ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIX, № 1, 1984 Математика

УДК 517.948.32

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, Б. С. РУБИН

ОБ ОПЕРАТОРАХ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

Известная теорема Харди—Литтлвуда [1] для операторов J^α дробного интегрирования утверждает, что если $\varphi \in L_p(a, b)$, $1<p<\infty$, то $J^\alpha\varphi \in L_q(a, b)$, $q=\dfrac{p}{1-\alpha p}$ при $\alpha<\dfrac{1}{p}$ и $J^\alpha\varphi \in H^{\circ}_{\alpha-\frac{1}{p}}$ при $\alpha>\dfrac{1}{p}$. В настоящей работе доказываются весовые аналоги этой теоремы в предположении, что вес $\rho(x)$ имеет вид

$$\rho(x)=\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\gamma_k},\ a=a_1<a_2<\cdots<a_n=b. \tag{1}$$

Оказывается, что даже в случае веса в одной точке a_k ограничения на показатель γ_k существенно различны в зависимости от того, совпадает ли эта точка с концами или является внутренней его точкой. В случае общего веса и $\alpha>\dfrac{1}{p}$ здесь появляется еще один эффект: именно, если $\alpha-\dfrac{1}{p}=\min\limits_{k>2}\gamma_k$, то $J^\alpha\varphi$ уже не принадлежит пространству $H^{\circ}_{\alpha-\frac{1}{p}}$ с весом, а принадлежит аналогичному пространству с показателем $\alpha-\dfrac{1}{p}-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ и это по существу.

Отметим, что для весовых гельдеровских пространств ограниченность оператора дробного интегрирования исследовалась в [2].

§ 1. Обозначения и вспомогательные утверждения

Через $L_p([a, b], \rho)$, $1<p<\infty$, $-\infty<a<b<\infty$, будем обозначать пространство функций f, для которых $\rho f\in L_p(a, b)$ с нормой $\|f\|_{p,\rho}=\|\rho f\|_p=\|\rho f\|\ L_p(a, b)$. Через $H_\lambda[a, b]$ ($H^{\circ}_\lambda[a, b]$) обозначим пространство гельдеровских функций на $[a, b]$, для которых $|f(x+h)-f(x)|=O(h^\lambda)(o(h^\lambda))$, $h\to+0$, равномерно по x, с обычной нормой; $H_\lambda([a, b], \rho)$ ($\overset{\circ}{H}_\lambda([a, b], \rho)$) — весовое гельдеровское пространство, состоящее из функций f, таких, что $\rho f\in H_\lambda[a, b]$ (еще и $\lim\limits_{x\to a_k}\rho(x)f(x)=0$), причем, $\|f\|_{H_\lambda[a,b]}, \rho=\|\rho f\|_{H_\lambda[a,b]}$. Наконец, через J^α_{a+}, J^α_{b-} обозначим операторы дробного интегрирования Римана—Лиувилля:

$$(J^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^{1-\alpha}},\quad (J^{\alpha}_{b-}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b\frac{\varphi(y)\,dy}{(y-x)^{1-\alpha}}\tag{1.1}$$

и всюду ниже $p'=p(p-1)^{-1}$, а через c обозначены различные константы, встречающиеся в оценках.

Приведем ряд вспомогательных утверждений, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 1.1. (о сужении дробных интегралов). *Пусть $\varphi\in L_p([a, b], \rho)$, где $p>1$, $\rho(x)$ имеет вид* (1), $-\frac{1}{p}<\gamma_k<\frac{1}{p'}$, $k=1, 2, \cdots, n$ *и для некоторого индекса $k=j$ выполняется неравенство $\gamma_j>\alpha-\frac{1}{p}$. Тогда при $x>a_j$ справедливо соотношение $(J^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)=(J^{\alpha}_{a_j+}\psi)(x)$, где $\psi\in L_p([a_j, b], \tilde{\rho}_j)$, $\tilde{\rho}_j(x)=\prod\limits_{k=j}^{n}|x-a_k|^{\gamma_k}$, и имеет вид*

$$\psi(x)=\varphi(x)+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi(x-a_j)^{\alpha}}\int\limits_a^{a_j}\frac{(a_j-t)^{\alpha}\varphi(t)}{x-t}\,dt.$$

Доказательство этого утверждения в случае $\rho(x)\equiv1$ приведено в [3]. В нашем случае оно сохраняется.

Лемма 1.2. *Пусть* $0<\gamma<\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p}<\alpha<1+\frac{1}{p}$. *Тогда*

$$I(t)=\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{s^{\gamma}\,|s^{\alpha-1}-(1+s)^{\alpha-1}|}{|s-t|^{\gamma}}\right)^{p'}ds\leqslant K,\tag{1.2}$$

где K—константа, не зависящая от $t\geqslant0$.

