ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 6, 1983 Математика

УДК 517.51

Г. Г. ГЕВОРКЯН

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Введение

Введем некоторые определения.

Определение 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированная система функций на отрезке $[0,1]$. Скажем, что $E\subset[0,1]$ является U_p-множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, если из того, что $f(x)=0$ п.в. на E и $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx\right|^p<+\infty$ следует, что $f(x)=0$ п.в. на $[0,1]$.

Определение 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированная система функций на отрезке $[0,1]$. Скажем, что $E\subset[0,1]$ является U_p^*-множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, если из того, что $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)=0$ всюду на E, следует, что $a_n=0$, $n=0, 1, 2,\cdots$.

Ясно, что когда $p>2$, то U_p-множествами являются только множества полной меры. По этому интереснее рассмотреть U_p-множества при $p<2$.

Очевидно, что если E является U_p-(или U_p^*)-множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, то оно является $U_{p'}$ (соответственно $U_{p'}^*$)-множеством при любом $p'<p$.

Легко видеть, что всякое U_p-множество является U_p^*-множеством. Однако, обратное не верно.

В работе [1] было доказано, что для любого $\varepsilon>0$ существует множество E, $\mu E<\varepsilon$, которое является U_p-множеством для тригонометрической системы при любом $p<2$.

В дальнейшем Голзани [2] распространил эту теорему на любые полные равномерно ограниченные системы и поставил вопрос: верна ли эта теорема для любой полной ортонормированной системы?

В работах [3]—[5] была доказана следующая

Теорема. *Для любой полной в $L_2[0,1]$ ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и любого $\varepsilon>0$ существует множество $E\subset[0,1]$, $\mu E<\varepsilon$, которое является U_p-множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ при любом $p<2$.*

В работе [6] доказано существование множеств меры нуль, которые являются U_p^*-множеством при любом $p<2$ для тригонометрической системы.

В работе [7] получены аналогичные результаты для систем Хаара и Уолша.

В первом параграфе описываются U_p-множества системы Хаара и на основании этого доказывается, в частности, что для любых $1 < p < p' < 2$, существует множество, являющееся U_p-множеством и не являющееся $U_{p'}$-множеством для системы Хаара.

Во втором параграфе доказываются аналогичные результаты для тригонометрической системы и системы Уолша. Однако для этих систем не удается описать U_p-множества.

В третьем параграфе строятся множества меры нуль, которые являются U_p^*-множествами для одних p и не являются U_p^*-множествами для других p (для вышеуказанных ортонормальных систем).

Все результаты настоящей работы без доказательств опубликованы в [8].

Автор благодарен профессору П. Л. Ульянову, обратившему внимание автора на рассмотренные здесь вопросы.

§ 1. Об одном достаточном условии для U_p-множеств системы Хаара

Пусть дано некоторое множество $E\subset[0,1]$. Разделим отрезок $[0,1]$ на 2^k равных частей, $I_1, I_2, \cdots, I_{2^k}$ и обозначим через $\mu_E(k, x)$ кусочно-постоянную функцию, которая принимает значение $\mu(E\cap I_j)$ на отрезке I_j.

Лемма 1. *Пусть $E\subset[0,1]$ такое множество, что почти всюду на* $[0,1]$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log_2 \mu_E(k, x)}{k} > -2 + \frac{2}{q}. \tag{1}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует ограниченная функция $f(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx \right|^q < \varepsilon$, *где* $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — *система Хаара* (опр. см., напр., [9], стр. 54).

2. $f(x) = 1$ *на* $[0,1]\setminus(E\cup A)$, *где* $\mu A < \varepsilon$, *и* $f(x)=0$ *на* A.

Доказательство. Существует такое $0<\theta<1$, что

$$\mu B > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2}$$

где

$$B = \left\{x:\ \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log_2 \mu_E(k, x)}{k} > \theta\left(\frac{2}{q} - 2\right)\right\}. \tag{3}$$

Возьмем некоторое натуральное число k (пока не фиксированное). Из (3) следует, что для любого $x\in B$ и любого $m>k$ существует число $n_m(x)$ такое, что

$$\frac{\log_2 \mu_E(n_m(x), x)}{n_m(x)} > \theta\left(\frac{2}{q} - 2\right).$$

Это означает, что для любого m и любого $x\in B$ существует отрезок J, длина которого равна $2^{-n_m(x)}$ (см. определение функции $\mu_E(k, x)$) и который удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{\log_2 \mu_E(n_m(x), x)}{n_m(x)} > \theta\left(\frac{2}{q}-2\right),$$

т. е. система отрезков, удовлетворяющих этому условию, покрывает B в смысле Витали. По теореме Витали существует конечная подсистема этой системы, обозначим ее через $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha=1}^{N}$, такая, что

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha=1}^{N}\Delta_\alpha\right)>1-\varepsilon.$$

Напомним, что каждый Δ_α-отрезок типа Хаара, т. е. $\Delta_\alpha=\left[\frac{\nu-1}{2^k}, \frac{\nu}{2^k}\right]$, и

$$\frac{\log_2 \mu(E\cap\Delta_\alpha)}{-\log_2 \mu\,\Delta_\alpha} > \theta\left(\frac{2}{q}-2\right). \tag{4}$$

Из (1) следует, что $\mu(\Delta_\alpha\cap E)>0$. Поэтому можно определить функции

$$f_\alpha(x)=\begin{cases} 0 & \text{вне} \quad \Delta_\alpha \\ 1 & \text{на} \quad \Delta_\alpha\setminus E \\ 1-\dfrac{\mu\,\Delta_\alpha}{\mu(\Delta_\alpha\cap E)} & \text{на} \quad E\cap\Delta_\alpha. \end{cases} \tag{5}$$

Ясно, что функция $f(x)=\sum_{\alpha=1}^{N} f_\alpha(x)$ удовлетворяет второму условию леммы. Проверим первое условие. Из (5) следует, что

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx=\int_{\Delta_\alpha} f_\alpha(x)\,dx=0. \tag{6}$$

Учитывая, что Δ_α — отрезок типа Хаара, из (6) вытекает

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx\right|^q=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 f_\alpha(x)\chi_n(x)\,dx\right|^q. \tag{7}$$

Из (5) имеем

$$\|f_\alpha\|_1=\int_{\Delta_\alpha}|f_\alpha(x)|\,dx<2\mu\Delta_\alpha, \tag{8}$$

$$\|f_\alpha\|_2^2=\int_{\Delta_\alpha} f_\alpha^2(x)\,dx<2\frac{(\mu\,\Delta_\alpha)^2}{\mu(\Delta_\alpha\cap E)}, \tag{9}$$

$$\|f_\alpha\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|<\frac{\mu\,\Delta_\alpha}{\mu(\Delta_\alpha\cap E)}. \tag{10}$$

Пусть $\chi_n(x)$ — функция из m-ой пачки системы Хаара, т. е. $\|\chi_n\|_\infty = 2^{\frac{m}{2}}$ и $\|\chi_n\|_1 = 2^{-\frac{m}{2}}$. Тогда из (8) и (10) имеем

$$\left|\int_0^1 f_\alpha(x)\chi_n(x)\,dx\right| \leqslant \min\left(\|f_\alpha\|_\infty\cdot\|\chi_n\|_1,\ \|f_\alpha\|_1\cdot\|\chi_n\|_\infty\right) \leqslant$$

$$\leqslant \min\left(\frac{\mu\Delta_\alpha}{\mu(\Delta_\alpha\cap E)}\cdot 2^{-\frac{m}{2}},\ 2\mu\,\Delta_\alpha\cdot 2^{\frac{m}{2}}\right). \tag{11}$$

Из (4) следует

$$\mu(E\cap\Delta_\alpha) > (\mu\,\Delta_\alpha)^{\left(2-\frac{2}{q}\right)\theta}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) вытекает, что

$$\left|\int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx\right| \leqslant \min\left((\mu\,\Delta_\alpha)^{1-\left(2-\frac{2}{q}\right)\theta}\cdot 2^{-\frac{m}{2}},\ 2\cdot\mu\,\Delta_\alpha\cdot 2^{\frac{m}{2}}\right), \tag{13}$$

когда $2^{\frac{m}{2}} \geqslant (\mu\Delta_\alpha)^{-\theta\left(1-\frac{1}{q}\right)}$, имеем

$$\min\left((\mu\Delta_\alpha)^{1-\left(2-\frac{2}{q}\right)\theta}2^{-\frac{m}{2}},\ 2\mu\Delta_\alpha\cdot 2^{\frac{m}{2}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \min\left((\mu\Delta_\alpha)^{1-\left(2-\frac{2}{q}\right)\theta}\cdot(\mu\,\Delta_\alpha)^{\theta\left(1-\frac{1}{q}\right)},2\cdot\mu\,\Delta_\alpha\cdot 2^{\frac{m}{2}}\right)\leqslant(\mu\ \Delta_\alpha)^{1-\theta+\frac{\theta}{q}}. \tag{14}$$

При $2^{\frac{m}{2}} < (\mu\Delta_\alpha)^{-\theta\left(1-\frac{1}{q}\right)}$ получим

$$\min\left((\mu\,\Delta_\alpha)^{1-\left(2-\frac{2}{q}\right)\theta}\cdot 2^{-\frac{m}{2}},\ 2\cdot\mu\,\Delta_\alpha\cdot 2^{\frac{m}{2}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \min\left((\mu\,\Delta_\alpha)^{1-\left(2-\frac{2}{q}\right)\theta}\cdot 2^{-\frac{m}{2}},\ 2\cdot\mu\Delta_\alpha\cdot(\mu\Delta_\alpha)^{-\theta\left(1-\frac{1}{q}\right)}\right)\leqslant(2\mu\Delta_\alpha)^{1-\theta+\frac{\theta}{q}}. \tag{15}$$

