целых функций $f(z)$ порядка ρ $(1/2 \leqslant \rho < +\infty)$ и типа $\leqslant \sigma$ $(0 \leqslant \leqslant \sigma < +\infty)$, таких, что индикатриса

$$h(\varphi; f) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r^\rho} \tag{0.8}$$

удовлетворяет оценкам

$$h(-\theta_k; f) \leqslant \sigma_k \ (0 \leqslant \sigma_k \leqslant \sigma; \ k = 0, \cdots, N). \tag{0.9}$$

Наконец, обозначим через $W_\sigma^{(\rho)}(\omega; \{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})(-1 < \omega < 1)$ (см. [2], стр. 365) класс тех функций $f(z) \in A_\sigma^{(\rho)}(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$, которые удовлетворяют условиям

$$\int_0^{+\infty} |f(te^{-i\theta_k})|^2 t^\omega \, dt < +\infty \ (k=0, \cdots, \varkappa). \tag{0.10}$$

Следующая общая теорема содержит в себе вышеуказанную теорему Винера—Пэли (см. [4, 1, 5, 2]) в случае, когда $\rho = 1$, $\omega = 0$ $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_1 = \pi$.

Теорема 0.1 (М. М. Джрбашян [2]) *Класс* $W_\sigma^{(\rho)}(\omega; \{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\}$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *допускающих представление*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} \int_0^{\sigma_k} E_\rho(e^{i\theta_k} z\tau^{1/\rho}; \mu) \, \varphi_k(\tau) \, \tau^{\mu-1} \, d\tau, \tag{0.11}$$

где $\mu = \dfrac{1+\omega+\rho}{2\rho}$ *и* $\varphi_k(\tau) \in L_2(0, \sigma_k)(k=0, \cdots, N)$. *Функции* $\varphi_k(\tau)$ $(k = 0, \cdots, N)$ *единственным образом почти всюду определяются из формул*

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi\rho}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\Phi_{r_{k+1}}(-\tau)-e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\Phi_{r_k}(\tau)\right\}=\widetilde{\Phi}_k(\tau)=$$

$$=\begin{cases}\varphi_k(\tau), & \tau\in(0,\sigma_k),\\ 0, & \tau\in(\sigma_k,+\infty),\end{cases}\quad (k=0,\cdots,N), \tag{0.12}$$

где почти всюду на полуоси $(0,+\infty)$

$$\Phi_k(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\tau}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}f\left(e^{-i\theta_k}t^{1/\rho}\right)t^{\mu-1}\,dt\ (k=0,\cdots,\varkappa). \tag{0.13}$$

(в). При установлении этой теоремы важную роль играют обобщенные преобразования Бореля, общая теория которых развита в гл. VI монографии [2]. Напомним (см. [2], стр. 323—324), что для произвольной целой функции $f(z)$ роста $(\rho;\ \sigma)$ (т. е. порядка $\widetilde{\rho}<\rho$, либо порядка $\widetilde{\rho}=\rho$ и типа $\widetilde{\sigma}\leqslant\sigma$) ее обобщенное преобразование Бореля задается разложением

$$g_{\rho,\mu}(\zeta;\ f)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k(\mu)}{\zeta^{k+1}}\ (\operatorname{Re}\mu>0), \tag{0.14}$$

где $b_k(\mu)$ определяются из представления функции $f(z)$ рядом Тейлора, записанного в виде

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k(\mu)}{\Gamma(\mu+k/\rho)}z^k. \tag{0.15}$$

При этом справедливы следующие утверждения (см. [2], стр. 323—324):

1) Если $\widetilde{\rho}=\rho$ (тогда, очевидно, $\widetilde{\sigma}\leqslant\sigma$), то функция $g_{\rho,\mu}(\zeta;\ f)$ голоморфна в области $|\zeta|>\widetilde{\sigma}^{1/\rho}$ и имеет хотя бы одну особую точку на окружности $|\zeta|=\widetilde{\sigma}^{1/\rho}$.

2) Если $\widetilde{\rho}<\rho$, то функция $g_{\rho,\mu}(\zeta;\ f)$ голоморфна на всей плоскости ζ, кроме точки $\zeta=0$.

(г) Опишем в общих чертах предложенный М. М. Джрбашяном метод установления представления (0.11)—(0.13).

С функцией $f(z)\in W_\sigma^{(\rho)}(\omega;\ \{\theta_k\};\ \{\sigma_k\})$ ассоциируется ее обобщенное преобразование Бореля $g_{\rho,\mu}(\zeta;\ f)$ и доказывается, что все особенности этой функции лежат на системе отрезков $l_k=\{\zeta\colon \operatorname{Arg}\zeta=\theta_k,\ 0\leqslant|\zeta|\leqslant\sigma_k^{1/\rho}\}$ $(k=0,\cdots,N)$. Затем строится специальное семейство замкнутых жордановых кривых $\Gamma_\rho(\nu;\ R)$ $(\nu>0,\ R>\sigma)$, содержащих внутри себя систему отрезков $\{l_k\}_0^N$ и при $\nu\to+0$ стягивающихся к этой системе. Далее, на основании общих свойств обобщенного преобразования Бореля функция $f(z)$ представляется в виде

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho(\nu;R)}E_\rho(z\zeta;\ \mu)\,g_{\rho,\mu}(\zeta;\ f)\,d\zeta,\ z\in\mathbb{C}.$$

Наконец, в этой формуле совершается предельный переход при $\nu \to +0$ что приводит к формуле представления (0.11) и к формулам обращения (0.12)—(0.13).

(д) Анализ доказательства теоремы 0.1 показывает, (см. [2], гл. VI), что этот же метод можно применить и доказать формулы представления (0.11)—(0.13) для функций из более общих классов $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$, где $1 < p < 2$, $-1 < \omega < p-1$. Это класс тех функций $f(z) \in A^{(\rho)}_{\sigma}(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$, которые вместо (0.10) удовлетворяют условиям

$$\int_0^{+\infty} |f(te^{-i\vartheta_k})|^p t^\omega dt < +\infty \quad (k=0,\cdots,\varkappa). \tag{0.16}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 0.1′. *Каждая функция* $f(z) \in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$ *допускает представление* (0.11), *где* $\mu = \dfrac{1+\omega+(p-1)\rho}{p\rho}$, *а функции* $\varphi_k(\tau) \in L_q(0, \sigma_k)(k=0,\cdots,N)$, $1/p+1/q=1$, *почти всюду определяются из формул* (0.12)—(0.13).

Именно описанным выше методом М. М. Джрбашяном и И. О. Хачатряном были установлены (но не опубликованы) специальные типичные случаи сформулированной теоремы. А. Е. Аветисяном было дано для них другое доказательство (см. [6], теоремы 3.1 и 3.2), опирающееся на использовании интегральных представлений классов $H^\omega_p[\Delta]$, аналитических в угловых областях, и свойств обобщенного преобразования Бореля.

Отметим, что теорема 0.1′ содержит в себе установленную независимо М. Планшерелем и Г. Пойа [7] и Р. П. Боасом [8] теорему типа Винера—Пэли для классов целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ из $L_p(-\infty, +\infty)$ $(1 < p \leqslant 2)$.

0.2 (а) В данной работе предлагается новый подход к установлению теоремы 0.1′, основанный на редуцировании задачи представления функций из классов $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$ к исследованию интегралов типа Коши. Кратко это можно описать следующим образом.

Пусть $\rho > 1/2$ (тогда $\varkappa \geqslant 1$) и

$$\Delta_k = \{z: -\vartheta_{k+1} < \operatorname{Arg} z < -\vartheta_k,\ 0 < |z| < +\infty\} \quad (k=0,\cdots,\varkappa)$$

— угловая область раствора $\vartheta_{k+1} - \vartheta_k \leqslant \pi/\rho$, а $\Delta^*_k = C \setminus \bar{\Delta}_k$ — дополнительная к $\bar{\Delta}_k$ угловая область. Обозначим через $\partial\Delta^*_k$ пробегаемую в положительном направлении границу области Δ^*_k.

Для функции $f(z) \in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}(\{\vartheta_k\}; \{\sigma_k\})$ устанавливается сначала, что почти всюду на объединении системы лучей $\operatorname{Arg}\zeta = -\vartheta_k$ $(k=0,\cdots,\varkappa)$ она представима в виде

$$f(\zeta) = F_0(\zeta) + \cdots + F_\varkappa(\zeta), \tag{0.17}$$

где $F_k(\zeta)$ — некасательные граничные значения на $\partial\Delta^*_k$ интеграла типа Коши

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_k^*}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\Delta_k^*\,(k=0,\cdots,\varkappa).\tag{0.18}$$

Затем на основании формулы М. М. Джрбашяна представления ядра Коши (см. [2], стр. 149) и общих свойств обобщенного преобразования Бореля ([2], теорема 6.5) устанавливаются следующие свойства интегралов типа Коши (0.18). Когда $F_k(z)$ соответствует паре вида $(\vartheta_{s_k}, \vartheta_{s_k+1})$, $F_k(z)\equiv 0$; если же $F_k(z)$ соответствует паре вида $(\vartheta_{r_k}, \vartheta_{r_k+1})$, то она представима в виде

$$F_k(z)=\int\limits_0^{\sigma_k}E_\rho\left(e^{i\theta_k}z\tau^{1/\rho};\ \mu\right)\varphi_k(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\ (k=0,\cdots,N),\tag{0.19}$$

где функции $\varphi_k(\tau)\in L_q(0,\sigma_k)(k=0,\cdots,N)$ определяются из формул (0.12)—(0.13) (см. теорему 3.1). Подстановка значений функций $F_k(z)$ в (0.17) приводит к формулам (0.11)—(0.13), когда $\rho>1/2$. Случай $\rho=1/2$ легко сводится к случаю $\rho=1$.

(б) Данная работа состоит из трех параграфов.

§ 1 носит предварительный характер. Здесь приведены некоторые известные результаты о функциях из классов H_p в полуплоскости и из классов $H_p^\omega[\Delta]$, где Δ — угловая область с вершиной в начале координат.

$H_p^\omega[\Delta]$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$— это класс голоморфных в Δ функций $F(z)$, удовлетворяющих условию

$$\|F;\ \Delta\|_{p,\omega}=\sup_{\Gamma(\varphi)\subset\Delta}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^p\,r^\omega\,dr\right\}^{1/p}<+\infty,\tag{0.20}$$

где $\Gamma(\varphi)$—это луч $\operatorname{Arg}\zeta=\varphi$.

Отметим, что классы $H_2^\omega[\Delta]$ были введены М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном и ими были установлены параметрические представления этих классов [9] (см. также [2], гл. VII). Классы $H_p^\omega[\Delta](1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$ были рассмотрены автором в связи с вопросами полноты и базисности некоторых биортогональных систем, описания их замыканий, а также задачи кратной интерполяции в этих классах [10]. А. Е. Аветисяном [6] установлены интегральные представления классов $H_p^\omega[\Delta](1<p\leqslant 2,\ -1<\omega<p-1)$ и даны их приложения к распространению интегральных преобразований М. М. Джрбашяна в классах L_p^ω $(1<p\leqslant 2,\ -1<\omega<p-1)$ на системе лучей.

В § 2 рассматриваются весьма общие классы функций, заданных на множествах M, состоящих из конечного числа лучей и угловых областей с общей вершиной в начале координат. При этом предполагается, что всевозможные попарные пересечения замыканий угловых областей и лучей, компонент множества M, содержат единственную точку $z=0$.