Доказательство. Зафиксируем $N>0$ и положим

$$I(t)=\left(\int\limits_0^{N}+\int\limits_N^{\infty}\right)(\cdot)\,ds=I_1(t)+I_2(t).$$

Для $I_1(t)$ имеем

$$I_1(t)\leqslant\int\limits_0^{N}(s+[\alpha])^{(\gamma+\alpha-1)p'}|s-t|^{-\gamma p'}\,ds=I_1(N, t).$$

Если $t<N$, то $I_1(t)\leqslant I_1(N, t)\leqslant I_1(N, N)<\infty$. При $t>N$ и $\gamma+\alpha-1<0$ имеем

$$I_1(t)\leqslant I_1(t, t)+\int\limits_t^{N}(s-t)^{(\alpha-1)p'}\,ds\leqslant cN^{\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)p'}.$$

Аналогично при $t<N$ и $\gamma+\alpha-1>0$ имеем

$$I_1(t)\leqslant(N+1)^{(\gamma+\alpha-1)p'}\int\limits_0^{N}\frac{ds}{|s-t|^{\gamma p'}}\leqslant c(N+1)^{\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)p'}.$$

Переходя к оценке $I_2(t)$ воспользуемся неравенством $|s^{\alpha-1}-(s+1)^{\alpha-1}|\leqslant s^{\alpha-2}$, $s>0$. Тогда

$$I_2(t)\leqslant\int\limits_N^{\infty} s^{(\gamma+\alpha-2)p'}\frac{ds}{|t-s|^{\gamma p'}}=I_2(N,t).$$

Если $t<N$ то, с учетом, что $\alpha<\frac{1}{p}+1$ имеем $I_2(t)\leqslant I_2(N,t)\leqslant\leqslant I_2(N,N)<\infty$. При $t>N$ получаем

$$I_2(t)\leqslant I_2(t,t)+t^{\left(\alpha-1-\frac{1}{p}\right)p'}\int\limits_{\frac{N}{t}}^{1}\xi^{(\gamma+\alpha-2)p'}\frac{d\xi}{(1-\xi)^{\gamma p'}},$$

откуда легко видеть, что $I_2(t)=o(1)$, $t\to\infty$. Лемма доказана.

§ 2. Случай $\alpha>\frac{1}{p}$. Вес на левом конце

В настоящем параграфе рассматривается действие левостороннего оператора J^{α}_{a+} в случае $\frac{1}{p}<\alpha<1+\frac{1}{p}$, когда вес $\rho(x)$ имеет вид $(x-a)^{\gamma}$. Полученная ниже теорема будет применена в § 3 при исследовании общего случая с весом (1).

Теорема 2.1. *Пусть* $\frac{1}{p}<\alpha<\frac{1}{p}+1$, $\gamma<\frac{1}{p'}$, $1<p<\infty$. *Тогда оператор* J^{α}_{a+} *ограничен из* $L_p([a,b],(x-a)^{\gamma})$ *в* $\overset{0}{H}{}^{*}_{\alpha-\frac{1}{p}}([a,b],(x-a)^{\gamma})$.

Доказательство достаточно провести для случая $a=0$, $b=1$. Положим $\psi(y)=y^{\gamma}\varphi(y)\in L_p(0,1)$ и обозначим $F(x)=x^{\gamma}(J^{\alpha}_{0+}y^{-\gamma}\psi(y))(x)$. Теорема 2.1 будет доказана, если мы покажем, что $F(x)\in H^{*}_{\alpha-\frac{1}{p}}[0,1]$. Имеем $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$, где $F_1(x)=(J^{\alpha}_{0+}\psi)\times\times(x)\in H^{*}_{\alpha-\frac{1}{p}}[0,1]$ (см. [1]), а $F_2(x)=F(x)-(J^{\alpha}_{a+}\psi)(x)$. Пусть $0\leqslant x<<x+h\leqslant 1$. Тогда $F_2(x+h)-F_2(x)=\sum\limits_{k=1}^{3}F_{2k}(x)$, где

$$F_{21}(x)=\int\limits_x^{x+h}\frac{(x+h)^{\gamma}-y^{\gamma}}{y^{\gamma}}\cdot\frac{\psi(y)\,dy}{(x+h-y)^{1-\alpha}},$$

$$F_{22}(x)=[(x+h)^{\gamma}-x^{\gamma}]\int\limits_0^x\frac{\psi(y)\,dy}{y^{\gamma}(x+h-y)^{1-\alpha}},$$

$$F_{23}(x)=\int\limits_0^x\frac{x^{\gamma}-y^{\gamma}}{y^{\gamma}}[(x+h-y)^{\alpha-1}-(x-y)^{\alpha-1}]\,\psi(y)\,dy.$$

Пусть вначале $\gamma > 0$. Для $F_{21}(x)$ получаем

$$|F_{21}(x)| \leqslant \|\psi\|_p \left(\int_x^{x+h} \left| \frac{(x+h)^\gamma - y^\gamma}{y^\gamma (x+h-y)^{1-\alpha}} \right|^{p'} dy \right)^{1/p'} \leqslant ch^{\alpha - \frac{1}{p}} \|\psi\|_p.$$

Оценивая $F_{22}(x)$, найдем

$$|F_{21}(x)| \leqslant \|\psi\|_p [(x+h)^\gamma - x^\gamma] \left(\int_0^{x+h} \frac{dy}{y^{\gamma p'} (x+h-y)^{(1-\alpha)p'}} \right)^{1/p'} =$$

$$= c \|\psi\|_p [(x+h)^\gamma - x^\gamma] (x+h)^{\alpha - \frac{1}{p}}.$$

Остается учесть, что

$$\sup_{x,\, h} h^{\frac{1}{p} - \alpha} [(x+h)^\gamma - x^\gamma] (x+h)^{\alpha - \frac{1}{p}} \leqslant c_1 < \infty.$$

Наконец, для $F_{23}(x)$ имеем

$$|F_{23}(x)| \leqslant \|\psi\|_p \left(\int_0^x \frac{(x-y)^{\gamma p'}}{y^{\gamma p'}} |(x-y)^{\alpha-1} - (x+h-y)^{\alpha-1}|^{p'} dy \right)^{1/p'}.$$