Из (11), (4) и (15) следует, что

$$\sup_n\left|\int_0^1 f_\alpha(x)\chi_n(x)\,dx\right|\leqslant 2(\mu\Delta_\alpha)^{1-\theta+\frac{\theta}{q}}. \tag{16}$$

Из (9), (16) и (12) получаем

$$\sum_{n=0}^\infty\left|\int_0^1 f_\alpha(x)\chi_n(x)\,dx\right|^q\leqslant\left\{\sup_n\left|\int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx\right|\right\}^{q-2}\sum_{n=0}^\infty\left|\int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\left(2(\mu\Delta_\alpha)^{1-\theta+\frac{\theta}{q}}\right)^{q-2}\cdot 2\cdot\frac{(\mu\Delta_\alpha)^2}{\mu(\Delta_\alpha\cap E)}\leqslant 2^{q-2}(\mu\,\Delta_\alpha)^{\left(1-\theta+\frac{\theta}{q}\right)(q-2)+2}(\mu\,\Delta_\alpha)^{-\left(2-\frac{2}{q}\right)\theta}=$$

$$=2^{q-1}(\mu\Delta_\alpha)^{(1-\theta)(q-2)+2\theta}\leqslant 2^{q-1}(\mu\Delta_\alpha)^{2-\theta}. \tag{17}$$

Учитывая (13), из (17) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx\right|^q \leqslant 2^{q-1}\sum_{\alpha=0}^{N}(\mu\Delta_\alpha)^{2-\theta}\leqslant 2^{q-1}\{\sup_\alpha \mu\Delta_\alpha\}^{1-\theta}\sum_{\alpha=0}^{N}\mu\Delta_\alpha<$$

$$\leqslant 2^{q-1}\{\sup_\alpha \mu\Delta_\alpha\}^{1-\theta}\leqslant 2^{q-1}(2^{-k})^{1-\theta}.$$

Число k пока было произвольным. Учитывая, что $\theta<1$, можно k взять настолько большим, чтобы выполнялось первое условие леммы. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $E\subset[0,1]$—такое множество, что для некоторого $p<2$*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\log_2\mu_E(k,x)}{k}>-\frac{2}{p}\quad \text{п. в.} \tag{18}$$

Тогда существует последовательность функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что если для некоторой функции $f(x)$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left|\int_0^1 f(x)\chi_m(x)\,dx\right|^p<+\infty, \tag{19}$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f(x)\varphi_k(x)\chi_n(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx,\ n=0,1,2,\cdots. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю. Из (18) следует (1) для $q=\frac{p}{p-1}\left(\text{т. е. } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. Поэтому существуют функции $f_k(x)$ такие, что:

$$1^\circ.\ \sum_{m=0}^{\infty}\left|\int_0^1 f_k(x)\chi_m(x)\,dx\right|^q<\varepsilon_k,$$

2°. $f(x)=1$, $x\in[0,1]\setminus(E\cup A_k)$, $\mu A_k<\varepsilon_k$ и $f_k(x)=0$, $x\in A_k$.

Положим

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}1-f_k(x), & \text{когда } x\overline{\in}A_k\\ 0, & \text{когда } x\in A_k.\end{cases} \tag{21}$$

Легко видеть, что из (19) следует

$$\nu_n=\sum_{m=0}^{\infty}\left|\int_0^1 f(x)\chi_n(x)\chi_m(x)\,dx\right|^p<+\infty \tag{22}$$

для произвольного $n=0,1,2,\cdots$.

Из (21), 2°, 1° и (22) вытекает

$$\left|\int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx-\int_E f(x)\varphi_k(x)\chi_n(x)\,dx\right|=\left|\int_{A_k} f(x)\chi_n(x)\,dx+\right.$$

$$+\int_0^1 f(x)\chi_n(x) f_k(x)\,dx \Big| \leqslant \Big| \int_{A_k} f(x)\chi_n(x)\,dx\Big| +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\Big|\int_0^1 f(x)\chi_n(x)\chi_m(x)\,dx\Big|\cdot\Big|\int_0^1 f_k(x)\chi_m(x)\,dx\Big| \leqslant$$

$$< \Big|\int_{A_k} f(x)\chi_n(x)\,dx\Big| + \nu_n^{1/p}\cdot\varepsilon_k^{1/q}. \tag{23}$$

Когда k стремится к $+\infty$ правая часть (23) стремится к нулю (см. 1°, 2° и (22)). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что любое множество $E\subset[0,1]$, удовлетворяющее условию (18), является U_p-множеством для системы Хаара. Поэтому верна следующая

Теорема 2. *Пусть $E\subset[0,1]$ — такое множество, что для некоторого $p\leqslant 2$*

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\log_2 \mu_E(k,x)}{k} \geqslant -\frac{2}{p} \quad \text{п.в.} \tag{24}$$

Тогда E является U_p-множеством для системы Хаара при любом $p'<p$.

Формулируемая ниже теорема 3 показывает, что теорема 2 в некотором смысле окончательна.

Теорема 3. *Для любого p, $1<p\leqslant 2$, существует множество $E\subset[0,1]$ удовлетворяющее условию*

$$\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\log_2 \mu_E(k,x)}{k} \geqslant -\frac{2}{p} \quad \text{п.в.}$$

и не являющееся U_p-множеством для системы Хаара.

Доказательство. Для этого достаточно построить множество E, удовлетворяющее условию (24) и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, который сходится к нулю на E и $0<\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$.

Выберем натуральные числа l_k и n_k, $k=1, 2,\cdots$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$l_k<n_k<l_{k+1}, \tag{25}$$

$$n_k<l_k\cdot\frac{2}{p}+l_k\cdot\frac{1}{k}, \tag{26}$$

$$n_k>l_k\frac{2}{p}+\frac{4}{p}k. \tag{27}$$

Для того, чтобы выполнялись условия (26) и (27), нужно l_k взять настолько большим, чтобы между $l_k\frac{2}{p}+\frac{4}{p}k$ и $l_k\frac{2}{p}+l_k\frac{1}{k}$ находилось натуральное число.

Разделим отрезок $[0,1]$ на 2^{l_k} равные части (отрезки) и в каждом из них возьмем один отрезок типа Хаара длины 2^{-n_k}. Обозначим через E_k объединение этих отрезков. Положим $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Из (26) следует

$$\frac{\log_2 \mu_E(l_k, x)}{l_k} > \frac{\log_2 \mu_{E_k}(l_k, x)}{l_k} = \frac{-n_k}{l_k} >$$

$$> \frac{-l_k \frac{2}{p} - l_k \frac{1}{k}}{l_k} = -\frac{2}{p} - \frac{1}{k}.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log_2 \mu_E(k, x)}{k} \geqslant -\frac{2}{p}.$$

Остается доказать, что существует ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x), \qquad (28)$$

который сходится к нулю на $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и $0<\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<+\infty$. Положим $a_0=1$. Для того, чтобы ряд (28) сделать нулем на E, нужно взять 2^{l_1} функций из n_1-1 пачки система Хаара с коэффициентами $\pm\frac{1}{2^{\frac{n_1-1}{2}}}$. Допустим, что выбраны коэффициенты a_n, $n\leqslant 2^{n_{k-1}}$, так, чтобы

$$\sum_{n=0}^{2^{n_k-1}} a_n \chi_n(x)=0, \quad x\in\bigcup_{l=1}^{k-1} E_l \qquad (29)$$

и

$$\left|\sum_{n=0}^{2^{n_k-1}} a_n \chi_n(x)\right| < 2^k, \quad x\in[0,1].$$

Для того, чтобы ряд (28) равнялся нулю на E_k, нужно взять не более 2^{l_k} функций из n_k-1 пачки система Хаара, коэффициенты которых по модулю не превосходят $\frac{2^{k-1}}{2^{\frac{n_k-1}{2}}}$. Таким образом, построенный ряд сходится к нулю на E и из (27) имеем

$$0<\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\leqslant 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^{k-1}}{2^{\frac{n_k-1}{2}}}\right)^p\cdot 2^{l_k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}2^{kp-p}\cdot 2^{-\frac{n_k}{2}p+\frac{p}{2}}\cdot 2^{l_k}\leqslant$$

$$\leqslant 1+\sum_{k=1}^{\infty}2^{kp-\frac{p}{2}}\cdot 2^{-l_k-2k}\cdot 2^{l_k}\leqslant 1+\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(p-2)}, \qquad (30)$$

Когда $p<2$ ряд, стоящий в правой части (30), сходится и для этого случая теорема доказана. При $p=2$ коэффициенты характеристической функции дополнения E суммируются с квадратом (т. е. со степенью p). Теорема доказана.