На таком множестве M определяется класс $H_p^\omega[M]$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$. Этот класс состоит из функций $F(z)$, голоморфных

в углах-компонентах множества M, измеримых на его лучах-компонентах и таких, что

$$\|F; M\|_{p,\omega}=\sup_{\Gamma(\varphi)\subset M}\left\{\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^p r^{\omega}\,dr\right\}^{1/p}<+\infty. \tag{0.21}$$

Из определения множества M следует, что $\mathbf{C}\setminus\overline{M}$ состоит из конечного числа угловых областей Δ_k $(k=0,\cdots,\varkappa)$. Угловую область $\mathbf{C}\setminus\overline{\Delta}_k$ обозначим через Δ_k^*. Основной результат параграфа—это теорема 2.2, которая является теоремой типа М. Рисса о проектировании из L_p в H_p (см., напр., [11], стр. 215). В ней устанавливается, что

пространство $H_p^{\omega}[M]$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$ *является прямой суммой своих замкнутых подпространств* $H_p^{\omega}[\Delta_k^*]$ $(k=0,\cdots,\varkappa)$. *При этом для каждой функции* $f(z)\in H_p^{\omega}[M]$ *ее проекция* $F_k(z)$ *на подпространство* $H_p^{\omega}[\Delta_k^*]$ $(k=0,\cdots,\varkappa)$ *представима в виде* (0.18).

Отметим, что классы вида $H_2^{\omega}[M]$ впервые были рассмотрены М. М. Джрбашяном и им были установлены параметрические представления этих классов (см. [2], гл. VII). Интегральные представления классов $H_p^{\omega}[M]$ $(1<p\leqslant 2,\ -1<\omega<p-1)$ были установлены А. Е. Аветисяном [6].

Заключительный § 3 данной работы посвящен доказательству теоремы 0.1'.

Приношу глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за полезные обсуждения работы и моральную поддержку в период работы над ней.

§ 1. Необходимые сведения о функциях из классов $H_p^{\omega}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$

1.1 (а). Важные приложения классической теоремы М. Рисса о проектировании из L_p в H_p привели к установлению различных ее обобщений. Приведем одно из них, фактически установленное в монографии Е. Титчмарша [12] (стр. 176).

Обозначим через $H_p\equiv H_p[\operatorname{Im} z>0]$ $(0<p<+\infty)$ известный (см., напр., [11], гл. VIII) класс функций F, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и таких, что

$$\|F\|_p=\sup_{0<y<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x+iy)|^p\,dx\right\}^{1/p}<+\infty. \tag{1.1}$$

Аналогично определяется класс $H_p[\operatorname{Im} z<0]$. Справедлива

Теорема 1.1 (Е. Титчмарш [12]). *Пусть* $f\in L_p(-\infty,+\infty)$, *где* $1<p<+\infty$, *и*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x-z}\,dx=\begin{cases}F^{(+)}(z), & \operatorname{Im} z>0,\\ F^{(-)}(z), & \operatorname{Im} z<0.\end{cases}$$

Тогда $F^{(+)} \in H_p[\operatorname{Im} z > 0]$ *и* $F^{(-)} \in H_p[\operatorname{Im} z < 0]$, *причем*

$$\|F^{(+)}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p, \quad \|F^{(-)}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p,$$

где $A_p \in (0, +\infty)$ *зависит только от* p.

(б) Наряду с классом $H_p = H_p[\operatorname{Im} z > 0]$ рассмотрим класс H_p^* $(0 < p < +\infty)$ функций F, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и удовлетворяющих условию

$$\|F\|_p^* = \sup_{0<\varphi<\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p \, dr \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1.2}$$

М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном впервые было установлено, что $H_2 = H_2^*$ [9] (см. также [2], гл. VII). В общем случае справедливо следующее утверждение, которое в одну сторону было доказано С. А. Акопяном [13], а в другую—А. М. Седлецким [14].

Теорема 1.2 ([9, 13, 14]). *Для любого* $p \in (0, +\infty)$ *имеют место следующие утверждения*:

1°. $H_p = H_p^*$;

2°. $2^{-1/p}\|F\|_p \leqslant \|F\|_p^* \leqslant \|F\|_p$ $(\forall F \in H_p)$.

1.2 (а) Чтобы определить более общие классы функций введем обозначения. Для значений параметров $1/2 \leqslant \alpha < +\infty$, $-\infty < \vartheta < +\infty$ обозначим через

$$\Delta(\alpha; \vartheta) = \{z \colon |\operatorname{Arg} z - \vartheta| < \pi/2\alpha, \ 0 < |z| < +\infty\},$$

$$\Delta^*(\alpha; \vartheta) = \{z \colon \pi/2\alpha < |\operatorname{Arg} z - \vartheta| \leqslant \pi, \ 0 < |z| < +\infty\}$$

взаимно-дополнительные угловые области на конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Отметим при этом, что при $\alpha = 1/2$ $\Delta(\alpha; \vartheta)$—это плоскость, разрезанная вдоль луча $\Delta^*(1/2; \vartheta) = \{re^{i\vartheta} \colon r \geqslant 0\}$.

Через $\partial\Delta(\alpha; \vartheta)$ (соответственно $\partial\Delta^*(\alpha; \vartheta)$) будем обозначать границу области $\Delta(\alpha; \vartheta)$ (области $\Delta^*(\alpha; \vartheta)$), пробегаемую в положительном относительно этой области направлении.

Наконец, обозначим через $L_p^\omega(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$, $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$, класс измеримых на $\partial\Delta(\alpha; \vartheta)$ функций F, таких, что

$$\|F; \partial\Delta(\alpha; \vartheta)\|_{p,\omega} = \left\{ \int_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} |F(\zeta)|^p |\zeta|^\omega |d\zeta| \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1.3}$$

(б) Полагая теперь $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$, обозначим через $H_p^\omega[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ класс функций F, голоморфных в области $\Delta(\alpha; \vartheta)$ и удовлетворяющих условию

$$\|F; \Delta(\alpha; \vartheta)\|_{p,\omega} = \sup_{|\varphi-\vartheta|<\frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega \, dr \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1.4}$$

Классы $H_p^\omega[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ являются естественными обобщениями классов H_p (см. теорему 2) и поэтому обладают многими свойствами, присущими им. Приведем формулировки некоторых из них, которые потребуются нам при дальнейшем изложении.

Теорема 1.3 ([2, 10]). *Для любой функции* $F \in H_p^\omega[\Delta(\alpha; \vartheta)]$, *где* $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$, *справедливы следующие утверждения*:

1°. *Почти всюду на* $\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)$ *функция* F *имеет некасательные граничные значения* $F(\zeta)$, *причем* $F(\zeta)\in L_p^{\omega}(\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta))$ *и*

$$\lim_{\varphi\to\vartheta\pm\frac{\pi}{2\alpha}}\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})-F(re^{i(\vartheta\pm\pi/2\alpha)})|^p r^{\omega}\,dr=0;$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}F(z), & z\in\Delta(\alpha;\ \vartheta);\\ 0, & z\in\Delta^*(\alpha;\ \vartheta);\end{cases}$$

3°. *Для любого* φ_0 $(0<\varphi_0<\pi/2\alpha)$

$$\max_{|\varphi-\vartheta|<\varphi_0}\{|F(re^{i\varphi})|\}=o\left(r^{-\frac{1+\omega}{p}}\right)\ \text{при}\ r\to+0,\ r\to+\infty.$$

В силу утверждения 1° этой теоремы в $H_p^{\omega}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$ можно ввести норму также равенством (1.3), где $F(\zeta)$—граничная функция функции $F\in H_p^{\omega}[\Delta(\alpha,\ \vartheta)]$. Известно [10], что $H_p^{\omega}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$ *с нормой* (1.4) (*или с нормой* (1.3)) *является банаховым пространством и справедливы неравенства*

$$2^{-1/p}\|F;\ \partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)\|_{p,\omega}\leqslant\|F;\ \Delta(\alpha;\ \vartheta)\|_{p,\omega}\leqslant\|F;\ \partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)\|_{p,\omega}. \tag{1.5}$$

§ 2. Теоремы о проектировании

2.1 (а) В этом параграфе будут установлены обобщения теоремы 1.1 Е. Титчмарша. Чтобы сформулировать первое из них, введем обозначения.

Условимся сначала всюду в этом параграфе полагать, что p и ω — произвольные фиксированные параметры, изменяющиеся в пределах

$$1<p<+\infty,\quad -1<\omega<p-1. \tag{2.1}$$

Пусть, далее,

$$\Gamma(\vartheta)=\{\zeta=re^{i\vartheta}:\ 0\leqslant r<+\infty\}\quad(-\infty<\vartheta<+\infty) \tag{2.2}$$

— луч, пробегаемый в направлении возрастания $|\zeta|$.

Обозначим через $L_p^{\omega}(\Gamma(\vartheta))$ класс функций f, измеримых на $\Gamma(\vartheta)$ и удовлетворяющих условию

$$\|f;\ \Gamma(\vartheta)\|_{p,\omega}=\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\vartheta})|^p r^{\omega}\,dr\right\}^{1/p}<+\infty. \tag{2.3}$$

Удобно также класс $L_p^{\omega}(\Gamma(0))$ обозначить через $L_p^{\omega}(0,\ +\infty)$.

Следующее утверждение является одним из обобщений теоремы 1.1.

Лемма 2.1 ([10]). *Если* $f\in L_p^{\omega}(\Gamma(\vartheta))$, *то интеграл типа Коши*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\vartheta)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma(\vartheta),\tag{2.4}$$

обладает следующими свойствами:

1°. *F голоморфна в области $\mathbf{C}\setminus\Gamma(\vartheta)$ и справедливо неравенство*

$$\sup_{\vartheta<\varphi<\vartheta+2\pi}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^p r^{\omega}\,dr\right\}^{1/p}\leqslant A\,\|f;\ \Gamma(\vartheta)\|_{p,\,\omega},\tag{2.5}$$

где $A=A(p,\omega)\in(0,+\infty)$ зависит исключительно от p и от ω;

2°. *Функция F почти всюду на $\Gamma(\vartheta)$ имеет некасательные граничные значения $F^{(-)}(\zeta)$ и $F^{(+)}(\zeta)$ соответственно слева и справа от луча $\Gamma(\vartheta)$, причем $F^{(\pm)}\in L_p^{\omega}(\Gamma(\vartheta))$ и*

$$f(\zeta)=F^{(-)}(\zeta)-F^{(+)}(\zeta)\quad \textit{почти всюду на } \Gamma(\vartheta).\tag{2.6}$$

Доказательство этой леммы краткое, и мы считаем нелишним привести его здесь.

Без ограничения общности можем считать $\vartheta=0$.

Итак, пусть $f\in L_p^{\omega}(0,+\infty)$ и

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x-z}\,dx,\quad z\in\mathbf{C}\setminus[0,+\infty).\tag{2.4'}$$

Из абсолютной и равномерной сходимости этого интеграла следует голоморфность F в $\mathbf{C}\setminus[0,+\infty)$.