Произведя замену $x - y = hs$, получаем $|F_{23}(x)| \leqslant h^{\alpha - \frac{1}{p}} \|\psi\|_p \left(I \left(\frac{x}{h} \right) \right)^{1/p'}$ и остается воспользоваться леммой 1.2. Пусть теперь $\gamma < 0$. Тогда

$$|F_{21}(x)| < 2 \int_x^{x+h} \frac{|\psi(y)|\, dy}{(x+h-y)^{1-\alpha}} \leqslant ch^{\alpha - \frac{1}{p}} \|\psi\|_p.$$

Для $F_{22}(x)$ при $|\gamma| \leqslant 1$ и $x > h$ имеем

$$|F_{22}(x)| \leqslant \frac{h |\gamma| \|\psi\|_p}{x (x+h)^{|\gamma|}} \left(\int_0^x \frac{dy}{y^{\gamma p'} (x-y)^{(1-\alpha) p'}} \right)^{1/p'} =$$

$$= c \|\psi\|_p h^{\alpha - \frac{1}{p}} \left(\frac{h}{x} \right)^{1 + \frac{1}{p} - \alpha} \left(\frac{x}{x+h} \right)^{|\gamma|} \leqslant c \|\psi\|_p h^{\alpha - \frac{1}{p}}.$$

Аналогично, при $|\gamma| \geqslant 1$

$$|F_{22}(x)| \leqslant \frac{h |\gamma| \|\psi\|_p}{(x+h) x^{|\gamma|}} \left(\int_0^x \frac{dy}{y^{\gamma p'} (x-y)^{(1-\alpha) p'}} \right)^{1/p'} \leqslant ch^{\alpha - \frac{1}{p}} \|\psi\|_p.$$

Наконец, при $x \leqslant h$ имеем $|F_{22}(x)| \leqslant 2 |(I_{0+}^\alpha \psi)(x)| \leqslant cx^{\alpha - \frac{1}{p}} \|\psi\|_p < ch^{\alpha - \frac{1}{p}} \|\psi\|_p$.

Оценим последний интеграл. Имеем

$$|F_{23}(x)| \leqslant 2 \|\psi\|_p \left(\int_0^x \left| \frac{1}{(t+h)^{1-\alpha}} - \frac{1}{t^{1-\alpha}} \right|^{p'} dt \right)^{1/p'}.$$

Полагая здесь $t=hy$, получаем $|F_{22}(x)| \leqslant c\|\psi\|_p h^{\alpha-\frac{1}{p}}$. Из полученных оценок, с учетом неравенства $|F(x)| \leqslant cx^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p$ получаем, что

$$\|J^{\alpha}_{0+}\varphi\|_{H_{\alpha-\frac{1}{p}}([0,1],x^{\gamma})} \leqslant c\|\varphi\|_{L_p([0,1],x^{\gamma})}. \tag{2.1}$$

Остается проверить, что $I^{\alpha}_{0+}\varphi \in H^{\circ}_{\alpha-\frac{1}{p}}([0,1], x^{\gamma})$. Пусть $\varepsilon > 0$, $\psi_\varepsilon(x) \in C[0,1]$, $\operatorname{supp}\psi_\varepsilon \subset (0,1)$ и $\|x^{\gamma}\varphi(x) - \psi_\varepsilon(x)\|_p < \varepsilon$. Тогда $\varphi_\varepsilon(x) = x^{-\gamma}\psi_\varepsilon(x) \in C(0,1)$ и $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L_p([0,1],x^{\gamma})} < \varepsilon$. Полагая $(\Delta u)(x) = u(x+h) - u(x)$, с учетом (1.3), получаем

$$\frac{|\Delta(x^{\gamma}J^{\alpha}_{0+}\varphi)|}{h^{\alpha-\frac{1}{p}}} \leqslant \frac{|\Delta(x^{\gamma}J^{\alpha}_{0+}(\varphi-\varphi_\varepsilon))|}{h^{\alpha-\frac{1}{p}}} + \frac{|\Delta(x^{\gamma}J^{\alpha}_{0+}\varphi_\varepsilon)|}{h^{\alpha-\frac{1}{p}}} \leqslant$$

$$\leqslant c\|\varphi-\varphi_\varepsilon\|_{L_p([0,1],x^{\gamma})} + \frac{|\Delta(x^{\gamma}J^{\alpha}_{0+}\varphi_\varepsilon)|}{h^{\alpha-\frac{1}{p}}} \leqslant c\varepsilon + o(1),\ h\to 0.$$

Здесь учтено, что $\varphi_\varepsilon(x) \in L_q([0,1], x^{\gamma})$ при любом $q > p$, так что $\Delta(x^{\gamma}J^{\alpha}_{0+}\varphi_\varepsilon)(x) = o(h^{\alpha-\frac{1}{p}})$ при $h\to 0$. Теорема доказана.

§ 3. Случай $\alpha > \frac{1}{p}$. Общий вес

В этом параграфе теорема 2.1 будет обобщена на случай веса вида (1).