Аналогично можно доказать следующую теорему

Теорема 4. *Для любого p, $1\leqslant p<2$, существует U_p-множество для системы Хаара, которое не является $U_{p'}$-множеством ни для одного $p'>p$.*

Доказательство. Выберем натуральные числа l_k, n_k, $k=1, 2,\cdots$, такие, что

$$l_k<n_k<l_{k+1}, \tag{31}$$

$$n_k<\frac{2l_k}{p}-k,$$

$$\frac{2\,l_k}{p+\frac{1}{k}}+\frac{2k\,(p+1)}{p+\frac{1}{k}}<n_k. \tag{32}$$

Этого можно добиться, так как для фиксированного k можно взять l_k настолько большим, чтобы

$$\frac{2l_k}{p+\frac{1}{k}}+\frac{2k\,(p+1)}{p+\frac{1}{k}}<\frac{2l_k}{p}-1-k.$$

Для таких l_k и n_k обозначим через E_k, $k=1, 2,\cdots$, и E те же множества, что и в теореме 3. Пусть $p'<p$. Тогда для коэффициентов ряда, построенного в теореме 3, имеем (см. (32))

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{p'}\leqslant 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^{k-1}}{2^{\frac{n_k-1}{2}}}\right)^{p'}\cdot 2^{l_k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}2^{kp'-p'}\cdot 2^{-\frac{n_k}{2}p'+\frac{p'}{2}}\cdot 2^{l_k}\leqslant$$

$$\leqslant 1+\sum_{k=1}^{\infty}2^{kp'-p'}\cdot 2^{-l_k\frac{p'}{p+\frac{1}{k}}-\frac{k\,(p+1)\,p'}{p+\frac{1}{k}}+\frac{p'}{2}}\cdot 2^{l_k}\leqslant$$

$$\leqslant 1+\sum_{k=1}^{\infty}2^{kp'\left(1-\frac{p+1}{p+\frac{1}{k}}\right)}\cdot 2^{-l_k\left(\frac{p'}{p+\frac{1}{k}}-1\right)}<+\infty,$$

так как для достаточно больших k $p'>p+\frac{1}{k}$ и $1-\frac{p+1}{p+\frac{1}{k}}<\alpha$ для некоторого $\alpha<0$.

Докажем, что $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ является U_p-множеством. Сначала рассмотрим тот случай, когда $p>1$. Пусть $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогда для функций

$$f_k(x)=1-2^{n_k-l_k}\chi_{E_k}(x) \tag{33}$$

имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 f_k(x)\chi_n(x)\,dx\right|^q=2^{l_k}\left[\left(\frac{1}{2^{\frac{l_k}{2}}}\right)^q+\left(\frac{2}{2^{\frac{l_k+1}{2}}}\right)^q+\cdots+\left(\frac{2^{n_k-l_k}}{2^{\frac{n_k}{2}}}\right)^q\right]=$$

$$=2^{l_k-\frac{l_kq}{2}}\left(1+2^{q/2}+\cdots+2^{\frac{n_k-l_k}{2}q}\right)=2^{l_k\left(1-\frac{q}{2}\right)}\frac{2^{\frac{q}{2}(n_k-l_k+1)}-1}{2^{q/2}-1}\leqslant$$

$$\leqslant C_q\cdot 2^{l_k\left(1-\frac{q}{2}\right)+\frac{q}{2}(n_k-l_k)}=C_q\cdot 2^{l_k+\frac{qn_k}{2}-l_kq}, \tag{34}$$

где C_q — некоторая константа, зависящая только от q. Допустим, что $\varphi(x)=0$, когда $x\in E$ и

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1\varphi(x)\chi_n(x)\,dx\right|^p<+\infty.$$

Тогда из (33), (34) и (31) получим

$$\left|\int_0^1\varphi(x)\,dx\right|=\left|\int_0^1 f_k(x)\varphi(x)\,dx\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 f_k(x)\chi_n(x)\,dx\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^1\varphi(x)\chi_n(x)\,dx\right|\leqslant\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 f_k(x)\chi_n(x)\,dx\right|^q\right\}^{1/q}\times \tag{35}$$

$$\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1\varphi(x)\chi_n(x)\,dx\right|^p\right\}^{1/p}\leqslant A^{1/p}\cdot C_q^{1/q}\cdot 2^{\frac{l_k}{q}+\frac{n_k}{2}-l_k}=$$

$$=A^{1/p}\cdot C_q^{1/q}\cdot 2^{-\frac{l_k}{p}+\frac{n_k}{2}}<A^{1/p}\cdot C_q^{1/q}\cdot 2^{-\frac{l_k}{p}+\frac{l_k}{p}-k}=$$

$$=A^{1/p}\cdot C_q^{1/q}\cdot 2^{-k}\to 0,\ \text{при}\ \ k\to\infty.$$

Точно так же можно доказать, что для $n=1, 2,\cdots$

$$\left|\int_0^1\varphi(x)\chi_n(x)\,dx\right|=0.$$

Для $p>1$ теорема доказана. При $p=1$ имеем

$$\sup_n\left|\int_0^1 f_k(x)\chi_n(x)\,dx\right|=2^{\frac{n_k}{2}-l_k}.$$

Отсюда как и в (35) получим

$$\left|\int_0^1\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1\varphi(x)\chi_n(x)\,dx\right|\right\}2^{\frac{n_k}{2}-l_k}<$$

$$<\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 \varphi(x)\chi_n(x)\,dx\right|\right\}2^{-k}\to 0.$$

Точно так же

$$\left|\int_0^1 \varphi(x)\chi_n(x)\,dx\right| = 0 \text{ для } n=1, 2, \cdots.$$

Теорема доказана.

§ 2. Об U_p-множествах для тригонометрической системы и системы Уолша

Пусть I — некоторый отрезок типа Хаара, т. е. $I=\left[\frac{\varkappa}{2^k}, \frac{\varkappa+1}{2^k}\right]$. Разделим I на 2^ν равных частей: $\Delta_i=\left[\frac{\varkappa}{2^k}+\frac{i-1}{2^{k+\nu}}, \frac{\varkappa}{2^k}+\frac{i}{2^{k+\nu}}\right]$, $i=1, 2, \cdots, 2^\nu$. Обозначим $\delta_i=\left[\frac{\varkappa}{2^k}+\frac{i-1}{2^{k+\nu}}, \frac{\varkappa}{2^k}+\frac{i-1}{2^{k+\nu}}+\frac{1}{2^{k+\nu+m}}\right]$, т. е. левый конец δ_i совпадает с левым концом Δ_i и $\mu\Delta_i/\mu\delta_i=2^m$. Положим

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{на } \bigcup_{i=1}^{2^\nu}(\Delta_i\setminus\delta_i) \\ 1-2^m & \text{на } \bigcup_{i=1}^{2^\nu}\delta_i \\ 0 & \text{на } [0, 1]\setminus I, \end{cases} \tag{1}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1 \text{ на } \bigcup_i \delta_i=\bigcup_i\left[\frac{\varkappa}{2^k}+\frac{i-1}{2^{k+\nu}}, \frac{\varkappa}{2^k}+\frac{i-1}{2^{k+\nu}}+\frac{1}{2^{k+\nu+m}}\right] \\ -1 \text{ на } \bigcup_{i=1}^{2^\nu}\left[\frac{\varkappa}{2^k}+\frac{i-1}{2^{k+\nu}}+\frac{1}{2^{k+\nu+m}}, \frac{\varkappa}{2^k}+\frac{i-1}{2^{k+\nu}}+\frac{2}{2^{k+\nu+m}}\right] \\ 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим

$$\widehat{\psi}(n)=\int_0^1\psi(t)\,e^{2\pi int}\,dt,\ n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \text{ и } \widehat{\psi}_W(n)=\int_0^1\psi(t)\,W_n(t)\,dt,$$

$$n=0, 1, 2, \cdots,$$

где $\{W_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — система Уолша в нумерации Пели.

Верна следущая

Лемма 2. *Существует константа $A>0$, такая, что для любого p, $1<p<2$, любых $I=\left[\frac{\varkappa}{2^k}, \frac{\varkappa+1}{2^k}\right]$ и m, при достаточно больших ν справедливы следующие неравенства:*

$$1^\circ.\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(n)|^p < A \cdot 2^{(1-p)(k+m)},\quad \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{\varphi}_W(n)|^p < A \cdot 2^{(1-p)(k+m)},$$

$$2^\circ.\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^q < A \cdot 2^{m-k\frac{1}{p-1}},\quad \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}_W(n)|^q < A \cdot 2^{m-k\frac{1}{p-1}},$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Доказательство. Сначала докажем пункт 1° для системы Уолша. Обозначим через $\{R_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ систему Радемахера. Тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \chi_I(x) \left(\prod_{l=k+\nu}^{k+\nu+m-1} [1 + R_l(x)] \right) R_{k+\nu+m}(x),$$

где $\chi_I(x)$ — характеристическая функция отрезка I.