Далее, для каждого $\varphi\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, положив

$$H_{\varphi}(r;\ r-x)=|r-x|\,[2\pi i\,(x-re^{i\varphi})]^{-1},$$

определим оператор T_{φ} следующим образом:

$$[T_{\varphi}\,g](r)=\int\limits_0^{+\infty}\{H_{\varphi}(r;r-x)/|r-x|\}\,g(x)\,dx,\quad r>0.\tag{2.7}$$

Пусть теперь $g\in L_p(0,+\infty)$. Тогда для интеграла типа Коши

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(x)}{x-z}dx=\begin{cases}G^{(+)}(z), & \operatorname{Im} z>0,\\ G^{(-)}(z), & \operatorname{Im} z<0,\end{cases}$$

на основании теорем 1.1 и 1.2 можем утверждать, что $G^{(+)}(z)\in H_p^{*}$, $G^{(-)}(-z)\in H_p^{*}$, причем

$$\|G^{(+)}(z)\|_p^{*}\leqslant A_p\,\|g\|_{L_p(0,+\infty)},\quad \|G^{(-)}\|_p^{*}\leqslant A_p\,\|g\|_{L_p(0,+\infty)}.$$

Легко видеть, что эти неравенства можно записать в виде

$$\sup_{\varphi\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|G(re^{i\varphi})|^p dr\right\}^{1/p}\leqslant A_p\,\|g\|_{L_p(0,+\infty)},$$

и поскольку $[T_\varphi g](r) = G(re^{i\varphi})$, то для любого $\varphi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$

$$\|T_\varphi g\|_{L_p(0, +\infty)} \leqslant A_p \|g\|_{L_p(0, +\infty)}, \quad g \in L_p(0, +\infty).$$

Значит, T_φ — ограниченный оператор в $L_p(0, +\infty)$. Кроме того, $|H_\varphi(r; r-x)| \leqslant 1/2\pi$. Следовательно, в силу одного результата И. Стейна [15], для любой измеримой функции g и для любого $\varphi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ будем иметь

$$\|[T_\varphi g](r)\, r^{\omega/p}\|_{L_p(0, +\infty)} \leqslant A \, \|g(x)\, x^{\omega/p}\|_{L_p(0, +\infty)}, \tag{2.8}$$

причем $A = A(p, \omega) \in (0, +\infty)$ зависит исключительно от p и ω. В частности, для функции $g(x) = f(x)$ ввиду определений (2.4′) и (2.7) функции F и оператора T_φ имеет место равенство $[T_\varphi f](r) \equiv F(re^{i\varphi})$. В этом случае неравенство (2.8) принимает вид

$$\left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega \, dr \right\}^{1/p} \leqslant A \, \|f; \Gamma(0)\|_{p,\omega}, \quad \varphi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi). \tag{2.8′}$$

Поскольку отсюда следует $F \in H_p^\omega[\operatorname{Im} z > 0]$, то в силу теоремы 1.3 (1°) неравенство (2.8′) верно и при $\varphi = \pi$, то есть утверждение 1° леммы доказано.

Далее, поскольку $F \in H_p^\omega[\operatorname{Im} z > 0]$ и $F \in H_p^\omega[\operatorname{Im} z < 0]$ (в силу (2.8′)), то из теоремы 1.3 (1°) следует существование у F некасательных граничных значений $F^{(+)}(x)$ и $F^{(-)}(x)$ соответственно сверху и снизу от полуоси $(0, +\infty)$, причем $F^{(\pm)} \in L_p^\omega(0, +\infty)$. Наконец, (2.6) вытекает из известных результатов об интегралах типа Коши (см., напр., [16], стр. 416).

(б) Пусть теперь $\varkappa > 1$ и совокупность чисел $\{\vartheta_k\}_0^{\varkappa+1}$ такова, что

$$-\pi < \vartheta_0 < \cdots < \vartheta_\varkappa \leqslant \pi < \vartheta_{\varkappa+1} = \vartheta_0 + 2\pi.$$

С этой совокупностью ассоциируем множество

$$\Gamma = \bigcup_{k=0}^{\varkappa} \Gamma(\vartheta_k),$$

состоящее из совокупности $\varkappa+1$ лучей, исходящих из точки $\zeta = 0$. Очевидно, что Γ разбивает плоскость $\mathbf{C}$ на $\varkappa+1$ угловых областей Δ_k $(0 \leqslant k \leqslant \varkappa)$ с общей вершиной в начале координат, где

$$\Delta_k = \{z: \vartheta_k < \operatorname{Arg} z < \vartheta_{k+1}, \ 0 < |z| < +\infty\}.$$

Обозначим через $L_p^\omega(\Gamma)$ класс функций f, измеримых на Γ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L_p^\omega(\Gamma)} = \left\{ \sum_{k=0}^{\varkappa} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\vartheta_k})|^p r^\omega \, dr \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{2.9}$$

В качестве непосредственного следствия из леммы 1.1 получаем следующую теорему о расщеплении функций из класса $L_p^\omega(\Gamma)$.

Теорема 2.1. *Для каждой функции* $f \in L_p^\omega(\Gamma)$ *существует единственный набор функций* $F_k \in H_p^\omega[\Delta_k]$ $(0 \leqslant k \leqslant \varkappa)$ *таких, что почти всюду*

$$f(\zeta) = F_{k+1}(\zeta) - F_k(\zeta);\ \zeta \in \Gamma(\vartheta_k)(0 \leqslant k \leqslant \varkappa),\ F_{\varkappa+1} = F_0. \tag{2.10}$$

При этом

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\ z \in \Delta_k\ (0 \leqslant k \leqslant \varkappa), \tag{2.11}$$

и справедливы неравенства

$$\|F_k;\ \Delta_k\|_{p,\omega} \leqslant B\|f\|_{L_p^\omega(\Gamma)}\ (0 \leqslant k \leqslant \varkappa), \tag{2.12}$$

где $B = B(p, \omega) \in (0, +\infty)$ *зависит исключительно от* p *и* ω.

Доказательство. Равенства (2.10) и неравенства (2.12) вытекают сразу из (2.11) и леммы 1.1. Поэтому нужно доказать только единственность набора функций $F_k \in H_p^\omega[\Delta_k]$ $(0 \leqslant k \leqslant \varkappa)$, удовлетворяющих (2.10).

Предположим, что набор функций $F_k^* \in H_p^\omega[\Delta_k]$ $(0 \leqslant k \leqslant \varkappa)$ также удовлетворяет (2.10). В таком случае будем иметь

$$F_k(\zeta) - F_k^*(\zeta) = F_{k+1}(\zeta) - F_{k+1}^*(\zeta),\ \zeta \in \Gamma(\vartheta_k); \tag{2.13}$$

$$(0 \leqslant k \leqslant \varkappa),\ F_{\varkappa+1}^* = F_0^*.$$

Определим в $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ функцию $G(z)$ следующим образом:

$$G(z) = F_k(z) - F_k^*(z),\ z \in \Delta_k\ (0 \leqslant k \leqslant \varkappa).$$

В силу (2.13) граничные значения G на лучах $\Gamma(\vartheta_k)$ слева и справа совпадают, так что можно считать G заданной на всей плоскости $\mathbf{C}$, причем $G \in H_p^\omega[\Delta_k]$ $(0 \leqslant k \leqslant \varkappa)$. Следовательно, по теореме 1.3 для всех k $(0 \leqslant k \leqslant \varkappa)$ можем написать

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_k} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} G(z), & z \in \Delta_k; \\ 0, & z \in \Delta_k^* = \mathbf{C} \setminus \bar{\Delta}_k. \end{cases}$$

Положив $\Gamma(\vartheta_{\varkappa+1}) = \Gamma(\vartheta_0)$, отсюда заключаем, что

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\varkappa} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_k} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\varkappa} \left\{ \int_{\Gamma(\vartheta_k)} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\Gamma(\vartheta_{k+1})} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right\} = 0,$$

при $z \in \mathbf{C} / \Gamma$, и, следовательно,

$$F_k(z) \equiv F_k^*(z),\ z \in \Delta_k\ (0 \leqslant k \leqslant \varkappa).$$

Теорема доказана.

Отметим, что при $p = 2$ утверждение этой теоремы (без формул (2.11) и неравенств (2.12)) было установлено А. Е. Аветисяном [17] на основании теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна.

Отметим также, что в случае $\Gamma=(-\infty, +\infty)$ и $\omega=0$ эта теорема переходит в теорему 1.1 Е. Титчмарша.

2.2 (а) В этом пункте мы будем рассматривать весьма общие классы функций, определенных на множествах комплексной плоскости, состоящих из конечного числа лучей и угловых областей, замыкания которых содержат лишь одну общую точку $z=0$. Чтобы определить эти классы, следуя М. М. Джрбашяну (см. [2], гл. VII), введем необходимые обозначения.

Для любых α $(1/2<\alpha<+\infty)$ и ϑ $(-\infty<\vartheta<+\infty)$ множество точек $\Delta(\alpha;\ \vartheta)$ комплексной плоскости определим следующим образом:

$$\Delta(\alpha;\ \vartheta)=\begin{cases}|\operatorname{Arg} z-\vartheta|<\pi/2\alpha, & \text{при } 1/2<\alpha<+\infty;\\ \operatorname{Arg} z=\vartheta, & \text{при } \alpha=+\infty.\end{cases} \tag{2.14}$$

Всюду в этом пункте будем предполагать, что целое число $\varkappa\geqslant 1$ и совокупности чисел

$$\vartheta=\{\vartheta_k\}_0^{\varkappa+1}:\ -\pi<\vartheta_0<\cdots<\vartheta_\varkappa\leqslant\pi<\vartheta_{\varkappa+1}=\vartheta_0+2\pi, \tag{2.15}$$

$$\alpha=\{\alpha_k\}_0^{\varkappa+1}:1/2<\alpha_k\leqslant+\infty\ (0\leqslant k\leqslant\varkappa),\ \alpha_{\varkappa+1}=\alpha_0, \tag{2.16}$$

таковы, что всевозможные пересечения $\overline{\Delta}(\alpha_{k_1};\ \vartheta_{k_1})\cap\overline{\Delta}(\alpha_{k_2};\ \vartheta_{k_2})$ $(k_1\neq k_2)$ замкнутых множеств $\overline{\Delta}(\alpha_k;\ \vartheta_k)(0\leqslant k\leqslant\varkappa)$ содержат лишь единственную точку—начало координат. Нетрудно проверить, что это условие эквивалентно следующей цепочке неравенств:

$$\vartheta_{k+1}-\vartheta_k>\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_{k+1}}+\frac{1}{\alpha_k}\right)\ (0\leqslant k\leqslant\varkappa). \tag{2.17}$$

Очевидно также, что при $1/2<\alpha_k<+\infty$ $\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)$ является угловой областью раствора π/α_k и луч $\Gamma(\vartheta_k)$ является ее биссектрисой, а если $\alpha_k=+\infty$, то $\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)$ совпадает с лучом $\Gamma(\vartheta_k)$.

В принятых нами условиях рассмотрим на плоскости **C** точечное множество

$$M=M\{\alpha;\ \vartheta\}=\bigcup_{k=0}^{\varkappa}\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k), \tag{2.18}$$

компонентами которого служат лучи, исходящие из начала координат (если среди α_k имеются равные $+\infty$) и угловые области с вершиной в точке $z=0$ (если среди α_k имеются отличные от $+\infty$). Замыкание этого множества

$$\overline{M}=\overline{M}\{\alpha;\ \vartheta\}=\bigcup_{k=0}^{\varkappa}\overline{\Delta}(\alpha_k;\ \vartheta_k) \tag{2.19}$$

состоит из совокупности $\{\overline{\Delta}(\alpha_k;\ \vartheta_k)\}_0^\varkappa$ лучей и замкнутых угловых областей, пересечение которых по условию содержит единственную точку—начало координат. Дополнение замкнутого множества $\overline{M}\{\alpha;\ \vartheta\}$, очевидно, состоит из угловых областей вида

$$\Delta_k = \Delta(\rho_k;\ \theta_k) = \left\{z: |\text{Arg}\, z - \theta_k| < \frac{\pi}{2\rho_k},\ 0 < |z| < +\infty\right\}\ (0 \leqslant k \leqslant \varkappa), \tag{2.20}$$

$$-\pi < \theta_0 < \cdots < \theta_\varkappa \leqslant \pi,\ 1/2 < \rho_k < +\infty, \tag{2.21}$$

и, кроме того

$$\sum_{k=0}^{\varkappa}\left(\frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\rho_k}\right) = 2. \tag{2.22}$$

Простой подсчет показывает также, что

$$\left.\begin{aligned} \theta_k &= \frac{1}{2}\left\{\vartheta_k + \vartheta_{k+1} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)\right\}, \\ \frac{\pi}{\rho_k} &= \vartheta_{k+1} - \vartheta_k - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_{k+1}}\right). \end{aligned}\right\}\quad (0 \leqslant k \leqslant \varkappa) \tag{2.23}$$

Обозначим через $\Delta_k^* \equiv \Delta_k^*(\rho_k;\ \theta_k)$ дополнение к замкнутой угловой области $\overline{\Delta}_k$.