Теорема 3.1. *Пусть* $\rho(x)$ *имеет вид* (1), *причем* $\gamma_1 < \frac{1}{p'}$, $0 < \gamma_k < \frac{1}{p'}$, $k=2,3,\cdots,n-1$; $\gamma_n > 0$. *Если* $\frac{1}{p} < \alpha < 1 + \frac{1}{p}$, $1 < p < \infty$, то J^{α}_{a+} *ограничен из* $L_p([a,b],\rho)$ *в* $H_\lambda([a,b],\rho)$, *где*

$$\lambda = \begin{cases} \alpha-\frac{1}{p}, & \text{если } \alpha-\frac{1}{p} < \min\limits_{k>2}\gamma_k, \\ \min\limits_{k>2}\gamma_k, & \text{если } \alpha-\frac{1}{p} > \min\limits_{k>2}\gamma_k, \\ \alpha-\frac{1}{p}-\varepsilon, & \text{если } \alpha-\frac{1}{p} = \min\limits_{k>2}\gamma_k. \end{cases} \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть, как и в теореме 2.1

$$F(x) = \rho(x)(J^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{\rho(x)}{\rho(y)}\cdot\frac{\psi(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}, \tag{3.2}$$

где $\psi=\rho\varphi\in L_p(a, b)$. Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $F(x)\in \overset{\circ}{H}_\lambda[a, b]$. Прежде всего изучим поведение $F(x)$ в окрестности точек a_k.

Лемма 3.1. *В условиях теоремы* 3.1 $F(a_k)=0$, $k=1, 2,\cdots, n$

Доказательство леммы. При $k=1$ ($a_k=a$) и $x\to a$ имеем.

$$|F(x)|\leqslant c(x-a)^{\gamma_1}\int_a^x\frac{|\psi(y)|\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}(y-a)^{\gamma_1}}\leqslant c\|\psi\|_p(x-a)^{\alpha-\frac{1}{p}}.$$

Пусть $k>1$. Зафиксируем точки $c_{k-1}\in(a_{k-1}, a_k)$, $k=2, \cdots, n$. Тогда, при $x\in(c_k, a_k)$

$$F(x)=\left(\int_a^{c_{k-1}}+\int_{c_{k-1}}^x\right)\frac{\rho(x)}{\rho(y)}\cdot\frac{|\psi(y)|\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}=J_1+J_2.$$

Отсюда

$$J_1\leqslant c(a_k-x)^{\gamma_k}\|\psi\|_p\left(\int_a^{c_{k-1}}\frac{dy}{(c_{k-1}-y)^{(1-\alpha)p'}\prod\limits_{l\leqslant k-1}|y-a_l|^{\gamma_l p'}}\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant c(a_k-x)^{\gamma_k}\|\psi\|_p.$$

Аналогично

$$J_2\leqslant c(a_k-x)^{\gamma_k}\|\psi\|_p\left(\int_{c_{k-1}}^x\frac{dy}{(x-y)^{(1-\alpha)p'}(a_k-y)^{\gamma_k p'}}\right)^{1/p'}. \tag{3.3}$$

Отсюда, если $\gamma_k<\alpha-\dfrac{1}{p}$, то $J_2\leqslant c\|\psi\|_p(a_k-x)^{\gamma_k}$, а если $\gamma_k>\alpha-\dfrac{1}{p}$, то после замены $y=x-\xi(a_k-x)$ нетрудно получить, что $J_2\leqslant c\|\psi\|_p\times$ $\times(a_k-x)^{\alpha-\frac{1}{p}}$. Наконец, если $\gamma_k=\alpha-\dfrac{1}{p}$, то при достаточно малом $\varepsilon>0$ имеем

$$J_2\leqslant c(a_k-x)^{\gamma_k-\varepsilon}\|\psi\|_p\left(\int_{c_{k-1}}^x\left(\frac{a_k-y}{x-y}\right)^{(1-\alpha)p'}\frac{dy}{(a_k-y)^{1-\varepsilon p'}}\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant c\|\psi\|_p(a_k-x)^{\alpha-\frac{1}{p}-\varepsilon}.$$

Таким образом, $F(a_k-0)=0$, $k=2, 3,\cdots, n$. Аналогично проверяется, что $F(a_k+0)=0$, $k=1, 2, \cdots, n-1$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. В силу теоремы 2.1 ясно, что $F(x)\in H_{\alpha-\frac{1}{p}}[a, c_1]$. Покажем, что $F(x)\in H_\lambda$ на всех отрезках $[a_k, c_k]$, $[c_k, a_{k+1}]$. Имеем $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$, где $F_1(x)=(J^\alpha_{a+}\psi)(x)\in$ $\in H^{\circ}_{\alpha-\frac{1}{p}}[a, b]$, а

$$F_2(x)=\int_a^x \frac{\rho(x)-\rho(y)}{\rho(y)}(x-y)^{\alpha-1}\psi(y)\,dy,$$

так что наше утверждение достаточно проверить для $F_2(x)$.

Имеем $F_2(x+h)-F_2(x)=\sum_{k=1}^{3}F_{2k}(x)$, где

$$F_{21}(x)=\int_x^{x+h}\frac{\rho(x+h)-\rho(y)}{\rho(y)}\cdot\frac{\psi(y)\,dy}{(x+h-y)^{1-\alpha}},$$

$$F_{22}(x)=\int_a^x\frac{\rho(x+h)-\rho(x)}{\rho(y)}\cdot\frac{\psi(y)\,dy}{(x+h-y)^{1-\alpha}},$$

$$F_{23}(x)=\int_a^x\frac{\rho(x)-\rho(y)}{\rho(y)}\left[(x+h-y)^{\alpha-1}-(x-y)^{\alpha-1}\right]\psi(y)\,dy.$$