В разложении $\chi_I(x)$ по системе Уолша участвуют 2^k функций с коэффициентами $\pm 2^{-k}$. Следовательно, если ν взять достаточно большим, то в разложении $\varphi(x)$ будет 2^{m+k-1} функций Уолша с коэффициентами $\pm 2^{-m-k+1}$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{\varphi}_W(n)|^p = 2^{(-m-k+1)p} \cdot 2^{m+k-1} = 2^{p-1} \cdot 2^{(1-p)(m+k)}.$$

Докажем пункт 1° для тригонометрической системы. Обозначим

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 2^{-m}) \\ -1 & x \in (2^{-m}, 2^{-m+1}) \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus (0, 2^{-m+1}) \end{cases} \tag{3}$$

и продолжим ее на всю действительную ось с периодом 1. Легко видеть, что $\widehat{\varphi}_m(0) = 0$ и при $n \neq 0$

$$\widehat{\varphi}_m(n) = \frac{4 \sin^2 n \frac{\pi}{2^m}}{2\pi i n} \left(\cos n \frac{2\pi}{2^m} + i \sin n \frac{2\pi}{2^m} \right).$$

Следовательно

$$|\widehat{\varphi}_m(n)| \leqslant \min\left(\frac{2|n|\pi}{2^{2m}},\ \frac{2}{\pi|n|} \right) < \frac{4}{2^m}. \tag{4}$$

Легко видеть также, что

$$|\widehat{\chi}_I(n)| \leqslant \min\left(\frac{2}{|n|},\ 2^{-k} \right). \tag{5}$$

Из (1) следует, что

$$\varphi(x) = \chi_I(x)\, \varphi_m(2^{k+\nu} x). \tag{6}$$

Обозначим $b_n = \widehat{f}_m(n)$ и $c_n = \widehat{\chi}_I(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда из (6) имеем

$$\varphi(x)=\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\, e^{2\pi i\cdot 2^{k+\nu}\cdot nx}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{2\pi inx}\right)=$$

$$=\left(\sum_{n=-2^{k+\nu-1}}^{2^{k+\nu-1}} c_n\, e^{2\pi inx}+\sum_{|n|>2^{k+\nu-1}} c_n\, e^{2\pi inx}\right)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\, e^{2\pi i\cdot 2^{k+\nu}\cdot nx}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-2^{k+\nu-1}}^{2^{k+\nu-1}} c_j\, b_n\, e^{2\pi i\,(2^{k+\nu}\cdot n+j)\,x}+ \tag{7}$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi inx}\left(\sum_{\substack{2^{k+\nu}\cdot h+j=n\\ |j|>2^{k+\nu-1}}} b_h\, c_j\right)=I_1(x)+I_2(x).$$

Отдельно оценим $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{I}_1(n)|^p$ и $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{I}_2(n)|^p$.

Из (7) видно, что

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty}|\widehat{I}_1(h)|^p=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-2^{k+\nu-1}}^{2^{k+\nu-1}}|c_j\, b_n|^p=\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|b_n|^p\right)\left(\sum_{j=-2^{k+\nu-1}}^{2^{k+\nu-1}}|c_j|^p\right).$$

Учитывая (2), (3) и то, что $c_j=\widehat{\chi}_l(j)$, $b_n=\widehat{\varphi}_m(n)$, получим

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty}|\widehat{I}_1(h)|^p\leqslant\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{\varphi}_m(n)|^p\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\widehat{\chi}_l(j)|^p\right)\leqslant$$

$$\leqslant 4\left(\sum_{n=1}^{2^m}\frac{2^p\pi^p n^p}{4^{pm}}+\sum_{n=2^m+1}^{\infty}\frac{2^p}{\pi^p\, n^p}\right)\left(\sum_{j=0}^{2^k}2^{-kp}+\sum_{j=2^k+1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\right)= \tag{8}$$

$$=O\left(\left(\frac{1}{4^{pm}}\int_0^{2^m}x^p\,dx+\int_{2^m}^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx\right)\left(2^{-kp+k}+\int_{2^k}^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx\right)\right)=$$

$$=O\left((2^{m(p-1)-2pm}+2^{m(1-p)})(2^{k(1-p)}+2^{k(1-p)})\right)=O\left(2^{(1-p)(k+m)}\right).$$

Для того, чтобы доказать $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{\varphi}(n)|^p=O\left(2^{(1-p)(k+m)}\right)$, достаточно установить, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{I}_2(n)|^p\to 0,\ \text{когда}\ \nu\to+\infty.$$

Из (7), (4) и (5) получим (штрих на сумме означает, что $h=0$ отсутствует):

$$|\widehat{I}_2(n)|=\left|\sum_{\substack{2^{k+\nu}h+j=n\\ |j|>2^{k+\nu-1}}}' b_h\cdot c_j\right|\leqslant\sum_{\substack{2^{k+\nu}\cdot h+j=n\\ |j|>2^{k+\nu-1}}}'\frac{1}{|h|}\cdot\frac{1}{|j|}=\sum_{\substack{h=-\infty\\ |n-2^{k+\nu}h|>2^{k+\nu-1}}}^{+\infty}\frac{1}{|h|}\cdot\frac{1}{|n-2^{k+\nu}h|}.$$

Оценим $|\widehat{I}_2(n)|$ для положительных n. Пусть $n>2^{k+\nu}$, тогда $\rho\cdot 2^{k+\nu}<n\leqslant(\rho+1)\cdot 2^{k+\nu}$, $\rho\geqslant 1$. Имеем (штрих над слагаемым означает, что если такое слагаемое есть, то все равно оно меньше $(\rho\cdot 2^{k+\nu-1})^{-1}$).

$$|\widehat{I}_2(n)|\leqslant \sum_{\substack{h=-\infty\\ |n-2^{k+\nu}h|>2^{k+\nu-1}}}^{+\infty}\frac{1}{|h|}\cdot\frac{1}{|n-2^{k+\nu}h|}=\sum_{h=-\infty}^{-1}\frac{1}{|h|}\cdot\frac{1}{|n-2^{k+\nu}h|}+$$

$$+\sum_{h=1}^{\rho-1}\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{|n-2^{k+\nu}\cdot h|}+\left(\frac{1}{\rho|n-2^{k+\nu}\cdot\rho|}\right)'+\left(\frac{1}{(\rho+1)(n-2^{k+\nu}(\rho+1))}\right)'+$$

$$+\sum_{h=\rho+2}^{\infty}\frac{1}{|h|}\cdot\frac{1}{|n-2^{k+\nu}h|}\leqslant\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h}\,\frac{1}{2^{k+\nu}\rho+2^{k+\nu}h}+\sum_{h=1}^{\rho-1}\frac{1}{h}\times$$

$$\times\frac{1}{2^{k+\nu}\rho-2^{k+\nu}h}+\frac{2}{\rho\cdot 2^{k+\nu-1}}+\sum_{h=\rho+2}^{\infty}\frac{1}{h}\,\frac{1}{2^{k+\nu}h-(\rho+1)2^{k+\nu}}=$$

$$=\frac{1}{2^{k+\nu}}\left(\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h(h+\rho)}+\sum_{h=1}^{\rho-1}\frac{1}{h(\rho-h)}+\frac{4}{\rho}+\sum_{h=\rho+2}^{\infty}\frac{1}{h(h-\rho-1)}\right)= \qquad (9)$$

$$=\frac{1}{2^{k+\nu}\cdot\rho}\left(\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{\rho+h}\right)+\sum_{h=1}^{\rho-1}\left(\frac{1}{\rho-1}+\frac{1}{h}\right)+4+\right.$$

$$\left.+\sum_{h=\rho+2}^{\infty}\left(\frac{1}{h-\rho-1}-\frac{1}{h}\right)\right)=O\left(\frac{1}{2^{k+\nu}\rho}\left(\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\rho+x}\right)dx+2\ln\rho+4+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{\rho+1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-\rho-1}-\frac{1}{x}\right)dx\right)=O\left(\frac{1}{2^{k+\nu}}\,\frac{\ln\rho+1}{\rho}\right).$$

Точно так же можно оценить $|\widehat{I}_2(n)|$, когда $n<-2^{k+\nu}$. Если $|n|\leqslant 2^{k+\nu}$, то

$$|\widehat{I}_2(n)|=\left|\sum_{\substack{2^{k+\nu}h+j=n\\ |j|>2^{k+\nu-1}}}{}' b_h c_j\right|\leqslant\left\{\sum_{h=-\infty}^{+\infty}|b_h|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{|j|>2^{k+\nu-1}}|c_j|^2\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{h=-\infty}^{+\infty}|b_h|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{|j|>2^{k+\nu-1}}\frac{4}{j^2}\right\}^{1/2}=O\left(\frac{1}{2^{k+\nu}}\right). \qquad (10)$$

Используя оценки (9), (10), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{I}_2(n)|^p=O\left(\left(\frac{1}{2^{k+\nu}}\right)^p\cdot 2^{k+\nu}+\sum_{\rho=1}^{\infty}\left(\frac{\ln\rho+1}{2^{k+\nu}\cdot\rho}\right)^p\cdot 2^{k+\nu}\right)=$$

$$=O\left(2^{(k+\nu)(1-p)}+2^{(k+\nu)(1-p)}\sum_{\rho=1}^{\infty}\left(\frac{\ln\rho+1}{\rho}\right)^p\right)=O\left(2^{(k+\nu)(1-p)}\right). \qquad (11)$$

Учитывая, что $p>1$, из (11) следует

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_2(n)|^p \to 0, \text{ когда } \nu \to +\infty.$$

Таким образом, пункт 1° полностью доказан.

Докажем пункт 2°. Заметим, что

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx < 2 \cdot \frac{2^m}{2^k}.$$

Поэтому

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 < 2^{m-k+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}_W(n)|^2 < 2^{m-k+1}. \tag{12}$$

Из определения функции $f(x)$ следует также:

$$|\hat{f}(n)| = \left|\int_0^1 f(t)\, e^{2\pi i n t}\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,dt < 2^{-k+1}, \tag{13}$$

$$|\hat{f}_W(n)| = \left|\int_0^1 f(t)\, W_n(t)\,dt\right| < 2^{-k+1}.$$

Из неравенств (12) и (13) вытекает

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^q = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2\, |\hat{f}(n)|^{q-2} \leqslant \sup_n |\hat{f}(n)|^{q-2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 <$$

$$< 2^{(-k+1)(q-2)} \cdot 2^{m-k+1} = 2^{m+k-kq-q-1} = 2^{1-q} \cdot 2^{m-\frac{k}{p-1}}.$$

Точно так же

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_W(n)|^q < 2^{m+k-kq-q-1} = 2^{1-q} \cdot 2^{m-\frac{k}{p-1}}.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Для любых n и $\varepsilon>0$ можно выбрать ν настолько большим, чтобы кроме неравенств 1°, 2° выполнялись (по этому поводу см., напр., [9], стр. 167, или [10])

$$|\hat{f}(k)| < \varepsilon \text{ и } \hat{f}_W(k) = 0, \text{ когда } |k| \leqslant n.$$

Верны следующие теоремы.