Учитывая эти обозначения и полагая, как и раньше, $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$, обозначим через $H_p^\omega[M\{\alpha;\ \vartheta\}] \equiv H_p^\omega[M]$ класс функций F, определенных на множестве $M\{\alpha;\ \vartheta\}$ и удовлетворяющих условиям:

а) если $\alpha_k \neq +\infty$, то F голоморфна в $\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)$ и

$$\sup_{|\varphi - \vartheta_k| < \frac{\pi}{2\alpha_k}}\left\{\int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega\, dr\right\} < +\infty;$$

б) если $\alpha_k = +\infty$, то F измерима на луче $\Gamma(\vartheta_k) = \Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)$ и

$$\int_0^{+\infty} |F(re^{i\vartheta_k})|^p r^\omega\, dr < + < \infty.$$

В $H_p^\omega[M]$ введем норму равенством

$$\|F;\ M\|_{p,\omega} = \sup_{\Gamma(\varphi) \subset M}\left\{\int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega\, dr\right\}^{1/p} \tag{2.24}$$

и заметим, что с *такой нормой $H_p^\omega[M]$ является банаховым пространством.*

Действительно, при $\alpha_k \neq +\infty$ функция F в области $\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)$ принадлежит пространству $H_p^\omega[\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)]$, а при $\alpha_k = +\infty$ — пространству $L_p^\omega(\Gamma(\vartheta_k))$. Из полноты этих пространств и следует полнота $H_p^\omega[M]$.

(б) Убедимся, что $H_p^\omega[\Delta_k^*]$ $(0 \leqslant k \leqslant \varkappa)$ *можно рассматривать как замкнутое подпространство пространства $H_p^\omega[M]$.*

В самом деле, каждая функция $F_k \in H_p^\omega[\Delta_k^*]$ полностью определяется своими значениями на $\partial\Delta_k^*$ (см. теорему 1.3). Отсюда и из включений $\partial\Delta_k^* \subset \overline{M} \subset \overline{\Delta_k^*}$ заключаем, что F_k можно восстановить по ее значениям на $\overline{M}$. И поскольку по значениям F_k на M определяются ее значения на $\overline{M}$, то эта функция полностью определяется ее сужением на M. Сформулированное выше утверждение следует из этого замечания и из равенств

$$\|F_k;\ \Delta_k^*\|_{p,\omega}=\|F_k;\ M\|_{p,\omega}\ (0\leqslant k\leqslant\varkappa). \tag{2.25}$$

Эти равенства—следствие включений $\partial\Delta_k^*\subset\overline{M}\subset\overline{\Delta}_k^*$ и одного результата С. А. Акопяна [13].

Следующая теорема представляет собой другое обобщение теоремы 1.1 Е. Титчмарша.

Теорема 2.2. *Пространство $H_p^\omega[M]$ является прямой суммой своих замкнутых подпространств $H_p^\omega[\Delta_k^*]$ $(0\leqslant k\leqslant\varkappa)$. Именно, для каждой функции $F\in H_p^\omega[M]$ существует единственный набор функций $F_k\in H_p^\omega[\Delta_k^*]$ $(0\leqslant k\leqslant\varkappa)$ таких, что*

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\varkappa}F_k(z),\ z\in M, \tag{2.26}$$

и каждая сумма такого вида принадлежит $H_p^\omega[M]$.

При этом функции F_k определяются из формул

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_k^*}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\Delta_k^*\ (0\leqslant k\leqslant\varkappa), \tag{2.27}$$

и справедливы неравенства

$$\|F;\ M\|_{p,\omega}\leqslant(\varkappa+1)\max_{0\leqslant k\leqslant\varkappa}\{\|F_k;\ \Delta_k^*\|_{p,\omega}\}\leqslant B\|F;\ M\|_{p,\omega}, \tag{2.28}$$

где $B=B(p,\omega)\in(0,+\infty)$ зависит исключительно от p и ω.

Доказательство. Разобьем множество индексов $\{k\}_0^\varkappa$ на два непересекающихся подмножества

$$J_\varkappa=\{k\colon \alpha_k\neq+\infty\},\quad J_\varkappa^*=\{k\colon \alpha_k=+\infty\}.$$

Для каждого $k\in J_\varkappa$ рассмотрим пару интегралов типа Коши

$$\Psi_k^{(\pm)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\vartheta_k\pm\pi/2\alpha_k)}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma\left(\vartheta_k\pm\frac{\pi}{2\alpha_k}\right). \tag{2.29}$$

Поскольку для значений $k\in J_\varkappa$ сужение F на $\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)$ принадлежит $H_p^\omega[\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)]$, то из (2.29), на основании теоремы 1.3, будем иметь

$$\Psi_k^{(-)}(z)-\Psi_k^{(+)}(z)=\begin{cases}F(z), & \text{при } z\in\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k);\\ 0, & \text{при } z\in\Delta^*(\alpha_k;\ \vartheta_k).\end{cases}$$

Следовательно

$$\sum_{k\in J_\varkappa}[\Psi_k^{(-)}(z)-\Psi_k^{(+)}(z)]=$$

$$=\begin{cases} F(z), \text{ при } z\in \bigcup_{k\in J_\varkappa} \Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k); \\ 0, \text{ при } z\in \bigcup_{k\in J_\varkappa^*} \Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)=\bigcup_{k\in J_\varkappa^*} \Gamma(\vartheta_k). \end{cases} \tag{2.30}$$

Далее, для каждого значания $k\in J_\varkappa^*$ рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\vartheta_k)} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in \mathbf{C}\setminus\Gamma(\vartheta_k). \tag{2.31}$$

По лемме 1.1 Φ_k голоморфна в $\mathbf{C}\setminus\Gamma(\vartheta_k)$ и почти всюду на $\Gamma(\vartheta_k)$ имеет некасательные граничные значения $\Phi_k^{(-)}(\zeta)$ и $\Phi_k^{(+)}(\zeta)$ соответственно слева и справа от луча $\Gamma(\vartheta_k)$. При этом почти всюду на $\Gamma(\vartheta_k)$

$$\Phi_k^{(-)}(\zeta)-\Phi_k^{(+)}(\zeta)=F(\zeta).$$

Следовательно, положив

$$\varphi_k^{(\pm)}(z)=\begin{cases}\Phi_k(z),\ z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma(\vartheta_k),\\ \Phi_k^{(\pm)}(z),\ z\in\Gamma(\vartheta_k),\end{cases}$$

можем написать

$$\sum_{k\in J_\varkappa^*}\{\varphi_k^{(-)}(z)-\varphi_k^{(+)}(z)\}=$$

$$=\begin{cases} F(z), \text{ при } z\in \bigcup_{k\in J_\varkappa^*} \Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)=\bigcup_{k\in J_\varkappa^*}\Gamma(\vartheta_k), \\ 0, \quad \text{при } z\in \bigcup_{k\in J_\varkappa} \Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k). \end{cases}$$

Отсюда и из (2.30) получаем

$$\sum_{k\in J_\varkappa}\{\Psi_k^{(-)}(z)-\Psi_k^{(+)}(z)\}+\sum_{k\in J_\varkappa^*}\{\varphi_k^{(-)}(z)-\varphi_k^{(+)}(z)\}=F(z),\ z\in M$$

и поскольку $\Gamma(\vartheta_k+\pi/2\alpha_k)\cup\Gamma(\vartheta_{k+1}-\pi/2\alpha_{k+1})=\partial\Delta_k^*$, то ввиду (2.29) и (2.31) это тождество можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_k^*}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=F(z),\ z\in M. \tag{2.26$'$}$$

Однако, на каждом луче $\Gamma(\vartheta_k\pm\pi/2\alpha_k)$ функция F или ее граничные значения принадлежат классу $L_p^\omega(\Gamma(\vartheta_k\pm\pi/2\alpha_k))$ (см. 2.24) и теорему 1.3 (1°)), причем нормы на этих лучах не превосходят $\|F;\ M\|_{p,\,\omega}$. Поэтому, в силу леммы 1.1, при каждом k $(0\leqslant k\leqslant\varkappa)$ функция $F_k(z)$ из (2.27) принадлежит $H_p^\omega[\Delta_k^*]$ и

$$\|F_k;\ \Delta_k^*\|_{p,\,\omega}<2A\,\|F;\ \partial\Delta_k^*\|_{p,\,\omega}\leqslant 2A\,\|F;\ M\|_{p,\,\omega}.$$

Отсюда и из (2.26′) вытекают формулы представления (2.26)—(2.27) и второе из неравенств (2.28). Первое из этих неравенств следует из (2.25).

Далее, поскольку

$$\bigcap_{k=0}^{\varkappa} \Delta_k^* = \bigcup_{k\in J_\varkappa} \Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k),\quad \bigcap_{k=0}^{\varkappa} \overline{\Delta_k^*} = \overline{M},$$

то функция F, представимая в виде (2.26), голоморфна в областях $\Delta(\alpha_k;\ \vartheta_k)$, $k\in J_\varkappa$, измерима на лучах $\Gamma(\vartheta_k)$, $k\in J_\varkappa^*$, и, следовательно, ввиду также (2.25) $F\in H_p^\omega[M]$.

Наконец, докажем единственность представления вида (2.26).

Пусть $F_k\in H_p^\omega[\Delta_k^*]$ $(0\leqslant k\leqslant\varkappa)$ и

$$\sum_{k=0}^{\varkappa} F_k(z)=0,\ z\in M.$$

Тогда, в частности,

$$F_0(\zeta)=-\sum_{k=1}^{\varkappa} F_k(\zeta),\ \zeta\in\partial\Delta_0^*\subset\overline{M}. \tag{2.32}$$

Однако $F_k\in H_p^\omega[\Delta_k^*]$ $(1\leqslant k\leqslant\varkappa)$, и поскольку

$$\Delta_0\subset\bigcap_{k=1}^{\varkappa}\Delta_k^*,$$

то будем также иметь $F_k\in H_p^\omega[\Delta_0]$ $(1\leqslant k\leqslant\varkappa)$, откуда на основании теоремы 1.3 можем написать

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_0^*}\left\{\left[\sum_{k=1}^{\varkappa} F_k(\zeta)\right]/(\zeta-z)\right\}d\zeta=0,\ z\in\Delta_0^*. \tag{2.33}$$

С другой стороны, так как $F_0\in H_p^\omega[\Delta_0^*]$, то по той же теореме 1.3 справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_0^*}\frac{F_0(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=F_0(z),\ z\in\Delta_0^*.$$

Отсюда и из (2.33) в силу (2.32) заключаем, что $F_0(z)\equiv 0$, $z\in\Delta_0^*$.