Итак, пусть $k\geqslant 2$, $\gamma_k\leqslant 1$* и $c_{k-1}\leqslant x<x+h\leqslant a_k$. Для $F_{21}(x)$ имеем

$$|F_{21}(x)|\leqslant\|\psi\|_p\left(\int_x^{x+h}\left|\frac{\rho(x+h)-\rho(y)}{\rho(y)(x+h-y)^{1-\alpha}}\right|^{p'}dy\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant c\|\psi\|_p\left(\int_x^{x+h}\frac{dy}{(x+h-y)^{(1-\alpha-\gamma_k)p'}(a_k-y)^{\gamma_k p'}}\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant c\|\psi\|_p\left(\int_x^{x+h}\frac{dy}{(x+h-y)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{1/p'}=ch^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p.$$

Оценивая $F_{22}(x)$, найдем

$$|F_{22}(x)|\leqslant ch^{\gamma_k}\|\psi\|_p\left(\int_a^x\frac{dy}{\rho^{p'}(y)(x+h-y)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant ch^{\gamma_k}\|\psi\|_p\left(\int_a^{c_{k-1}}\frac{dy}{\rho^{p'}(y)(c_{k-1}-y)^{(1-\alpha)p'}}+\right.$$

$$\left.+\int_{c_{k-1}}^x\frac{dy}{(a_k-y)^{\gamma_k p'}(x-y)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{1/p'}.$$

Поступая так же, как и в (3.3), получаем, что при $\gamma_k<\alpha-\dfrac{1}{p}$ выражение в круглых скобках ограничено и $|F_{22}(x)|\leqslant ch^{\gamma_k}\|\psi\|_p$. Если

---

* При $k=n$ и $\gamma_n>1$ оценки производятся аналогично с помощью формулы Лагранжа.

$\gamma_k > \alpha - \dfrac{1}{p}$ выражение в круглых скобках оценивается величиной $c\,(1+$ $+(a_k-x)^{\left(\alpha-\frac{1}{p}-\gamma_k\right)p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c_1\,\Big(1+h^{\left(\alpha-\frac{1}{p'}-\gamma_k\right)p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}$ и поэтому $|F_{22}(x)| \leqslant$ $\leqslant c\,h^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p$. Аналогично, при $\alpha-\dfrac{1}{p}=\gamma_k$ получаем $|F_{22}(x)| \leqslant$ $\leqslant c\,h^{\alpha-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon}{p'}}\|\psi\|_p$.

Перейдем к оценке $F_{23}(x)$. Зафиксируем произвольную точку $\delta_{k-1}\in(a_{s-1},\ c_{k-1})$ и представим $F_{23}(x)$ в виде

$$F_{23}(x)=\left(\int\limits_a^{\delta_{k-1}}+\int\limits_{\delta_{k-1}}^{c_{k-1}}+\int\limits_{c_{k-1}}^{x}\right)\frac{\rho(x)-\rho(y)}{\rho(y)}[(x+h-y)^{\alpha-1}-(x-y)^{\alpha-1}]\times$$
$$\times\psi(y)\,dy=A_1(x)+A_2(x)+A_3(x).$$

Поскольку $x\in(c_{k-1},\ a_k)$, очевидно

$$|A_1(x)|\leqslant c\,h\int\limits_a^{\delta_{k-1}}(1+\rho^{-1}(y))\,|\psi(y)|\,dy\leqslant c\,h\,\|\psi\|_p.$$

Для $A_2(x)$ получаем

$$|A_2(x)|\leqslant c\,\|\psi\|_p\left(\int\limits_{\delta_{k-1}}^{c_{k-1}}|(x-y)^{\alpha-1}-(x+h-y)^{\alpha-1}|^{p'}\,dy\right)^{1/p'}\leqslant c h^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p.$$

Наконец

$$|A_3(x)|\leqslant c\,\|\psi\|_p\left(\int\limits_{c_{k-1}}^{x}\left(\frac{x-y}{a_k-y}\right)^{p'\gamma_k}|(x-y)^{\alpha-1}-(x+h-y)^{\alpha-1}|^{p'}\,dy\right)^{1/p'},$$

откуда $|A_3(x)|\leqslant c h^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\psi\|_p$.

Итак, $F(x)\in H_\lambda$ на всех отрезках $[c_{k-1},\ a_k]$ и очевидно выполняется нужная оценка для нормы. Аналогичный результат справедлив для отрезков $[a_k,\ c_k]$. Теорема доказана.

Замечание 1. С помощью рассуждений, примененных в доказательстве теоремы 2.1, легко показать, что при $\alpha-\dfrac{1}{p}<\min\limits_{k\geqslant 2}\gamma_k$ оператор J^α_{a+} ограничен из $L_p([a,\ b],\ \rho)$ в $\overset{\circ}{H}{}^\alpha_\lambda([a,\ b],\ \rho)$. Если же $\alpha-\dfrac{1}{p}>$ $>\min\limits_{k\geqslant 2}\gamma_k$, то это неверно. Действительно, пусть, например, $a=0,\ b=1$, $\rho(x)=x^{\gamma_1}(1-x)^{\gamma_2}$, $\alpha-\dfrac{1}{p}>\gamma_2$, $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,1]$ и $\operatorname{supp}\varphi\subset$ $\subset(0,1)$. Тогда $\Delta\,(x^{\gamma_1}(1-x)^{\gamma_2}J^\alpha_{0+}\varphi)=(1-x-h)^{\gamma_2}\Delta\,(x^{\gamma_1}J^\alpha_{0+}\varphi)+x^{\gamma_1}\times$

$\times (J_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)\,\Delta\,((1-x)^{\gamma_n}) = o(h^{\alpha-\frac{1}{p}}) + O(1)\,\Delta(1)\,\Delta((1-x)^{\gamma_n}) \neq o(h^{\gamma_n})$ равномерно по x из-за второго слагаемого.