Теорема 5. *Для любого p, $1<p\leqslant 2$, существует множество $E\subset[0,1]$, которое является $U_{p'}$-множеством одновременно для тригонометрической системы и системы Уолша при любом $p'<p$ и не является U_p-множеством ни для тригонометрической системы и ни для системы Уолша.*

Теорема 6. *Для любого p, $1\leqslant p<2$, существует множество $E\subset[0,1]$, которое является U_p-множеством для тригонометри-*

ческой системы и для системы Уолша и не является $U_{p'}$-множеством ни для тригонометрической системы и ни для системы Уолша при любом $p' > p$.

Теоремы 5 и 6 доказываются почти одинаково и опираются на оценки леммы 2 и замечания 1. Мы докажем только теорему 5.

Доказательство теоремы 5. Для фиксированного p, $1 < p < 2$, построим ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n x}$, у которого $0 < \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty$ и множество, где этот ряд обращается в нуль, является $U_{p'}$-множеством при любом $p' < p$ для тригонометрической системы.

Возьмем $a_0 = 1$. Выберем натуральное число k_1 таким, чтобы нашлось натуральное число m_1, удовлетворяющее следующему условию:

$$k_1 \frac{2-p}{p-1} + \frac{p+1}{p-1} < m_1 < k_1 \frac{2-p+\dfrac{p-1}{2}}{p-1-\dfrac{p-1}{2}} - 1, \tag{14}$$

Разделим отрезок $[0,1]$ на 2^{k_1} равных отрезков. В каждом из них построим функции $\varphi_1^{(l)}(x)$ и $f_1^{(l)}(x)$ (см. (1), (2)), которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_1^{(l)}(n)|^p < A \cdot 2^{(1-p)(k_1+m_1)}, \tag{15}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_1^{(l)}(n)|^{q_1} < A \cdot 2^{m_1 - k_1 \frac{1}{p-\frac{p-1}{2}-1}}, \tag{16}$$

где q_1 — сопряженное к $p - \dfrac{p-1}{2}$.

Функция $1 - \sum_{l=1}^{2^{k_1}} \varphi_1^{(l)}(x)$ равна нулю там, где $\sum_{l=1}^{2^{k_1}} f_1^{(l)}(x)$ не равна единице. Учитывая замечание 1 и то, что $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\varphi_1^{(l)}(n)|^p < +\infty$, можно соответствующее ν (см. (1), (2)) взять настолько большим, что если обозначить $\varphi_1(x) = \sum_{l=1}^{2^{k_1}} \varphi_1^{(l)}(x)$ и $f_1(x) = \sum_{l=1}^{2^{k_1}} f_1^{(l)}(x)$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_1(n)|^p < 2A \cdot 2^{(1-p)(k_1+m_1)} \cdot 2^{k_1}, \tag{17}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_1(n)|^{q_1} < 2A \cdot 2^{m_1 - k_1 \frac{1}{p-\frac{p-1}{2}-1}} \cdot 2^{k_1}. \tag{18}$$

Для того, чтобы выполнялись (17), (18) нужно при построении $\varphi_1^{(l)}(x)$ и $f_1^{(l)}(x)$ взять n_l таким, чтобы $\sum_{|n|>n_1^{(l)}} |\hat{\varphi}_1^{(1)}(n) + \cdots + \hat{\varphi}_1^{(l-1)}(n)|^p < \varepsilon_l$,

$\sum\limits_{|n|>n_1^{(l)}} |\widehat{f}_1^{(l)}(n)+\cdots+\widehat{f}_1^{(l-1)}(n)|^{q_1}<\varepsilon_1^{(l)}$ и взять ν в функциях $\varphi_1^{(l)}(x)$, $f_1^{(l)}(x)$

таким, чтобы $|\widehat{\varphi}_1^{(l)}(n)|<\delta_1^{(l)}$, $|\widehat{f}_1^{(l)}(n)|<\delta_1^{(l)}$, когда $|n|<n_1^{(l)}$. Если выбрать $\varepsilon_1^{(l)}$ и $\delta_1^{(l)}$ достаточно малыми, то выполнятся (17), (18).

Обозначим $E_1=\{x\in[0,1]: f_1(x)\neq 1\}$.

Множество E_1 является объединением конечного числа отрезков типа Хаара. Отрезок [0,1] разделим на 2^{k_2} равных отрезков так, чтобы длины этих отрезков были меньше, чем длина наименьшего составляющего отрезка множества E_1 и нашлось такое число m_2, что

$$k_2\frac{2-p}{p-1}+2\frac{p+1}{p-1}<m_2<k_2\frac{2-p+\frac{p-1}{3}}{p-1-\frac{p-1}{3}}-2. \tag{19}$$

В каждом из этих отрезков построим функции $\varphi_2^{(l)}(x)$ и $f_2^{(l)}(x)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{\varphi}_2^{(l)}(n)|^p<A\cdot 2^{(1-p)(k_2+m_2)}, \tag{20}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}_2^{(l)}(n)|^{q_2}<A\cdot 2^{\frac{m_2-k_2}{p-\frac{p-1}{3}}\cdot\frac{1}{-1}},$$

где q_2—сопряженное к $p-\frac{p-1}{3}$.

Обозначим

$$E_2=\left\{x\in[0,1]:\sum_{l=1}^{2^{k_2}}f_2^{(l)}(x)\neq 1\right\}.$$

Так как $1+\varphi_1(x)$ на $\left[\frac{\varkappa}{2^{k_2}},\frac{\varkappa+1}{2^{k_2}}\right]$, $\varkappa=0,1,\cdots,2^{k_2}$, принимает постоянные значения по модулю меньше двух, то существуют числа α_l, $|\alpha_l|\leqslant 2$, такие, что

$$1+\varphi_1(x)+\sum_{l=1}^{2^{k_2}}\alpha_l\,\varphi_2^{(l)}(x)=0 \text{ на } E_1\cup E_2.$$

При построении $\varphi_2^{(l)}(x)$ и $f_2^{(l)}(x)$ можно соответствующие ν взять настолько большими, что $\left(\varphi_2(x)=\sum\limits_{l=1}^{2^{k_2}}\alpha_l\varphi_2^{(l)}(x),\ f_2(x)=\sum\limits_{l=1}^{2^{k_2}}f_2^{(l)}(x)\right)$

$$\sum_{|n|>n_1}|\widehat{\varphi}_1(n)|^p<\frac{1}{2^2}, \tag{21}$$

$$\sum_{|n|<n_2}|\widehat{\varphi}_2(n)|^p<\frac{1}{2^2}, \tag{22}$$

$$\sum_{|n|>n_2} |\widehat{\varphi}_2(n)|^p < 2A\cdot 2^{(1-p)(k_2+m_2)}\cdot 2^{k_2}\cdot 2^p \tag{23}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_2(n)|^{q_2} < 2A\cdot 2^{m_2-k_2\frac{1}{p-\frac{p-1}{3}-1}}\cdot 2^{k_2}. \tag{24}$$

Для этого при построении функций $\varphi_2^{(l)}(x)$ и $f_2^{(l)}(x)$ нужно взять такое $n_2^{(l)}$, чтобы $\sum\limits_{|n|>n_2^{(l)}} |\widehat{\varphi}_1(n)+\widehat{\varphi}_2^{(l)}(n)+\cdots+\widehat{\varphi}_2^{(l-1)}(n)|^p<\varepsilon_2^{(l)}$, $\sum\limits_{|n|>n_2^{(l)}} |\widehat{f}_2^{(l)}(n)+$ $+\cdots+\widehat{f}_2^{(l-1)}(n)|^{q_2}<\varepsilon_2^{(l-1)}$ и взять ν в функциях $\varphi_2^{(l)}(x)$, $f_2^{(l)}(x)$ такое чтобы $|\widehat{\varphi}_2^{(l)}(n)|<\delta_2^{(l)}$, $|\widehat{f}_2^{(l)}(n)|<\delta_2^{(l)}$, когда $|n|<n_2^{(l)}$. При подходящем выборе $\varepsilon_2^{(l)}$, $\delta_2^{(l)}$ (их можно взять произвольно) выполняется (21)—(24).