Аналогично доказывается, что $F_k(z)\equiv 0$, $z\in\Delta_k$ $(1\leqslant k\leqslant\varkappa)$. Теорема доказана.

Отметим, что в специальном случае, когда все $\alpha_k=+\infty$ $(k=0,\cdots,\varkappa)$, и тогда M—это совокупность лучей, доказанная теорема была установлена ранее в работе автора [18].

§ 3. Доказательство теоремы М. М. Джрбашяна

3.1 (a) Докажем сначала следующее утверждение о свойствах обобщенного преобразования Лапласа, которое является распространением на значения параметра $p\in(1,\ 2]$ леммы 6.2 из монографии [2]. В ее формулировке и при доказательстве мы будем выбирать те ветви функций $(e^{-i\vartheta}\zeta)^{1/p}$ и $(e^{-i\vartheta}\zeta)^{\rho}$, которые на луче $\operatorname{Arg}\zeta=\vartheta$ принимают положительные значения.

Лемма 3.1. *Пусть* $1 < p \leqslant 2$ *и* $-1 < \omega < p-1$. *Если функция* $F(\zeta) \in L_p^\omega(\Gamma(-\vartheta))$, *где* $\vartheta \in (-\infty, +\infty)$ *фиксировано, то ее обобщенное преобразование Лапласа*

$$G(\zeta) = \rho (e^{-i\vartheta}\zeta)^{\mu\rho} \zeta^{-1} \times$$

$$\times \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^\rho (e^{-i\vartheta}\zeta)^\rho} F(te^{-i\vartheta}) t^{\mu\rho - 1} dt, \ \zeta \in \Delta(\rho; \vartheta), \tag{3.1}$$

где

$$\frac{1}{2} \leqslant \rho < +\infty, \ \mu = \frac{1 + \omega + (p-1)\rho}{p\rho} \tag{3.2}$$

обладает следующими свойствами:

1°. $G(\zeta)$ *голоморфна в* $\Delta(\rho; \vartheta)$ *и принадлежит классу* $H_q^{\omega(1-q)} \times [\Delta(\rho; \vartheta)]$, *где* $1/p + 1/q = 1$, *причем*

$$(\rho/2\pi)^{1/q} \| G; \Delta(\rho; \vartheta) \|_{q, \omega(1-q)} \leqslant (\rho/\sqrt{2\pi})^{1/p} \| F; \Gamma(-\vartheta) \|_{p, \omega}; \tag{3.3}$$

2°. *Почти всюду на границе* $\partial\Delta(\rho; \vartheta)$ *области* $\Delta(\rho; \vartheta)$ *граничные значения функции* G *представимы в виде*

$$G(e^{i(\vartheta \pm \pi/2\rho)} \tau^{1/\rho}) =$$

$$= e^{\pm i \frac{\pi}{2} \mu} e^{-i(\vartheta \pm \pi/2\rho)} \tau^{\mu - 1/\rho} \Phi(\pm \tau), \ \tau \in (0, +\infty), \tag{3.4}$$

причем почти всюду на полуоси $(0, +\infty)$

$$\Phi(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-i\tau t} - 1}{-it} F(t^{1/\rho} e^{-i\vartheta}) t^{\mu - 1} dt; \tag{3.5}$$

3°. *Формулы* (3.4)—(3.5) *могут быть записаны также в виде*

$$G(e^{i(\vartheta \pm \pi/2\rho)} r) = \underset{\sigma \to +\infty}{\text{l.i.m.}}\, \rho e^{\pm i \frac{\pi}{2}\mu} e^{-i(\vartheta \pm \pi/2\rho)} r^{\mu\rho - 1} \times$$

$$\times \int\limits_0^\sigma e^{\mp i x^\rho r^\rho} F(x e^{-i\vartheta}) x^{\mu\rho - 1} dx, \tag{3.6}$$

где пределы в среднем берутся по метрике $L_q^{\omega(1-q)}(0, +\infty)$.

Доказательство. Произведя под знаком интеграла (3.1) замену переменной $t^\rho = \tau$, получим

$$G(\zeta) = (e^{-i\vartheta}\zeta)^{\mu\rho} \zeta^{-1} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau (e^{-i\vartheta}\zeta)^\rho} F(\tau^{1/\rho} e^{-i\vartheta}) \tau^{\mu - 1} d\tau. \tag{3.7}$$

Следовательно, вводя новую переменную $w = (e^{-i\vartheta}\zeta)^\rho$, $\zeta \in \Delta(\rho; \vartheta)$ (тогда $\mathrm{Re}\, w > 0$) и функции

$$g(w) = e^{i\vartheta} w^{1/\rho - \mu} G(e^{i\vartheta} w^{1/\rho}), \ \mathrm{Re}\, w > 0, \tag{3.8}$$

$$f(\tau)=F(\tau^{1/\rho}e^{-i\vartheta})\tau^{\mu-1},\ \tau\in(0,+\infty),\tag{3.9}$$

можем написать

$$g(w)=\int_0^{+\infty}e^{-\tau w}f(\tau)\,d\tau,\ \operatorname{Re}w>0.\tag{3.10}$$

При этом выбираются главные ветви функций $w^{1/\rho-\mu}$ и $w^{1/\rho}$. Отметим еще, что ввиду (3.9)

$$\left\{\int_0^{+\infty}|f(\tau)|^p\,d\tau\right\}^{1/p}=\left\{\rho\int_0^{+\infty}|F(te^{-i\vartheta})|^p\,t^{\omega}\,dt\right\}^{1/p}<+\infty.\tag{3.11}$$

Подставляя в формулу (3.10) $w=x+iy$ и записав ее в виде

$$g(x+iy)=\int_0^{+\infty}e^{-i\tau y}e^{-\tau x}f(\tau)\,d\tau,\ x>0,\tag{3.12}$$

на основании теоремы Е. Титчмарша о преобразовании Фурье в классах L_p (см. [12], стр. 128), получим

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x+iy)|^q\,dy\right\}^{1/q}\leqslant\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-p\tau x}|f(\tau)|^p\,d\tau\right\}^{1/p},\ x>0.$$

Отсюда, в силу (3.11)

$$\sup_{0<x<+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x+iy)|^q\,dy\right\}^{1/q}\leqslant\left\{\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}|F(te^{-i\vartheta})|^p\,t^{\omega}\,dt\right\}^{1/p},\tag{3.13}$$

а это означает, что в полуплоскости $\operatorname{Re}w>0$ $g\in H_q$. Значит почти всюду на мнимой оси функция g имеет некасательные граничные значения $g(it)\in L_q(-\infty,+\infty)$, причем

$$\lim_{x\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x+it)-g(it)|^q\,dt=0$$

(см., напр., [11], гл. VIII). Следовательно

$$\lim_{x\to+0}\int_0^y g(x+it)\,dt=\int_0^y g(it)\,dt,\ y\in(-\infty,+\infty).\tag{3.14}$$

С другой стороны, при каждом фиксированном $y\in(-\infty,+\infty)$ и при всех $x>0$, ввиду (3.11),

$$\left|\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}e^{-x\tau}f(\tau)\right|\leqslant\left|\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}f(\tau)\right|\in L_1(0,+\infty),$$

и на основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{x\to+0}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}e^{-\tau x}f(\tau)\,d\tau=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}f(\tau)\,d\tau, \tag{3.15}$$

$$y\in(-\infty,+\infty).$$

Однако, ввиду (3.12) при любом $x>0$ справедлива также формула

$$\int_0^y g(x+it)\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}e^{-\tau x}f(\tau)\,d\tau,\ y\in(-\infty,+\infty).$$

Переходя здесь к пределу при $x\to+0$ и учитывая (3.14) и (3.15), получим формулу

$$\int_0^y g(it)\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}f(\tau)\,d\tau,\ y\in(-\infty,+\infty),$$

и, следовательно, почти всюду

$$g(iy)=\frac{d}{dy}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau y}-1}{-i\tau}f(\tau)\,d\tau,\ y\in(-\infty,+\infty). \tag{3.16}$$

Возвратимся теперь к функции G. Отметим сначала, что ввиду соотношения (3.8) и голоморфности $g(w)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} w>0$ вытекает голоморфность функции $G(\zeta)$ в $\Delta(\rho;\,\vartheta)$.

Далее, в силу неравенств

$$\sup_{|\alpha|<\pi/2}\left\{\int_0^{+\infty}|g(re^{i\alpha})|^q\,dr\right\}^{1/q}\leqslant\sup_{0<x<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x+iy)|^q\,dy\right\}^{1/q}$$

(см. теорему 1.2) и (3.13) будем иметь также неравенство

$$\sup_{|\alpha|<\pi/2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}|g(re^{i\alpha})|^q\,dr\right\}^{1/q}\leqslant\left(\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/p}\|F;\,\Gamma(-\vartheta)\|_{p,\omega}.$$

Из этой оценки и из соотношения (3.8) следует, что

$$\sup_{|\varphi-\vartheta|<\frac{\pi}{2\rho}}\left\{\frac{\rho}{2\pi}\int_0^{+\infty}|G(\tau e^{i\varphi})|^q\,\tau^{\omega(1-q)}\,d\tau\right\}^{1/q}\leqslant\left(\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/p}\|F;\,\Gamma(-\vartheta)\|_{p,\omega},$$

и утверждение 1° теоремы доказано. Чтобы доказать утверждение 2°, заметим, что опять же в силу соотношения (3.8) для почти всех $\tau\in(0,+\infty)$

$$g(\pm i\tau)=e^{i\vartheta\pm i\frac{\pi}{2\rho}(1-\mu\rho)}\,\tau^{1/\rho-\mu}\,G\left(e^{i(\vartheta\pm\pi/2\rho)}\,\tau^{1/\rho}\right).$$

Поэтому согласно (3.16) для почти всех $\tau\in(0,+\infty)$

$$e^{i\vartheta\pm\frac{\pi}{2\rho}(1-\mu\rho)}\,\tau^{1/\rho-\mu}\,G\left(e^{i(\vartheta\pm\pi/2\rho)}\,\tau^{1/\rho}\right)=\frac{d}{d\tau}\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mp it\tau}-1}{\mp it}f(t)\,dt.$$

На основании (3.9), заменив здесь $f(t)$ на $F(t^{1/\rho}e^{-i\theta})t^{\mu-1}$, придем к формулам (3.4)—(3.5).

Наконец, докажем утверждение 3°. Производя замены переменных $r=\tau^{1/\rho}$ и $x=t^{1/\rho}$, с учетом формул (3.4) и (3.5) получим

$$\int_0^{+\infty}\Big|G(e^{i(\theta\pm\pi/2\rho)}r)-$$

$$-\rho e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu}e^{-i\left(\theta\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)}r^{\mu\rho-1}\int_0^{\sigma}e^{\mp ix^\rho r^\rho}F(xe^{-i\theta})x^{\mu\rho-1}dx\Big|^q r^{\omega(1-q)}dr=$$

$$=\frac{1}{\rho}\int_0^{+\infty}\Big|\Phi(\pm\tau)-\int_0^{\sigma^\rho}e^{\mp i\tau t}F(t^{1/\rho}e^{-i\theta})t^{\mu-1}dt\Big|^q d\tau,$$

Отсюда и следует (3.6), так как в силу (3.9) и (3.16) и процитированной выше теоремы Е. Титчмарша ([12], стр. 128), последний интеграл стремится к нулю при $\sigma\to+\infty$.

(б) Докажем следующую лемму, которая является распространением на значения параметра $p\in(1, 2]$ леммы 7.5 из монографии [2].