Замечание 2. (о неулучшаемости условий по γ_k). При нарушении условий $\gamma_k < \frac{1}{p'}$, $k=1, 2, \cdots, n-1$, интеграл $J_{0+}^{\alpha}\varphi$ может расходиться. Далее, если $\gamma_k<0$, $k=2,\cdots, n$, то функция $\rho(x)(J_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)$ может оказаться неограниченной в соответствующих точках a_k. Действительно, полагая $\varphi(x)=\rho^{-1}(x)$, имеем при $x\to a_k$

$$\rho(x)(J_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) \geqslant c\,|x-a_k|^{\gamma_k}\int\limits_{a}^{c_{k-1}}\frac{dy}{\rho(y)}\to\infty.$$

Замечание 3. (о неулучшаемости условий теоремы при $\alpha-\frac{1}{p}=\min\limits_{k>2}\gamma_k$). Пусть, например, $a=0$, $b=1$, $\rho(x)=(1-x)^{\gamma}$, $\gamma=$ $=\alpha-\frac{1}{p}$, $\varphi=\rho^{-1}\psi\cdot\Gamma(\alpha)$, где $\psi(x)=0$ при $0<x<1-e^{-1}$ и $\psi(x)=$ $=(1-x)^{-\frac{1}{p}}|\ln(1-x)|^{-1}$ при $1-e^{-1}<x<1$. Тогда при $\alpha\leqslant 1$

$$F(x)=\rho(x)(J_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) > (1-x)^{\gamma}\int\limits_{1-e^{-1}}^{x}\frac{dy}{(1-y)\,|\ln(1-y)|} =$$

$$=(1-x)^{\gamma}\ln|\ln(1-x)|.$$

Отсюда, с учетом, что $F(1)=0$, получаем $|F(x)-F(1)|\geqslant(1-$ $-x)^{\gamma}\ln|\ln(1-x)|$, откуда следует, что $J_{0+}^{\alpha}\varphi \bar{\in} H_{\alpha-\frac{1}{p}}([0,1],\rho)$.

§ 4. Случай $\alpha<\frac{1}{p}$

Приведем сначала результат для случая веса на левом конце отрезка.

Теорема 4.1. *Пусть $p>1$, $\gamma<\frac{1}{p'}$, $0<\alpha<\frac{1}{p}$. Тогда оператор J_{a+}^{α} ограничен из $L_p([a,b],(x-a)^{\gamma})$ в $L_q([a,b],(x-a)^{\gamma})$, где $q=p(1-\alpha p)^{-1}$*

При $\alpha<\min\left(\frac{1}{p}, \gamma+\frac{1}{p}\right)$ это утверждение следует из ([1], стр. 581), так что при $\gamma\geqslant 0$ теорема 4.1 верна. Если же $\gamma<0$, то утверждение теоремы следует из оценки $|(x-a)^{\gamma}(J_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)|\leqslant(J_{a+}^{\alpha}|\varphi_0(y)|)(x)\in$ $\in L_q$, где $\varphi_0(y)=(y-a)^{\gamma}\varphi(y)\in L_p(a,b)$. Рассмотрим случай общего веса.

Теорема. 4.2. *Пусть вес $\rho(x)$ имеет вид* (1), *где* $1<p<\frac{1}{\alpha}$,

$\gamma_k < \frac{1}{p'}$, $k=1,\cdots,n-1$. *Тогда оператор* J^α_{a+} *ограничен из* $L_p([a, b], \rho)$ *в* $L_q([a, b], \rho_1)$, *где* $q=p(1-\alpha p)^{-1}$, $\rho_1(x)=\prod_{k=1}^{n} |x-a_k|^{\delta_k}$, $\delta_1=\gamma_1$,

$$\delta_k=\begin{cases} \gamma_k \text{ при } \gamma_k>\alpha-\frac{1}{p}, \\ \alpha+\varepsilon-\frac{1}{p} \text{ при } \gamma_k\leqslant\alpha-\frac{1}{p}, \end{cases} \quad k=2, 3,\cdots, n,$$

ε (>0) — *произвольное число.*

Доказательство. Пусть $\rho_k(x)=|x-a_k|^{\delta_k}$. Зафиксируем $c_k\in(a_k, a_{k+1})$, $k=1, 2,\cdots, n-1$, и покажем, что оператор J^α_{a+} ограничен из $L_p([a, b], \rho)$ в пространства $L_q([a_k, c_k], \rho_k)$, $k=1, 2,\cdots, n-1$, $L_q([c_k, a_{k+1}], \rho_{k+1})$, $k=2,\cdots, n-1$. При $k=1$ это утверждение вытекает из теоремы 4.1. Пусть $k\geqslant 2$. Тогда при $x\in[c_{k-1}, c_k]$

$$(J^\alpha_{a+}\varphi)(x)=\left(\int_a^{c_{k-1}}+\int_{c_{k-1}}^{x}\right)\frac{\varphi(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}=J_1+J_2. \tag{4.1}$$