Пусть уже построены функции $\varphi_i(x)$, $f_i(x)$ и множества E_i $(i<j)$ так, чтобы

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_i(n)|^{q_i} < 2A\cdot 2^{m_i-k_i\frac{1}{p-\frac{p-1}{i+1}-1}}\cdot 2^{k_i}, \tag{25}$$

$$\sum_{|n|>n_i} |\widehat{\varphi}_1(n)+\cdots+\widehat{\varphi}_{i-1}(n)|^p < \frac{1}{2^i}, \tag{26}$$

$$\sum_{|n|<n_i} |\widehat{\varphi}_i(n)|^p < \frac{1}{2^i}, \tag{27}$$

$$\sum_{|n|>n_i} |\widehat{\varphi}_i(n)|^p < 2A\cdot 2^{(1-p)(k_i+m_i)}\cdot 2^{ki}\cdot 2^{ip}; \tag{28}$$

где

$$k_i\frac{2-p}{p-1}+i\frac{p+1}{p-1}<m_i<k_i\frac{2-p+\frac{p-1}{i+1}}{p-1-\frac{p-1}{i+1}}-i, \tag{29}$$

$$E_i=\{x\in[0,1]: f_i(x)\neq 1\}, \tag{30}$$

$$\left|1+\sum_{i=1}^{j-1}\varphi_i(x)\right|<2^j,\quad x\in[0,1], \tag{31}$$

$$1+\sum_{i=1}^{j-1}\varphi_i(x)=0,\quad x\in\bigcup_{i=1}^{j-1}E_i. \tag{32}$$

Можно построить функции $\varphi_j(x)$, $f_j(x)$ и множества E_j, которые удовлетворяют условиям (25)—(32) (они строятся так, как строились $\varphi_2(x)$ и $f_2(x)$).

Из (28), (29) следует

$$\sum_{|n|>n_i} |\widehat{\varphi}_i(n)|^p < 2A\cdot 2^{k_i}\cdot 2^{ip}\cdot 2^{(1-p)(k_i+m_i)}<$$

$$<2A\cdot 2^{k_l}\cdot 2^{lp}\cdot 2^{(1-p)\left(k_l+k_l\frac{2-p}{p-1}+l\frac{p+1}{p-1}\right)}=2A2^{-l}. \tag{33}$$

Функция $\varphi(x)=1+\sum\limits_{l=1}^{\infty}\varphi_l(x)$ равна нулю на $E=\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}E_l$ и $\hat{\varphi}(n)=$ $=\hat{1}(n)+\sum\limits_{l=1}^{\infty}\hat{\varphi}_l(n)$. Докажем, что $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}(n)|^p<+\infty$.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}(n)|^p=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n_\nu<|n|<n_{\nu+1}}|\hat{\varphi}(n)|^p=1+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n_\nu<|n|<n_{\nu+1}}\left|\sum_{l=1}^{\nu-1}\hat{\varphi}_l(n)+\hat{\varphi}_\nu(n)+\sum_{l=\nu+1}^{\infty}\hat{\varphi}_l(n)\right|^p\leqslant \tag{34}$$

$$\leqslant 1+4\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n_\nu<|n|<n_{\nu+1}}\left(\left|\sum_{l=1}^{\nu-1}\hat{\varphi}_l(n)\right|^p+|\hat{\varphi}_\nu(n)|^p+\left|\sum_{l=\nu+1}^{\infty}\hat{\varphi}_l(n)\right|^p\right).$$

Из (33) следует

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n_\nu<|n|<n_{\nu+1}}|\hat{\varphi}_\nu(n)|^p\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}2A\cdot 2^{-\nu}<+\infty. \tag{35}$$

Из неравенства Минковского и (27) получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{n_\nu<|n|<n_{\nu+1}}\left|\sum_{l=\nu+1}^{\infty}\hat{\varphi}_l(n)\right|^p\right)\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{l=\nu+1}^{\infty}\left(\sum_{n_\nu<|n|<n_{\nu+1}}|\hat{\varphi}_l(n)|^p\right)^{1/p}\right)^p\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{l=\nu+1}^{\infty}\left(\sum_{|n|<n_l}|\hat{\varphi}_l(n)|^p\right)^{1/p}\right)^p\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{l=\nu+1}^{\infty}2^{-\frac{l}{p}}\right)^p<+\infty. \tag{36}$$

Из (26) следует

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n_\nu<|n|<n_{\nu+1}}\left|\sum_{l=1}^{\nu-1}\hat{\varphi}_l(n)\right|^p\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n_\nu<|n|}\left|\sum_{l=1}^{\nu-1}\hat{\varphi}_l(n)\right|^p\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{-\nu}<+\infty. \tag{37}$$

Из (34)—(37) следует, что $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}(n)|^p<+\infty$.

Этим мы доказали, что $E=\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}E_l$ не является U_p-множеством. Докажем, что E является $U_{p'}$-множеством для любого $p'<p$.

Пусть для некоторой функции $f(x)$, которая равна нулю на E, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(n)|^{p'}<+\infty$. Начиная с некоторого i_0, $p_i=p-\dfrac{p-1}{i-1}>p'$. Пусть $i>i_0$, тогда

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|=\left|\int_0^1 f_i(x)f(x)\,dx\right|=\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}_i(n)\hat{f}(n)\right|\leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_i(n)|^{q'} \right\}^{1/q'} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^{p'} \right\}^{1/p'} \leqslant \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^{p'} \right\}^{1/p'} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_i(n)|^{q_i} \right\}^{1/q_i}. \tag{38}$$

Из (38), (25) и (29) следует

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leqslant \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^{p'} \right\}^{1/p'} \left\{ 2A\, 2^{k_i}\, 2^{m_i - k_i \frac{1}{p - \frac{p-1}{i+1} - 1}} \right\}^{\frac{1}{q_i}} <$$

$$< \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^{p'} \right\}^{\frac{1}{p'}} \left\{ 2A \cdot 2^{k_i - k_i \frac{1}{p - \frac{p-1}{i+1} - 1} + k_i \frac{2 - p + \frac{p-1}{i+1}}{p - 1 - \frac{p-1}{i+1}} - i} \right\}^{\frac{1}{q_i}} =$$

$$= \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^{p'} \right\}^{1/p'} \{2A \cdot 2^{-i}\}^{1/q_i} \to 0, \text{ когда } i \to \infty$$

Точно так же получим, что $\hat{f}(n) = 0$, $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$. Таким образом, $f(x) = 0$ п.в. на $[0,1]$.

Таким же путем можно доказать, что E не является U_p-множеством и является $U_{p'}$-множеством для любого $p' < p$ для системы Уолша, так как все использованные оценки верны также для системы Уолша. Теорема 5 доказана.

Заметим, что $\mu E_i \to 0$. Действительно $\mu E_i = 2^{-m_i} \to 0$

Из доказательства теоремы 5 видно, что множество $E^{(n)} = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$ тоже удовлетворяет требованиям теоремы 5, причем $\lim_{n\to\infty} \mu E^{(n)} = 0$.

Множества $E^{(n)}$ можно считать открытыми, так как концы составляющих интервалов множеств E_i можно исключить из E_i. Если в формулах (1), (2) при нечетном $\varkappa$ взять

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \bigcup_{l=1}^{2^{\nu}} \left(\frac{\varkappa}{2^k} + \frac{l-1}{2^{k+\nu}}, \frac{\varkappa}{2^k} + \frac{l}{2^{k+\nu}} - \frac{1}{2^{k+\nu+m}} \right) \\ 1 - 2^m & \bigcup_{l=1}^{2^{\nu}} \left(\frac{\varkappa}{2^k} + \frac{l}{2^{k+\nu}} - \frac{1}{2^{k+\nu+m}}, \frac{\varkappa}{2^k} + \frac{l}{2^{k+\nu}} \right) \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \bigcup_{l=1}^{2^{\nu}} \left(\frac{\varkappa}{2^k} + \frac{l}{2^{k+\nu}} - \frac{1}{2^{k+\nu+m}}, \frac{\varkappa}{2^k} + \frac{l}{2^{k+\nu}} \right) \\ -1 & \bigcup_{l=1}^{2^{\nu}} \left(\frac{\varkappa}{2^k} + \frac{l}{2^{k+\nu}} - \frac{2}{2^{k+\nu+m}}, \frac{\varkappa}{2^k} + \frac{l}{2^{k+\nu}} - \frac{1}{2^{k+\nu+m}} \right) \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

то все двоично рациональные числа будут включены в $E^{(n)}$ при любом n и все оценки леммы 1 и доказательства теоремы 5 останутся верными.

Пусть J — некоторый интервал с двоично-рациональными концами и k — некоторое натуральное число. Тогда для произвольного $\varepsilon>0$ и $p'>p$ существует множество E_j, $j>k$, такое, что функция

$$\psi(x)=\begin{cases} 1 & \text{на } J\setminus E_j \\ 1-\dfrac{\mu(J)}{\mu(E_j\cap J)} & \text{на } E_j \\ 0 & \text{на } [0,1]\setminus J \end{cases} \tag{39}$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(n)|^{q'}<\varepsilon,\quad \sum_{n=0}^{\infty}|\hat{\psi}_W(n)|^{q'}<\varepsilon,$$

где q' сопряженное к p'.

Все эти замечания будут использованы в третьем параграфе. Их можно было бы доказать по ходу доказательства теоремы 5, однако, при этом очень усложнилась бы запись.

§ 3. Об U_p^*-множествах меры нуль

Учитывая замечания, сделанные в конце второго параграфа, из теоремы 5 следует, что для произвольных p, $1<p\leqslant 2$, и $\varepsilon>0$ существует открытое U_p^*-множество для тригонометрической системы и системы Уолша, которое не является $U_{p'}^*$-множеством ни для тригонометрической системы и ни для системы Уолша. Это следует из того, что множество, построенное в теореме 5, открытое и для этих ортогональных систем имеет место принцип локализации.