Лемма 3.2. *Пусть* $1/2<\rho<+\infty$, $1<p\leqslant 2$ *и* $-1<\omega<p-1$. *Тогда при каждом фиксированном* $z\in\Delta^*(\rho;-\theta)$

$$(xe^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}-z)^{-1}=\underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\rho e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu}e^{-i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\times$$

$$\times x^{\mu\rho-1}\int_0^a e^{\mp ix^\rho r^\rho}E_\rho(e^{i\theta}zr;\mu)r^{\mu\rho-1}dr, \tag{3.17}$$

где $\mu=\dfrac{1+\omega+(p-1)\rho}{p\rho}$, *а пределы в среднем берутся по метрике пространства* $L_q^{\omega(1-q)}(0,+\infty)$, $1/p+1/q=1$.

Доказательство. Справедливо следующее важное представление ядра Коши, вытекающее из общей формулы М. М. Джрбашяна ([2], стр. 149)

$$\frac{1}{\zeta-z}=(e^{i\theta}\zeta)^{\mu\rho}\zeta^{-1}\int_0^{+\infty}e^{-t(e^{i\theta}\zeta)^\rho}E_\rho(e^{i\theta}zt^{1/\rho};\mu)t^{\mu-1}dt, \tag{3.18}$$

которое после замены переменной $t=r^\rho$ можно записать в виде

$$\frac{1}{\zeta-z}=\rho(e^{i\theta}\zeta)^{\mu\rho}\zeta^{-1}\int_0^{+\infty}e^{-(e^{i\theta}\zeta)^\rho r^\rho}E_\rho(e^{i\theta}zr;\mu)r^{\mu\rho-1}dr, \tag{3.18'}$$

$$\zeta\in\Delta(\rho;-\theta),\quad z\in\Delta^*(\rho;-\theta).$$

С другой стороны, из асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\mu)$ следует, что

$$|E_\rho(e^{i\theta}zr;\ \mu)|\leqslant M(z)/(1+|z|\,r);\ z\in\Delta^*(\rho;\ -\theta),\ r>0, \tag{3.19}$$

где $M(z)\in(0,+\infty)$ не зависит от r (см. [2]. стр. 136). Следовательно, $E_\rho(e^{i\theta}zr;\ \mu)$ как функция от r принадлежит классу $L_p^\infty(0,+\infty)$. Отсюда и из (3.18′) на основании леммы 3.1 и формул (3.6) получаем (3.17). Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть $f(z)$ — целая функция роста $(\rho;\ \sigma)$, где $1/2<\rho<+\infty$ и $0\leqslant\sigma<+\infty$. Пусть, далее, при некотором $\theta\in(-\infty,+\infty)$ на границе $\partial\Delta^*(\rho;\ -\theta)$ области $\Delta^*(\rho;\ -\theta)$ функция $f(z)$ принадлежит классу $L_p^\omega(\partial\Delta^*(\rho;\ -\theta))$, где $1<p\leqslant 2$ и $-1<\omega<p-1$. Тогда для интеграла типа Коши*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta^*(\rho;\ -\theta)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\Delta^*(\rho;\ -\theta), \tag{3.20}$$

справедливы следующие утверждения:

1°. *Если порядок $\tilde\rho$ функции $f(z)$ равен ρ, а в точке $-\theta$ ее индикатриса $h(-\theta;\ f)\leqslant\tilde\sigma$ $(0\leqslant\tilde\sigma\leqslant\sigma)$, то $F(z)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость до целой функци роста $(\rho;\ \tilde\sigma)$ и допускает представление*

$$F(z)=\int\limits_0^{\tilde\sigma}E_\rho(e^{i\theta}z\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\varphi(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau, \tag{3.21}$$

где $\mu=\dfrac{1+\omega+(p-1)\rho}{p\rho}$ и $\varphi(\tau)\in L_q(0,\tilde\sigma)\,(1/p+1/q=1)$. Функция $\varphi(\tau)$ единственным образом почти всюду определяется из формул

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi}\,\rho}\left[e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\Phi^{(-)}(-\tau)-e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\Phi^{(+)}(\tau)\right]=\begin{cases}\varphi(\tau), & \tau\in(0,\tilde\sigma),\\ 0, & \tau\in(\tilde\sigma,+\infty),\end{cases} \tag{3.22}$$

где почти всюду на полуоси $(0,+\infty)$

$$\Phi^{(\pm)}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}f\left(t^{1/\rho}e^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\right)t^{\mu\rho-1}\,dt; \tag{3.22′}$$

2°. *Если порядок $\tilde\rho$ функции $f(z)$ меньше ρ, то $F(z)\equiv 0$.*

Доказательство. Образуем функции

$$G^{(\pm)}(\zeta)=\rho\,\left(e^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\zeta\right)^{\mu\rho}\zeta^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^\rho\left(e^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\zeta\right)^\rho}f\left(te^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\right)t^{\mu\rho-1}\,dt, \tag{3.23}$$

принадлежащие в силу леммы 3.1 классам $H_q^{\omega(1-q)}[\Delta(\rho;\ \theta-\pi/2\rho)]$ и $H_q^{\omega(1-q)}[\Delta(\rho;\ \theta+\pi/2\rho)]$ соответственно, и заметим, что луч $\operatorname{Arg}\zeta=\theta$

является пересечением границ угловых областей $\Delta(\rho;\ \theta-\pi/2\rho)$ и $\Delta(\rho;\ \theta+\pi/2\rho)$. По той же лемме 3.1 на этом луче $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$ имеют граничные функции $G^{(\pm)}(re^{i\theta})\in L_q^{\omega(1-q)}(0,+\infty)$, причем

$$e^{i\theta}G^{(\pm)}(e^{i\theta}\tau^{1/\rho})\,\tau^{1/\rho-\mu}=e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu}\,\Phi_1^{(\pm)}(\pm\tau),\ \tau\in(0,+\infty), \tag{3.24}$$

где почти всюду на полуоси $(0,+\infty)$

$$\Phi_1^{(\pm)}(\tau)=\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}\,f\left(t^{1/\rho}e^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\right)t^{\mu-1}\,dt. \tag{3.25}$$

Более того, формулы (3.24)—(3.25) могут быть записаны также в виде

$$e^{i\theta}G^{(\pm)}(re^{i\theta})=\underset{A\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \rho\, e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu}\,r^{\mu\rho-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^A e^{\mp ix^\rho r^\rho}f\left(xe^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}\right)x^{\mu\rho-1}\,dx, \tag{3.26}$$

где пределы в среднем берутся по метрике пространства $L_q^{\omega(1-q)}(0,+\infty)$.

С другой стороны, в силу теоремы 6.5 из монографии [2] и определения (3.23) функций $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$, они в угловых областях $\Delta(\rho;\ \theta-\pi/2\rho)$ и $\Delta(\rho;\ \theta+\pi/2\rho)$ соответственно совпадают с обобщенным преобразованием Бореля $g_{\rho,\mu}(\zeta;f)$ функции $f(z)$. По той же теореме 6.5 из [2], если порядок $\tilde{\rho}$ функции $f(z)$ равен ρ и $h(-\theta;f)\leqslant\tilde{\sigma}$, то $g_{\rho,\mu}(\zeta;f)$ голоморфна на луче $re^{i\theta}$: $r>\tilde{\sigma}^{1/\rho}$; а если $\tilde{\rho}<\rho$, то $g_{\rho,\mu}(\zeta;f)$ голоморфна во всей плоскости, за исключением точки $\zeta=0$.

Из сказанного заключаем, что

$$G^{(+)}(re^{i\theta})-G^{(-)}(re^{i\theta})=\begin{cases}0,\ r\in(\tilde{\sigma}^{1/\rho},+\infty), & \text{при}\ \tilde{\rho}=\rho;\\ 0,\ r\in(0,+\infty), & \text{при}\ \tilde{\rho}<\rho.\end{cases} \tag{3.27}$$

Положим теперь

$$J^{(\pm)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty}E_\rho(e^{i\theta}zr;\ \mu)\,e^{i\theta}G^{(\pm)}(re^{i\theta})\,dr \tag{3.28}$$

и отметим, что в силу оценки (3.19) и принадлежности $G^{(\pm)}(re^{i\theta})\in L_q^{\omega(1-q)}(0,+\infty)$ эти интегралы абсолютно сходятся при $z\in\Delta^*(\rho;\ -\theta)$.

Следовательно, для таких z

$$J^{(\pm)}(z)=\lim_{a\to+\infty}J_a^{(\pm)}(z), \tag{3.29}$$

где

$$J_a^{(\pm)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^a E_\rho(e^{i\theta}zr;\ \mu)\,e^{i\theta}G^{(\pm)}(re^{i\theta})\,dr. \tag{3.30}$$

Но поскольку при $z \in \Delta^*(\rho; -\theta)$ фиксированном $E_\rho(e^{i\theta}zr;\mu) \in L_\rho^\omega(0, +\infty)$, то в силу (3.26) и (3.30), можем написать

$$J_a^{(\pm)}(z) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_0^a E_\rho(e^{i\theta}zr;\mu) \times$$

$$\times\left\{\rho e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu} r^{\mu\rho-1}\int_0^A e^{\mp ix^\rho r^\rho} f(xe^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)})\, x^{\mu\rho-1}\,dx\right\}dr =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_0^A f(xe^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)})\, e^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)} \times$$

$$\times\left\{\rho e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu} e^{-i(-\theta\pm\pi/2\rho)} x^{\mu\rho-1}\int_0^a e^{\mp ix^\rho r^\rho} E_\rho(e^{i\theta}zr;\mu)\, r^{\mu\rho-1}\,dr\right\}dx,$$

причем перемена порядков интегрирования допустима на основании теоремы Фубини. В пределе при $A\to+\infty$ с учетом (3.29) получим

$$J^{(\pm)}(z) = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} f(xe^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)})\, e^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)} \times$$

$$\times\left\{\rho e^{\pm i\frac{\pi}{2}\mu} e^{-i(-\theta\pm\pi/2\rho)} x^{\mu\rho-1}\int_0^a e^{\mp ix^\rho r^\rho} E_\rho(e^{i\theta}zr;\mu)\, r^{\mu\rho-1}\,dr\right\}dx.$$

Наконец, поскольку по условию теоремы $f(xe^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}) \in L_\rho^\omega(0, +\infty)$, то в силу леммы 3.2 в последнем равенстве можно перейти к пределу. Придем к формулам

$$J^{(\pm)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \frac{f(xe^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)})}{x\exp[i(-\theta\pm\pi/2\rho)] - z}\, dxe^{i(-\theta\pm\pi/2\rho)}.$$

Следовательно, ввиду определения (3.20) функции $F(z)$ можем написать

$$F(z) = J^{(+)}(z) - J^{(-)}(z), \quad z\in\Delta^*(\rho; -\theta).$$

Отсюда на основании (3.27) и (3.28) получаем утверждение 2° теоремы.

С другой стороны, при $\tilde{\rho} = \rho$, опять в силу (3.27) и (3.28), можем написать

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\tilde{\sigma}^{1/\rho}} E_\rho(e^{i\theta}zr;\mu)\, e^{i\theta}\{G^{(+)}(re^{i\theta}) - G^{(-)}(re^{i\theta})\}\,dr. \quad (3.21')$$

Произведя под знаком интеграла замену переменной $r^\rho = \tau$ и обозначив

$$\varphi(\tau)=\frac{1}{2\pi\rho i}e^{i\theta}\left[G^{(+)}(\tau^{1/\rho}e^{i\theta})-G^{(-)}(\tau^{1/\rho}e^{i\theta})\right]\tau^{1/\rho-\mu},$$

придем к представлению (3.21) (пока в области $\Delta^*(\rho; -\theta)$) и в силу (3.24)—(3.25), а также (3.27)—к формулам обращения (3.22)—(3.22′).