Полагая $\varphi_0(y)=\rho(y)\varphi(y)\in L_p(a, b)$ для первого слагаемого имеем

$$|\rho_k J_1|\leqslant c\,|a_k-x|^{\delta_k}\int_a^{c_{k-1}}\prod_{l=1}^{k-1}|y-a_l|^{-\gamma_l}\frac{|\varphi_0(y)|}{(x-y)^{1-\alpha}}\,dy.$$

Отсюда при $x\in(a_k, c_k)$, $k=2,\cdots, n-1$, следует, что $|\rho_k J_1|\leqslant c\rho_k(x)\times\times\|\varphi_0\|_p\in L_q(a_k, c_k)$. Если $x\in(c_{k-1}, a_k)$, $k=2,\cdots, n$, то выберем точки $c'_{k-1}\in(c_{k-1}, a_k)$ и тогда при $x\in(c_{k-1}, c'_{k-1})$ получаем

$$|\rho_k J_1|\leqslant c\left(\|\varphi_0\|_p+\int_{a_{k-1}}^{x}\frac{|\varphi_0(y)|\,dy}{(y-a_{k-1})^{\gamma_{k-1}}(x-y)^{1-\alpha}}\right)\in L_q\, c_{k-1}, c'_{k-1}).$$

Если же $x\in(c'_{k-1}, a_k)$, то $|\rho_k J_1|\leqslant c\rho_k(x)\|\varphi_0\|_p\in L_q(c'_{k-1}, a_k)$.

Перейдем к оценке J_2. Рассмотрим два случая.

1°. Пусть $\gamma_k>\alpha-\frac{1}{p}$, $k=2,\cdots, n$. В случае $x\in(c_{k-1}, a_k)$, $k=2,\cdots, n-1$, применяя соотношение (15′) из [4] имеем

$$|J_2|\leqslant cJ^\alpha_{c_{k-1}+}(|\varphi_0|\rho_k^{-1})=cJ^\alpha_{a_k}\tilde{\varphi}, \text{ где } \tilde{\varphi}\in L_p([c_{k-1}, a_k], \rho_k),$$

откуда в силу аналога теоремы 4.1 для правосторонних интегралов следует, что $J_2\in L_q([c_{k-1}, a_k], \rho_k)$. Покажем, что $\|\rho_n J_2\|_{L_q(c_{n-1}, b)}\leqslant c\|\varphi_0\|_p$. Если $\gamma_n<\frac{1}{p'}$, рассуждения проводятся так же, как и в предыдущем случае. Если $\gamma_n>\frac{1}{p'}$, то

$$|\rho_k J_2| \leqslant c\,(b-x)^{\frac{1}{p'}-\varepsilon}\,(I^{\alpha}_{c_{n-1}+}(b-y)^{\varepsilon-\frac{1}{p'}}\,|\varphi_0|)(x)$$

и мы оказываемся в уже рассмотренной ситуации. Далее в случае $x\in(a_k, c_k)$, $k=2,\cdots, n-1$ в силу леммы 1.1 справедливо соотношение $J_2=J^{\alpha}_{a_k+}\psi$, где

$$\psi(x)=\varphi(x)+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi(x-a_k)^{\alpha}}\int\limits_{c_{k-1}}^{a_k}\frac{(a_k-t)^{\alpha}\,\varphi(t)}{x-t}\,dt\in L_p([a_k, c_k], \rho_k).$$

Отсюда вытекает, что $J_2\in L_q([a_k, c_k], \rho_k)$.

2°. Пусть $\gamma_k\leqslant\alpha-\dfrac{1}{p}$. Если $x\in(c_{k-1}, a_k)$, $k=2,\cdots, n$, то

$$|\rho_k J_2|\leqslant c\rho_k(x)\,(J^{\alpha}_{c_{k-1}+}(a_k-y)^{-\gamma_k}\,|\varphi_0|)(x)\leqslant$$

$$\leqslant c\,(a_k-x)^{\delta_k-\gamma_k}\left(\int\limits_{c_{k-1}}^{x}\frac{((a_k-y)^{|\gamma_k|}-(a_k-x)^{|\gamma_k|})\,|\varphi_0(y)|}{(a_k-x)^{|\gamma_k|}\,(x-y)^{1-\alpha}}\,dy+\right.$$

$$\left.+(J^{\alpha}_{c_{k-1}+}|\varphi_0|)(x)\right)=c\,(J_{21}+J_{22}).$$

Очевидно $J_{22}\in L_q(c_{k-1}, a_k)$. Оценим J_{21}. При $|\gamma_k|>1$ получаем $J_{21}\leqslant c\rho_k(x)(J^{\alpha+1}_{c_{k-1}+}|\varphi_0|)(x)\leqslant c\,\|\varphi_0\|_p\,\rho_k(x)\in L_q(c_{k-1}, a_k)$. При $|\gamma_k|<1$ воспользуемся неравенством

$$(r+h)^{\lambda}-r^{\lambda}\leqslant\theta r^{\lambda-\frac{\lambda}{\theta}}h^{\frac{\lambda}{\theta}},\quad 0<r<r+h,\quad 0<\lambda<\theta\leqslant 1.$$

Имеем $J_{21}\leqslant(a_k-x)^{\delta_k+|\gamma_k|\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}(J^{\alpha+\frac{|\gamma_k|}{\theta}}_{c_{k-1}+}|\varphi_0|)(x)\leqslant c\,\|\varphi_0\|_p\,(a_k-x)^{\delta_k+|\gamma_k|\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}\in$ $\in L_q(c_{k-1}, a_k)$, так как при θ достаточно близких к единице $(|\gamma_k|\,(|\gamma_k|+\varepsilon)^{-1}<\theta<1)$ справедливы неравенства

$$\alpha+\frac{|\gamma_k|}{\theta}>\frac{1}{p},\quad \delta_k+|\gamma_k|\left(1-\frac{1}{\theta}\right)>\alpha-\frac{1}{p}.$$