В этом параграфе мы докажем существование множеств меры нуль, обладающих вышеуказанными свойствами. А именно, верна следующая

Теорема 7. *Для любого p, $1<p\leqslant 2$, существует множество $E\subset[0,1]$, $\mu E=0$, которое не является U_p^*-множеством ни для тригонометрической системы и ни для системы Уолша, т. е. существуют ряды $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi inx}$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi inx}=0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)=0$, *когда* $x\notin E$,

2. $0<\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n|^p<+\infty$, $0<\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^p<+\infty$.

В то же время E является $U_{p'}^*$-множеством как для тригонометрической системы, так и для системы Уолша при любом $p'<p$.

Доказательство. Пусть $E^{(n)}$ — множества, построенные при доказательстве теоремы 5. Ясно, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$ имеет меру нуль и не является U_p^*-множеством ни для тригонометрической системы и ни для системы Уолша. Это следует из того, что существуют ряды $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi inx}$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$, которые сходятся к нулю на $E^{(1)}$ и $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^p < +\infty$.

Докажем, что $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$ является U_p^*-множеством как для тригонометрической системы, так и для системы Уолша. Доказательство этого факта основывается на нескольких леммах.

Лемма 3. *Для любого p', $1 < p' < p$, и любого $\varepsilon > 0$ существует монотонная сингулярная функция $\varphi(x)$ такая, что носитель меры $d\varphi(x)$ лежит в E и*

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi inx} d[\varphi(x) - x] \right|^{q'} \right\}^{1/q'} < \varepsilon, \tag{1}$$

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^1 W_n(x) d[\varphi(x) - x] \right|^{q'} \right\}^{1/q'} < \varepsilon, \tag{2}$$

где q' — сопряженное к p'.

Доказательство леммы 3 основывается на следующей лемме.

Лемма 4. *Пусть $J = (a, b)$ — интервал с двоично-рациональными концами. Тогда для любых k, $\varepsilon > 0$ и α существуют множество E_j, $j > k$ и монотонная непрерывная функция $f(x)$, которые удовлетворяют следующим условиям:*

1° $f'(x) = 0$ $x \notin (a, b)$ *или* $x \notin \overline{E}_j$,

2° $f'(x) = \mathrm{const}$, *когда* $x \in (a, b) \cap E_j$,

3° $f(x) = 0$ *при* $x \leqslant a$ *и* $f(x) = \alpha(b - a)$ *при* $x > b$,

4° $$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \int_a^b e^{2\pi inx} d[f(x) - \alpha x] \right|^{q'} \right\}^{1/q'} < \varepsilon,$$

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_a^b W_n(x) d[f(x) - \alpha x] \right|^{q'} \right\}^{1/q'} < \varepsilon,$$

5° $|f(x) - \alpha(x - a)| < \varepsilon$ *для любого* $x \in [a, b]$.

Доказательство легко следует из замечаний, сделанных в конце второго параграфа. В качестве $f(x)$ можно взять

$$f(x) = \alpha \int_0^x [\chi_J(t) - \psi(t)]\, dt,$$

где $\psi(x)$ — функция, определенная формулой (39) второго параграфа.

Доказательство леммы 3. Возьмем $\varepsilon_i > 0$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$. Из леммы 4 вытекает существование функции $f_1(x)$ и числа $k_1 > 1$ таких, что

1) $f_1'(x) = 0$ при $x \overline{\in} E_{k_1}$

2) $f_1'(x) = \text{const}$, $x \in E_{k_1}$

3) $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$,

4) $$\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 e^{2\pi i n x}\, d[f_1(x) - x] \right|^{q'}\right\}^{1/q'} < \varepsilon_1$$

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^1 W_n(x)\, d[f_1(x) - x] \right|^{q'}\right\}^{1/q'} < \varepsilon_1,$$

5) $|f(x) - x| < \varepsilon_1$ для $x \in [0,1]$.

Пусть I_j, $j = 1, 2, \cdots,$ — составляющие интервалы E_{k_1}, функция $f_1'(x)$ на I_j принимает постоянное значение. Применяя лемму 4 для $a = f_1'(x)$, $x \in I_j$; $\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{\nu_1}$ и интервалов I_j, получим монотонно возрастающие непрерывные функции $f_2^j(x)$ такие, что:

6) $(f_2^j(x))' = 0$ при $x \overline{\in} \overline{I}_j$ или $x \overline{\in} I_j \cap E_{k_2^j}$, где k_2^j — некоторое число большее двух.

7) $(f_2^j(x))' = \text{const}$ при $x \in I_j \cap E_{k_2^j}$,

8) $f_2^j(x) = 0$ при $x \leqslant a_1^j$ и $f_2^j(x) = f_1'(x)(b_1^j - a_1^j)$ при $x > b_1^j$, где $(a_1^j, b_1^j) = I_j$,

9) $$\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \int_{I_j} e^{2\pi i n x}\, d[f_2^j(x) - f_1'(x)\cdot x] \right|^{q'}\right\}^{1/q'} < \frac{\varepsilon_2}{\nu_1},$$

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{I_j} W_n(x)\, d[f_2^j(x) - f_1'(x)\cdot x] \right|^{q'}\right\}^{1/q'} < \frac{\varepsilon_2}{\nu_1},$$

10) $|f_1^j(x) - f_1'(x)(x - a_1^j)| < \frac{\varepsilon_2}{\nu_1}$ для $x \in I_j$.

Обозначим $f_2(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_2^j(x)$. Ясно, что $f_2(x)$ — монотонно возрастающая непрерывная функция и что $B_2 = \bigcup\limits_{j=1}^{\nu_1} (J \cap E_{k_2^j}) \subset E^{(2)}$. Легко видеть (из (8) и 10))

$$f_1(x) = f_2(x), \text{ когда } x \overline{\in} E_{k_1} \tag{3}$$

и

$$|f_1(x)-f_2(x)|<\varepsilon_1, \text{ когда } x\in[0,1]. \tag{4}$$

Из 4), 9) и (3) получим

$$\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\int_0^1 e^{2\pi i n x}\,d[f_2(x)-x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'}=\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\int_{E_{k_1}} e^{2\pi i n x}\,d[f_2(x)-x]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{[0,1]\setminus E_{k_1}} e^{2\pi i n x}\,d[f_1(x)-x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'}=\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{j=1}^{\nu_1}\int_{I_j} e^{2\pi i n x}\,d[f_2(x)-f_1(x)]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^1 e^{2\pi i n x}\,d[f_1(x)-x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'}\leqslant\sum_{j=1}^{\nu_1}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\int_{I_j} e^{2\pi i n x}\,d[f_2(x)-f_1(x)]\right|^{q'}\right\}^{1/q'}+$$

$$+\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\int_0^1 e^{2\pi i n x}\,d[f_1(x)-x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'}<\nu_1\cdot\frac{\varepsilon_2}{\nu_1}+\varepsilon_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

Точно так же получим

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 W_n(x)\,d[f_2(x)-x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'}<\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

Итак, функция $f_2(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

11) $f_2'(x)=0$, когда $x\overline{\in} E^{(2)}$,

12) $f_2(x)=f_1(x)$, когда $x\overline{\in} E^{(1)}$,

13) $|f_2(x)-f_1(x)|<\varepsilon_1$ для всех $x\in[0,1]$

14) $$\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\int_0^1 e^{2\pi i n x}\,d[f_2(x)-x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'}<\varepsilon_1+\varepsilon_2,$$

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 W_n(x)\,d[f_2(x)-x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'}<\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность монотонно возрастающих непрерывных функций $f_n(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

A) $f_n'(x)=0$, $x\overline{\in} E^{(n)}$,

B) $f_n(x)=f_{n-1}(x)$, $x\overline{\in} E^{(n-1)}$,

C) $|f_n(x)-f_{n-1}(x)|<\varepsilon_{n-1}$ для всех $x\in[0,1]$,

D) $$\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\int_0^1 e^{2\pi i n x}\,d[f_n(x)-x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'}<\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j,$$

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 W_n(x)\,d[f_n(x)-x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'}<\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j.$$

Из A) — C) и из того, что $E^{(n)} \subset E^{(n-1)}$, следует, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к некоторой сингулярной функции $f(x)$, причем носитель меры $df(x)$ лежит в $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$.