Далее, из очевидной оценки

$$\left|\int_0^{\tilde{\sigma}} E_\rho(e^{i\theta}z\tau^{1/\rho};\mu)\,\varphi(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\right|\leqslant CE_\rho(|z|\tilde{\sigma}^{1/\rho};\mu)$$

и из того факта, что $E_\rho(z\tilde{\sigma}^{1/\rho};\mu)$—целая функция порядка ρ и типа $\tilde{\sigma}$ (см. [2], стр. 321), заключаем, что интеграл, стоящий в правой части представления (3.21), является целой функцией роста $(\rho; \tilde{\sigma})$. Следовательно, функция $F(z)$, представимая в области $\Delta^*(\rho; -\theta)$ формулой (3.21), аналитически продолжается на всю плоскость до целой функции роста $(\rho; \tilde{\sigma})$.

Наконец, чтобы доказать единственность функции $\varphi(\tau)$ и этим завершить доказательство теоремы, предположим, что $\varphi(\tau)\in L_q(0, \tilde{\sigma})$ и

$$\int_0^{\tilde{\sigma}} E_\rho(e^{i\theta}z\tau^{1/\rho};\mu)\,\varphi(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\equiv 0.$$

Тогда, в частности, при $z=xe^{i(\theta+\pi)}$ будем иметь

$$\int_0^{\tilde{\sigma}} E_\rho(-x\tau^{1/\rho};\mu)\,\varphi(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau=0,\quad x>0.$$

Производя здесь замену переменной $\tau=r^\rho$ и положив

$$\Psi(r)=\begin{cases}\varphi(r^\rho)\,r^{\mu\rho-1}, & r\in(0, \tilde{\sigma}^{1/\rho}),\\ 0, \quad r\in(\tilde{\sigma}^{1/\rho}, +\infty),\end{cases}$$

можем написать

$$\int_0^{+\infty} E_\rho(-xr;\mu)\,\Psi(r)\,dr=0,\quad x>0,$$

причем $\Psi(r)\in L_q^{\omega(1-q)}(0, +\infty)$, так как $\varphi(\tau)\in L_q(0, \tilde{\sigma})$. Отсюда, воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{R+r}=\rho R^{\mu\rho-1}\int_0^{+\infty} e^{-R^\rho x^\rho}E_\rho(-xr;\mu)\,x^{\mu\rho-1}\,dx\quad(R>0,\ r>0),$$

которая вытекает из (3.18′) при $\zeta=Re^{-i\theta}$ и $z=re^{i(-\theta+\pi)}$, и на основании теоремы Фубини, меняя порядки интегрирования, получим

$$\int_0^{+\infty}\frac{\Psi(r)}{R+r}\,dr=\rho R^{\mu\rho-1}\int_0^{+\infty}\Psi(r)\int_0^{+\infty}e^{-R^\rho x^\rho}E_\rho(-xr;\mu)\,x^{\mu\rho-1}\,dxdr=$$

$$=\rho R^{\mu\rho-1}\int_0^{+\infty}e^{-R^\rho x^\rho}x^{\mu\rho-1}\int_0^{+\infty}E_\rho(-xr;\mu)\,\Psi(r)\,drdx=0,\ R>0.$$

Таким образом, функция

$$G(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{\Psi(r)}{r-w}\,dr,\ w\in\mathbf{C}\diagdown[0,+\infty),$$

голоморфная в области $\mathbf{C}\diagdown[0,+\infty)$, обращается в нуль на отрицательной полуоси $(-\infty, 0)$ и, следовательно, $G(w)\equiv 0$. Отсюда, на основании леммы 2.1, заключаем, что $\Psi(r)$, а вместе с ней и $\varphi(\tau)$, эквивалентны нулю. Теорема доказана.

Отметим, не останавливаясь однако на доказательстве, что если в представлении (3.21) функция $\varphi(\tau)$ не эквивалентна нулю, то порядок функции $F(z)$ будет равен ρ.

3.2. Перейдем к установлению теоремы 0.1′, придерживаясь приведенных во введении определений и обозначений. При этом случаи $\rho>1/2$ и $\rho=1/2$ рассмотрим отдельно.

Пусть $1/2<\rho<+\infty$. Тогда ввиду (0.1) $\varkappa\geqslant 1$.

Пусть $f\in W_{\rho,\sigma}^{p,\omega}(\{\vartheta_k\};\ \{\sigma_k\})$. Полагая $\overline{\alpha}_k=+\infty$ и $\tilde{\vartheta}_k=-\vartheta_k$ $(k=0,\cdots,\varkappa)$, на основании условий (0.16) можем утверждать, что $f\in H_p^*[M]$, где $M=M\{\overline{\alpha};\tilde{\vartheta}\}$—это совокупность лучей $\Gamma(\tilde{\vartheta}_k)=\Gamma(-\vartheta_k)$ $(k=0,\cdots,\varkappa)$, исходящих из начала координат. Следовательно, по теореме 2.2 функция f на множестве M представима в виде

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\varkappa}F_k(z),\ z\in M,\tag{3.31}$$

где

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_k^*}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\Delta_k^*\ (k=0,\cdots,\varkappa).$$

При этом $\Delta_k^*=\mathbf{C}\diagdown\overline{\Delta}_k$ и

$$\Delta_k=\{z:\ -\vartheta_{k+1}<\operatorname{Arg} z<-\vartheta_k,\ 0<|z|<+\infty\}\ (k=0,\cdots,\varkappa).$$

Если компонента F_k соответствует паре вида $(\vartheta_{s_k};\ \vartheta_{s_k+1})$, то в силу условия (0.6) раствор соответствующей угловой области Δ_k равен $\vartheta_{s_k+1}-\vartheta_{s_k}=\pi/\rho_{s_k}<\pi/\rho$, тогда как порядок функции f равен $\rho<\rho_{s_k}$. Следовательно, по теореме 3.1 (2°), такая компонента $F_k(z)\equiv 0$.

Если же компонента F_k соответствует паре вида $(\vartheta_{r_k};\ \vartheta_{r_k+1})$, то раствор соответствующего угла Δ_k равен $\vartheta_{r_k+1}-\vartheta_{r_k}=\pi/\rho$. Следовательно, учитывая еще (0.9) и применив теорему 3.1 (1°), получим, что такая компонента представима в виде

$$F_k(z) = \int_0^{\sigma_k} E_\rho(e^{i\theta_k} z^{1/\rho};\ \mu)\ \varphi_k(\tau)\ \tau^{\mu-1}\, d\tau$$

и является целой функцией роста $(\rho;\ \sigma_k)$. При этом функция $\varphi_k(\tau)$ принадлежит классу $L_q(0, \sigma_k)$ и определяется из формул (0.12)—(0.13).

Учитывая сказанное и подставляя полученные выражения для компонент в (3.31), получим, что представление (0.11) справедливо на множестве M. И поскольку в обеих частях этой формулы стоят целые функции, то она справедлива на всей комплексной плоскости.

Таким образом, в случае $\rho > 1/2$ теорема 0.1′ доказана. В частности, когда $\rho=1$, $\varkappa=1$, $\vartheta_0=0$, $\vartheta_1=\pi$ и $\sigma_0=\sigma_1$, получим следующее утверждение.

Пусть $F(z)$—целая функция порядка $\rho=1$ и нормального типа, удовлетворяющая условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^p\, |x|^{\omega_0}\, dx < +\infty\ (1 < p \leqslant 2,\ -1 < \omega_0 < p-1), \tag{3.32}$$

$$\overline{\lim_{|y|\to+\infty}} \frac{\log|F(iy)|}{|y|} \leqslant \sigma_0. \tag{3.33}$$

Тогда функция $F(z)$ представима в виде

$$F(z) = \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} E_1(iz\tau;\ \mu_0)\ \varphi_0(\tau)\ |\tau|^{\mu_0-1}\, d\tau, \tag{3.34}$$

где $\mu_0 = \dfrac{\omega_0+p}{p}$ *и функция* $\varphi_0(\tau) \in L_q(0, \sigma_0)(1/p+1/q=1)$ *почти всюду определяется из формул*

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tau x}-1}{-ix} F(x)\,(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x}|x|)^{\mu_0-1}\, dx = \begin{cases} \varphi_0(\tau), & \tau \in (0, \sigma_0), \\ 0, & \tau \in (\sigma_0, +\infty); \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tau x}-1}{-ix} F(-x)\,(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x}|x|)^{\mu_0-1}\, dx = \begin{cases} \varphi_0(-\tau), & \tau \in (0, \sigma_0), \\ 0, & \tau \in (\sigma_0, +\infty). \end{cases} \tag{3.35}$$

Перейдем к доказательству теоремы 0.1′ в случае $\rho=1/2$.

Пусть $\rho=1/2$ *и* $\varkappa=0$. При этом без ограничения общности можем полагать $\vartheta_0=0$.

Итак, пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho=1/2$ и нормального типа, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|^p\, t^{\omega}\, dt < +\infty,\quad \overline{\lim_{t\to-\infty}} \frac{\log|f(t)|}{t} \leqslant \sigma_0. \tag{3.36}$$

Нужно доказать, что функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=\int_0^{\sigma_0} E_{1/2}(-z\tau^2;\ \mu)\,\varphi(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau, \tag{3.37}$$

где $\mu=\dfrac{2\omega+p+1}{p}$ и $\varphi(\tau)\in L_q(0,\sigma_0)$ почти всюду определяется из формулы

$$\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-it\tau}-1}{-it}\,f(t^2)\,(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} t}|t|)^{\mu-1}\,dt=\begin{cases}\varphi(\tau), & \tau\in(0,\sigma_0),\\ 0, & \tau\in(\sigma_0,+\infty)\end{cases} \tag{3.38}$$

(в рассматриваемом нами случае эта формула тождественна формулам (0.12) — (0.13)).

Рассмотрим отдельно три случая: 1) $-1<\omega<\frac{p}{2}-1$, 2) $\frac{p}{2}-1<\omega<p-1$, 3) $\omega=\frac{p}{2}-1$.

1-й случай $-1<\omega<\frac{p}{2}-1$. Вводя функцию $F(z)=f(z^2)$, без труда убеждаемся, что $F(z)$—целая функция порядка $\rho=1$ и нормального типа, удовлетворяющая условиям (3.32) и (3.33), где $\omega_0=2\omega+1$ (тогда $-1<\omega_0<p-1$, ввиду наложенных на ω условий $-1<\omega<\frac{p}{2}-1$). Следовательно, F представима в виде (3.34), причем нетрудно подсчитать, что $\mu_0=\mu$. Кроме того, ввиду четности функции $F(z)$, из (3.35) следует, что тогда $\varphi_0(\tau)$—также четная функция. Поэтому представление (3.34) можно переписать в виде

$$F(z)=\int_0^{\sigma_0}[E_1(iz\tau;\ \mu)+E_1(-iz\tau;\ \mu)]\,\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau. \tag{3.39}$$

Воспользовавшись формулой

$$2E_{1/2}(w^2;\ \mu)=E_1(w;\ \mu)+E_1(-w;\ \mu)$$

(см. [2], стр. 356, формулу (3.49)) и обозначив $\varphi(\tau)=2\varphi_0(\tau)$, с учетом тождества $F(z)=f(z^2)$ и (3.39), получим для $f(z)$ формулу представления (3.37). Формула (3.38) вытекает из первой из формул (3.35) после замены $F(x)$ на $f(x^2)$ и $2\varphi_0(\tau)$ на $\varphi(\tau)$.