Наконец, если $x\in(a_k, c_k)$, $k=2,\cdots, n-1$, то

$$|\rho_k J_2|\leqslant c\left(\int\limits_{c_{k-1}}^{a_k}+\int\limits_{a_k}^{x}\right)\frac{(x-a_k)^{\delta_k}\,|\varphi_0(y)|}{|y-a_k|^{\gamma_k}\,(x-y)^{1-\alpha}}\,dy=A_1+A_2.$$

При $\gamma_k<\alpha-\dfrac{1}{p}$ имеем $A_1\leqslant c\rho_k(x)(J^{\alpha-\gamma_k}_{c_{k-1}+}|\varphi_0(y)|)(a_k)\leqslant c\,\|\varphi_0\|_p\,\rho_k(x)\in$ $\in L_q(a_k, c_k)$. Если $\gamma_k=\alpha-\dfrac{1}{p}$, то $A_1\leqslant(x-a_k)^{\delta_k-\frac{\varepsilon}{2}}(J^{\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{2}}_{c_{k-1}+}|\varphi_0|)(a_k)\leqslant$

$\leqslant c\,\|\varphi_0\|_p\,(x-a_k)^{\delta_k-\frac{\varepsilon}{2}}\in L_q(a_k, c_k)$. Для A_2 получаем

$$A_2 < c \int\limits_{a_k}^{x} \left(\frac{x-a_k}{y-a_k}\right)^{\gamma_k} \frac{|\varphi_0(y)|}{(x-y)^{1-\alpha}}\, dy \in L_q(a_k, c_k)),$$

в силу теоремы 4.1. Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что если $\gamma_k \leqslant \alpha - \dfrac{1}{p}$, то в теореме 4.2 нельзя полагать $\delta_k = \gamma_k$. Возьмем, например, $\varphi(x) = \rho^{-1}(x)$. Тогда, при $x \in (c_{k-1}, a_k)$

$$\rho(x)(J^\alpha_{a+}\rho^{-1})(x) \geqslant c\rho_k(x) \int\limits_{a}^{c_{k-1}} \frac{\rho^{-1}(y)\, dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \geqslant c\rho_k(x) \notin L_q(c_{k-1}, a_k)$$

и, следовательно, теорема неверна.

Замечание 2. В случае $\gamma_k \leqslant \alpha - \dfrac{1}{p}$ для какого-либо $k=2, 3, \cdots$ $\cdots, n$ поведение интеграла $J^\alpha_{a+}\varphi$ в окрестности точки a_k можно описать точнее:

$$|(J^\alpha_{a+}\varphi)(x)| \leqslant \frac{c}{|x-a_k|^{\varepsilon_0}} + f(x),$$

где $f(x) \in L_q(|x-a_k|^{\gamma_k})$, $\varepsilon_0 = 0$ при $\gamma_k < \alpha - \dfrac{1}{p}$ и ε_0 как угодно малое положительное число при $\gamma_k = \alpha - \dfrac{1}{p}$.

Ростовский государственный
университет

Поступила 10.VIII.1981

Ն. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆՑ, Բ. Ս. ՌՈՒԲԻՆ. Կոտորակային ինտեգրման օպերատորների մասին կշռով տարածություններում *(ամփոփում)*

Հոդվածում ընդհանրացվում են Հարդի-Լիտլվուդի հայտնի թեորեմները կոտորակային ինտեգրման օպերատորների սահմանափակության վերաբերյալ $L_p(a, b)$-ում $L_p([a, b], \rho)$ կշռային տարածությունների դեպքի համար,

$$1 < \rho < +\infty,\ \rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x-a_k|^{\gamma_k},\ -\infty < a = a_1 < \cdots < a_n = b < \infty.$$

Դիտարկված են $\alpha > \dfrac{1}{p}$ և $\alpha < \dfrac{1}{p}$ դեպքերը։ Ուսումնասիրված են α, p և γ_k պարամետրերի վրա դրված սահմանափակումները և ցույց է տրված որ նրանց լավացնել հնարավոր չէ։

N. K. KARAPETIANTS, B. S. RUBIN. *On the fractional integration operators in weight spaces* (summary)

In the paper the well-known Hardy — Littlewood theorems devoted to the boundedness of fractional integration operators in L_p-spaces are generalized for the weight spaces $L_p([a, b], \rho)$, where

$$1 < p < \infty,\ \rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x-a_k|^{\gamma_k},\ -\infty < a = a_1 < \cdots < a_n = b < \infty.$$

The cases $\alpha > \frac{1}{p}$ and $\alpha < \frac{1}{p}$ are considered. The authors investigate the restrictions on the parameters α, p, γ_k and show that they can not be improved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Hardy, J. Littlewood*. Some properties of fractional integrals, I. Math., Z., 27, 1928, 565—606.
2. *Б. С. Рубин*. Дробные интегралы в пространствах Гельдера с весом и операторы типа потенциала, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 4, 1974, 308—324.
3. *Б. С. Рубин*. О пространствах дробных интегралов на прямолинейном контуре, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 5, 1972, 373—386.
4. *С. Г. Самко*. Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования, Диффер. уравн., IV, № 2, 1968, 298—314.