Из того, что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ всюду, $e^{2\pi i n x}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ непрерывны, $W_n(x)$, $n=0, 1, 2, \cdots$, кусочно-непрерывны и вариации функций $f_n(x)$ равномерно ограничены ($Vf_n = 1$), по теореме Хелли (см. [11], стр. 254) в неравенствах

$$\left\{\sum_{n=-M}^{M}\left|\int_0^1 e^{2\pi i n x}\, d\,[f_n(x) - x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'} < \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l < \varepsilon$$

и

$$\left\{\sum_{n=0}^{M}\left|\int_0^1 W_n(x)\, d\,[f_n(x) - x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'} < \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l < \varepsilon$$

можно перейти к пределу. Получим

$$\left\{\sum_{n=-M}^{M}\left|\int_0^1 e^{2\pi i n x}\, d\,[f(x) - x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'} < \varepsilon \tag{5}$$

и

$$\left\{\sum_{n=0}^{M}\left|\int_0^1 W_n(x)\, d\,[f(x) - x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'} < \varepsilon. \tag{6}$$

Учитывая, что M произвольно, из (5), (6) следует (1), (2). Лемма 3 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 7. Пусть ряды $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n x}$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ сходятся к нулю всюду на E, за исключением, быть может, некоторого счетного множества и

$$\alpha = \left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^{p'}\right\}^{1/p'} < +\infty,\ \beta = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^{p'}\right\}^{1/p'} < +\infty. \tag{7}$$

Обозначим

$$G_1 = \left\{x \in [0,1]:\ \limsup_{n\to\infty}\left|\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{2\pi i k x}\right| \geqslant 1\right\},$$

$$G_2 = \left\{x \in [0,1]:\ \limsup_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} b_k W_k(x)\right| > 1\right\}.$$

Если $G_1 = \varnothing$, то это означает, что ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n x}$ является рядом Фурье от некоторой ограниченной функции. Тогда суммы Фейера

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)a_k e^{2\pi ikx}$$

равномерно ограничены и сходятся к нулю на E. Допустим $a_0\neq 0$. В силу леммы 3 существует сингулярная функция $f(x)$ такая, что носитель меры $df(x)$ лежит в E и

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 e^{2\pi inx}\,d[f(x)-x]\right|^{q'}\right\}^{1/q'}<\frac{|a_0|}{2a}.$$

Тогда

$$|a_0|=\left|\int_0^1\sigma_n(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int_0^1\sigma_n(x)\,d[f(x)-x]\right|+\left|\int_0^1\sigma_n(x)\,df(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)a_k\int_0^1 e^{2\pi inx}\,d[f(x)-x]\right|+\left|\int_0^1\sigma_n(x)\,df(x)\right|\cdot$$

Когда n стремится к $+\infty$, второе слагаемое стремится к нулю, так как $\sigma_n(x)$ равномерно ограничены и стремятся к нулю почти всюду по мере $df(x)$ (счетное множество по мере $df(x)$ имеет меру нуль). Но это противоречит тому, что $a_0\neq 0$. Следовательно, $a_0=0$. Умножив ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{2\pi inx}$ на $e^{-2\pi inx}$ и повторив эти рассуждения, получим, что $a_n=0$, $n=\pm 1,\ \pm 2,\cdots$.

Когда $G_2=\varnothing$, такими же рассуждениями получим, что $b_n=0$, $n=0,\ 1,\ 2,\cdots$.

Если $G_1\neq\varnothing$, то

$$G_1=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=m}^{\infty}\left\{x:\left|\sum_{n=-\nu}^{\nu}a_n e^{2\pi inx}\right|>1-\frac{1}{k}\right\}$$

является множеством типа G_δ, т. е. пересечением счетного числа открытых множеств, и $G_1\subset[0,1]\setminus E=\bigcap_{n=1}^{\infty}([0,1]\setminus E^{(n)})=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, где F_n — замкнутые множества.

Если $G_1\neq\varnothing$, то из того, что G_1 — типа G_δ и $G_1\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, по лемме Н. К. Бари (см. [12], стр. 548), следует существование интервала I и натурального числа m таких, что

$$\varnothing\neq G_1\cap I\subset I\cap F_m. \tag{8}$$

Возьмем какой-нибудь интервал $J\subset I$, который не пересекается с F_m (F_m — замкнуто). Пусть $\lambda(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, которая положительна на J и равна нулю вне J. Тогда ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{2\pi inx}$, являющийся формальным произведением рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{2\pi inx}\ \text{и}\ S[\lambda]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\gamma_n e^{2\pi inx},$$

сходится к нулю вне J и на $J \cap E$, является рядом от некоторой ограниченной функции и $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^{p'} < +\infty$. Следовательно, $c_n = 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Но ряды $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \lambda(x) e^{2\pi i n x}$ и $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x}$ равномерно равносходятся и $\lambda(x) \neq 0$, когда $x \in J$. Поэтому

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n x} = 0, \text{ когда } x \in J \subset I \setminus F_m.$$

Из того, что J—произвольный интервал, лежащий в $I \setminus F_m$, следует

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n x} = 0, \text{ когда } x \in I \setminus F_m = I \cap E^{(m)}.$$

Пусть $\varphi(x)$— бесконечно дифференцируемая функция, которая положительна на I и равна нулю вне I. Пусть $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{2\pi i n x}$ является формальным произведением ряда $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n x}$ на ряд Фурье функции $\varphi(x)$. Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{2\pi i n x} = 0 \text{ при } x \in I \cap E^{(m)} \text{ или } x \overline{\in} I \tag{9}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |d_n|^{p'} < +\infty. \tag{10}$$

В силу того, что $E^{(m)}$ является $U_{p'}$-множеством, из (9), (10) следует $d_n = 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Отсюда имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n x} = 0, \text{ когда } x \in I.$$

Но это противоречит (8). Этим доказано, что E является $U^*_{p'}$-множеством для тригонометрической системы. Докажем, что E является $U^*_{p'}$-множеством для системы Уолша.

Если $G_2 \neq \varnothing$, то $G_2 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=m}^{\infty} \left\{x: \left| \sum_{n=0}^{\nu} b_n W_n(x) \right| > 1 - \frac{1}{k} \right\}$ является множеством типа G_δ. Действительно, множество

$$A_{k,\nu} = \left\{x: \left| \sum_{n=0}^{\nu} b_n W_n(x) \right| > 1 - \frac{1}{k} \right\}$$

является объединением конечного числа интервалов, концы которых— двоично-рациональные числа и их можно исключить из $A_{k,\nu}$, так как двоично-рациональные числа принадлежат E, следовательно не принадлежат G_2. Поэтому $A_{k,\nu}$ можно считать открытыми.

В остальном доказательство то же самое, только нужно интервалы I, J взять интервалами типа Хаара и ряд формально умножить на $\varphi(x)$, $\lambda(x)$, которые являются, соответственно, характеристическими функциями интервалов I, J. Теорема 7 полностью доказана.

Такими же методами, опираясь на теорему 6, можно доказать следующую теорему.

Теорема 8. *Для любого p, $1\leqslant p<2$, существует множество $E\subset[0,1]$, $\mu E=0$, которое является U_p^*-множеством одновременно для тригонометрической системы и системы Уолша. В то же время E не является $U_{p'}^*$-множеством ни для тригонометрической системы и ни для системы Уолша, т. е. для произвольного $p'>p$ существуют ряды*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi inx},\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x),$$

которые сходятся к нулю на E и

$$0<\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n|^{p'}<+\infty,\ 0<\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|b_n|^{p'}<+\infty.$$

Аналогичные теоремы верны также для системы Хаара.

Теорема 9. *Для любого p, $1<p\leqslant 2$, существует множество $E\subset[0,1]$, $\mu E=0$, которое является U_p^*-множеством для системы Хаара при любом $p'<p$ и не является U_p^*-множеством для системы Хаара.*

Теорема 10. *Для любого p, $1\leqslant p<2$, существует множество $E\subset[0,1]$, $\mu E=0$, которое является U_p^*-множеством для системы Хаара и не является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p'>p$.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 12.I.1983

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ Որոշ օրթոգոնալ շարքերի միակության բազմությունների վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Կասենք, որ $E\subset[0,1]$ *բազմությունը* U_p*-բազմություն է* $[0,1]$*-ի վրա օրթոնորմավորված* $\{\varphi_n(x)\}$ *համակարգի համար, եթե* $f(x)=0$ *հ.ա.* E*-ի վրա և* $\sum_n \left|\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx\right|^p<+\infty$ *պայմաններից հետևում է, որ* $f(x)=0$ *հ.ա.* $[0,1]$*-ի վրա։*

Աշխատանքում, մասնավորապես, ապացուցված է, որ կամայական $1<p<p'<2$ *համար գոյություն ունի այնպիսի* U_p*-բազմություն՝* $E\subset[0,1]$, *որը չի հանդիսանում* $U_{p'}$*-բազմություն հետևյալ համակարգերի համար՝ եռանկյունաչափական, Հաարի, Ուոլշի։*

G. G. GEVORGIAN. *On sets of uniqueness for some orthogonal series* (summary)

We say that a set $E\subset[0,1]$ is a U_p-set for some orthonormal on [0,1] system $\{\varphi_n(x)\}$ if from the conditions: $f(x)=0$ a.e. on E and $\sum_n\left|\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx\right|^p<+\infty$ it follows that $f(x)=0$ a.e. on [0,1]. It is proved that for every $1<p<p'<2$ there exists such a U_p-set $E\subset[0,1]$ which is not $U_{p'}$-set for the trigonometric, Haar and Walsh systems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Y. Katznelson.* Sets of uniqueness for some class of trigonometric series, Bull. Amer. Math. Soc., 70, 1964, 723.

2. *L. Golzani.* Sets of uniqueness of l_p for General Orthonormal Complete Systems, Ball. U. M. I, (5), 16—B, 1979, 1134—1143.
3. *L. Golzani.* Existense of Sets of uniqueness of l^p for General Orthonormal Systems, Proc. A.M.S, vol. 83, № 3, 1981, 569—571.
4. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для полных ортонормированных систем, Мат. заметки, 32, № 5, 1982.
5. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для полных ортонормированных систем и интегралов Фурье, ДАН Арм.ССР, LXXII, № 4, 1981, 218—223.
6. *L. Michele, P. M. Soardi.* A. Remark on Sets of Uniqueness of l_p, Boll. U.M.I, (4), 11, 1975, 64—65.
7. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для рядов по некоторым полным ортонормированным системам, Ученые записки ЕГУ, № 2, 1981, 10—22.
8. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для некоторых ортогональных рядов, ДАН Арм. ССР,
9. *Г. Алексич.* Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., 1963.
10. *А. А. Талалян.* Представление измеримых функций рядами, УМН, XV, вып. 5 (95), 77—141.
11. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М., 1957.
12. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, том 1, М., 1965.