2-й случай $\frac{p}{2}-1<\omega<p-1$. В этом случае вводим функцию $F(z)=zf(z^2)$ и опять убеждаемся, что $F(z)$— целая функция порядка $\rho=1$ и нормального типа. При этом $F(z)$ удовлетворяет условиям (3.32) и (3.33) с $\omega_0=2\omega-p+1$ (тогда $-1<\omega_0<p-1$ в силу условий $\frac{p}{2}-1<\omega<p-1$). Следовательно, $F(z)$ представима в виде (3.34), причем легко подсчитать, что $\mu_0=\mu-1$. Кроме того, из нечет-

ности функции $F(z)$ и формулы (3.35) следует, что $\varphi_0(\tau)$—нечетная функция. Поэтому (3.34) можно записать следующим образом:

$$F(z) = \int_0^{\sigma_0} [E_1(iz\tau;\ \mu-1) - E_1(-iz\tau;\ \mu-1)]\, \varphi_0(\tau)\, \tau^{\mu-2}\, d\tau.$$

Отсюда с учетом формулы

$$2wE_{1/2}(w^2;\ \mu+1) = E_1(w;\ \mu) - E_1(-w;\ \mu)$$

(см. [2], стр. 356, формулу (3.49)), обозначив $\varphi(\tau) = 2i\varphi_0(\tau)$, получим

$$zf(z^2) = z\int_0^{\sigma_0} E_{1/2}(-z^2\tau^2;\ \mu)\, \varphi(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau,$$

что, очевидно, эквивалентно формуле (3.37). Формула (3.38) следует из первой из формул (3.35), если в ней заменить $F(x)$ на $xf(x^2)$, μ_0 на $\mu-1$ и $2i\varphi_0(\tau)$ на $\varphi(\tau)$.

3-й случай $\omega = \frac{p}{2} - 1$. Выберем $\omega_1 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{p}{2} - 1\right)$ и положим $\mu_\omega = \mu = \frac{2\omega + 1 + p}{p}$, $\omega \in \left[\omega_1, \frac{p}{2} - 1\right]$ (тогда $\mu_\omega > 1$).

Нетрудно видеть, что при $\omega_1 \leqslant \omega < \frac{p}{2} - 1$ функция $f(z)$ удовлетворяет условиям (3.36), и ввиду уже доказанного для нее справедливы формулы (3.37)—(3.38) с $\mu = \mu_\omega$, $\omega_1 \leqslant \omega < \frac{p}{2} - 1$.

Положив для значений $\tau \in (0, \infty)$

$$\varphi_\omega(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tau t} - 1}{-it} f(t^2)\left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} t}|t|\right)^{\mu_\omega - 1} dt, \tag{3.40}$$

покажем, что

$$\lim_{\omega \to \frac{p}{2} - 1} \int_0^{+\infty} |\varphi_\omega(\tau) - \varphi_{\frac{p}{2}-1}(\tau)|^q\, d\tau = 0. \tag{3.41}$$

С этой целью введем функцию

$$\Psi(t) = \begin{cases} |f(t^2)|\, |t|^{\mu_{\omega_1} - 1}, & \text{при } |t| \leqslant 1, \\ |f(t^2)|\, |t|^{\mu_{p/2} - 1} & \text{при } |t| > 1, \end{cases}$$

и заметим, что $\Psi(t) \in L_p(-\infty, +\infty)$, причем при $\omega \in \left[\omega_1, \frac{p}{2} - 1\right]$

$$\left|f(t^2)\left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} t}|t|\right)^{\mu_\omega - 1}\right| \leqslant \Psi(t),\quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Отсюда на основании теоремы Лебега (см., напр., [19], стр. 168) следует, что

$$\lim_{\omega\to\frac{p}{2}-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t^2)\left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}t}|t|\right)^{\mu_\omega-1}-f(t^2)\left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}t}|t|\right)^{\mu_{p/2-1}-1}\right|^p dt=0. \quad (3.42)$$

Из этого предельного равечства и из теоремы Е. Титчмарша ([12], стр. 128) вытекает (3.41).

С другой стороны, из самого определения функции $E_{1/2}(z;\mu)$ и асимптотических свойств гамма-функции следует, что $E_{1/2}(z;\mu)$ непрерывна по обеим переменным $z\in\mathbf{C}$ и $\mu\in(-\infty,+\infty)$. Следовательно, при любом фиксированном $z\in\mathbf{C}$ функция $E_{1/2}(-z\tau^2;\mu_\omega)\,\tau^{\mu_\omega-1}$ непрерывна и ограничена при $\tau\in[0,\sigma_0]$ и $\omega\in\left[\omega_1;\frac{p}{2}-1\right]$. Учитывая это и (3.41), можем в (3.37)—(3.38) перейти к пределу. Следовательно, эти формулы верны и при $\omega=\frac{p}{2}-1$.

Чтобы завершить доказательство теоремы 0.1′, осталось показать, что если $f(z)$—целая функция порядка $\rho=1/2$ и нормального типа, то она не может более, чем для одного значения ϑ удовлетворять условию (0.10). Предположим противное, что для значений $-\pi<\vartheta_0<<\vartheta_1<\pi$

$$\int_0^{+\infty}|f(te^{-i\vartheta_k})|^p t^\omega dt<+\infty\quad(k=0,1). \quad (3.43)$$

Тогда, рассматривая опять при $-1<\omega<\frac{p}{2}-1$ $(\omega_0=2\omega+1)$ функцию $F(z)=f(z^2)$, придем к выводу, что $F(z)$—целая функция порядка $\rho=1$ и нормального типа, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{+\infty}|F(xe^{-i\tilde{\vartheta}_k})|^p x^{\omega_0}dx<+\infty\ (k=0,1,2,3),$$

где $\tilde{\vartheta}_0=\frac{\vartheta_0}{2}$, $\tilde{\vartheta}_1=\frac{\vartheta_0}{2}+\pi$, $\tilde{\vartheta}_2=\frac{\vartheta_1}{2}$, $\tilde{\vartheta}_3=\frac{\vartheta_1}{2}+\pi$. Однако лучи $\Gamma(-\tilde{\vartheta}_k)$ $(k=0,1,2,3)$ делят плоскость на четыре угла раствора, меньшего π. Следовательно, $F(z)\equiv0$, поскольку, выражаясь приведеными во введении терминами, пары вида $(\vartheta_{r_k};\ \vartheta_{r_k+1})$ для функции $F(z)$ отсутствуют. Значит, в этом случае $f(z)\equiv0$. Если же $\frac{p}{2}-1\leqslant\omega<p-1$, то при любом $\tilde{\omega}\in\left(-1,\frac{p}{2}-1\right)$ функция $f(z)$ вместе с условиями (3.43) будет удовлетворять этим условиям, с заменой ω на $\tilde{\omega}$. Тогда опять, в силу доказанного, $f(z)\equiv0$. Полученное противоречие показывает, что $f(z)$ не может удовлетворять условиям вида (3.43).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 17.III.1983

Վ. Մ. Մարտիրոսյան. Վերջավոր կարգի ամբողջ ֆունկցիաների ընդհանուր դասերի պարամետրական ներկայացման Մ. Մ. Ջրբաշյանի թեորեմի նոր ապացույց (*ամփոփում*)

Մ. Մ. Ջրբաշյանի [1, 2, 4, 5] կողմից տրվել են կամայական վերջավոր $\rho > 1/2$ *կարգի, նորմալ* $\le \sigma$ *տիպի և* $z = 0$ *կետից դուրս եկող ճառագայթների* Γ *համակարգի վրա մոդուլի քառակուսով ու* $|z|^{\omega}$ $(-1 < \omega < 1)$ *կշռով ինտեգրելի ամբողջ ֆունկցիաների դասերի պարամետրական ներկայացումները։ Դրանք հանդիսանում են էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների վերաբերյալ Վիներ-Պելիի դասական թեորեմի էական ընդհանրացումներ։ Նշված արդյունքները ստանալու Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից առաջարկված մեթոդը թույլ է տալիս ստանալ նաև այնպիսի ամբողջ ֆունկցիաների ավելի ընդհանուր դասերի ինտեգրալային ներկայացումները, որոնց մոդուլի* p $(1 < p \le 2)$ *աստիճանը ինտեգրելի է* $|z|^{\omega}$ $(-1 < \omega < p-1)$ *կշռով* Γ *համակարգի վրա։*

Ներկա աշխատանքում առաջարկվում է այդպիսի դասերի ինտեգրալային ներկայացումները ստանալու նոր մոտեցում, որը կայանում է խնդիրը Կոշիի տիպի ինտեգրալների ուսումնասիրությանը հանգեցնելում։

V. M. MARTIROSIAN. *A new proof of the M. M. Djrbashian theorem on the parametric representation for general classes of entire functions of finite order* (summary)

Parametric representations for general classes of entire functions of arbitrary finite order $\rho > 1/2$ and normal type $\le \sigma$, the squares of modulus for which are integrable with the weight $|z|^{\omega}$ $(-1 < \omega < 1)$ on the system Γ of rays, from the origin, were found by M. M. Djrbashian [1, 2, 4, 5]. These results essentially generalize the Wiener—Paley classical theorem about entire functions of exponential type. The method of M. M. Djrbashian also yields integral representations for more general classes of entire functions for which the power p $(1 < p \le 2)$ of modulus is integrable on Γ with the weight $|z|^{\omega}$ $(-1 < \omega < p-1)$.

The article offers a new approach to integral representations of such classes, based on reduction of the problem to Cauchy type integrals.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, ДАН СССР, 95, 1954, 1133—1136; Изв. АН СССР, сер. матем., 19, 1955, 133—180.
2. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
3. *R. Paley, N. Wiener*. Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934; *Н. Винер, Р. Пэли*. Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1964.
4. *М. М. Джрбашян*. Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, ДАН СССР, 85, 1952, 29—32; В более полной форме см. Матем. сб., 33 (75), № 3, 1953, 485—530.
5. *М. М. Джрбашян*. О представлении некоторых классов целых и квазицелых функций, ДАН СССР, 19, 1964, 9—12.
6. *А. Е. Аветисян*. Классы функций в комплексной области и их интегральные представления, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVII, № 1, 1982, 3—31.
7. *M. Plancherel, G. Pölya*. Functions enttières et integrales de Fourier multiples, Comentarii Mathematici Helvetici, 9, 1936—37, 224—248; 10, 1937—38, 110—163.
8. *R. P. Boas*. Representations for entire funtions of exponential type, Annals of Mathematics, 39, № 2, 1938, 269—286.
9. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сиб. матем.ж., 1, № 3, 1960, 383—426.

10. *В. М. Мартиросян*. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
11. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, М., ИИЛ, 1963.
12. *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
13. *С. А. Акопян*. Теорема о двух постоянных для функций класса H_p, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», II, № 2, 1967, 123—127.
14. *А. М. Седлецкий*. Эквивалентное определение пространств H_p в полуплоскости и некоторые приложения, Матем. сб., 96 (138), № 1, 1975, 75—82.
15. *E. M. Stein*. Note on singular integrals, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1957, 250—254.
16. *Г. М. Голузин*. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., «Наука», 1966.
17. *А. Е. Аветисян*. К теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна, ДАН Арм.ССР, 65, № 5, 1977, 266—270; Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 376—388.
18. *В. М. Мартиросян*. О замыкании, минимальности и базисности систем простейших рациональных дробей на системе лучей, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XV, № 4, 1980, 276—291.
19. *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц*. Линейные операторы. Общая теория, М., ИИЛ, 1962.