ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 6, 1983 Математика

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН

О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

В докладе Р. Неванлинны 1965 года (см. [1]) обсуждается следующая общая интерполяционная проблема: определить мероморфную в $|z| < R \leqslant \infty$ функцию, которая в заданных точках $z \in \mathbf{C}$ и только в них принимает $(q \geqslant 3)$ заданные значения $a_1, a_2, \cdots, a_q$.

Постановку эту можно понимать двояко.

I. Задана последовательность значений z_i, $i=1, 2, \cdots$. Определить необходимое и достаточное условия на z_i, при которых найдется функция $w(z)$, для которой

$$\{z_i\}_{i=1}^{\infty} = \{w^{-1}(a_1), w^{-1}(a_2), \cdots, w^{-1}(a_q)\}.$$

II. Каждому значению a_ν $(\nu=1, 2, \cdots, q)$ поставлена в соответствие последовательность $z_{i,\nu}$, $\nu=1, 2, \cdots, q$, $i=1, 2, \cdots$ (или пустое множество). Определить необходимое и достаточное условия на $z_{i,\nu}$, при которых для некоторой функции $w(z)$ будут выполнены соотношения

$$\{z_{i,\nu}\}_{i=1}^{\infty} = \{w^{-1}(a_\nu)\}, \quad \nu = 1, 2, \cdots, q.$$

Случай $q=1, 2$ решается с помощью канонического произведения Вайерштрасса.

При $q \geqslant 3$, в случае когда не требуется единственность (т. е. искомая функция $w(z)$ может принимать значения $a_1, a_2, \cdots, a_q$ также вне точек $z_{i,\nu}$), Р. Неванлинной и Пиком получено необходимое и достаточное условия в классе ограниченных в единичном круге аналитических функций.

Как отмечается в [1], получение одновременно необходимых и достаточных условий (с обеспечением единственности), задача чрезвычайной трудности: с одной стороны эти проблемы содержат в себе ряд еще нерешенных задач; с другой стороны такие условия должны, наверняка, содержать в себе еще и не подозреваемые свойства распределения a-точек рассматриваемых классов.

В настоящей заметке приводятся некоторые необходимые условия решений задач I и II, непосредственно вытекающие из обнаруженного в работе [2] свойства близости a-точек мероморфных функций.

Можно очевидным образом дополнить задачу в духе теории распределения значений. Именно, положим, что некоторые точки из z_i или $z_{i,\nu}$ являются для искомой функции $w(z)$ кратными точками наперед заданной кратности. Очевидно, по заданной последовательности z_i, $(z_{i,\nu})$ можем определить функцию

$$n(r)=\sum_{|z_l|<r} 1, \left(n^*(r)=\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{|z_{l,\nu}|<r} 1\right),$$

где под знаком сумм единицы берутся соответственно кратности приписанной точке z_l, $(z_{l,\nu})$. При этом предполагаем выполненным, очевидное, при рассмотрении задач I и II условие: $n(r)<\infty$, $(n^*(r)<\infty)$ при $r<R$.

Скажем, что значения $z_{k_1}, z_{k_2}, \cdots, z_{k_\mu}$ образуют пачку $\Pi'_j(r)$ (j— номер пачки) в смысле задачи I, если $\mu\leqslant q$; значения $z_{l_1}, \nu_{k_1}, z_{l_2,\nu_{k_2}}\cdots$ $\cdots, z_{l_\mu,\nu_{k_\mu}}$ образуют пачку $\Pi^*_j(r)$ в смысле задачи II, если $\mu\leqslant q$ и все значения $\nu_{k_1}, \nu_{k_2}, \cdots, \nu_{k_\mu}$ попарно различны (при этом точки z_l, $(z_{l,\nu})$, которым приписана кратность $p\geqslant 1$ могут фигурировать в p пачках $\Pi'_j(r)$, $(\Pi^*_j(r))$. Длиной $l(\Pi'_j(r))$, $(l(\Pi^*_j(r))$ пачки $\Pi'_j(r)$ $(\Pi^*_j(r))$ назовем длину кратчайшей кривой, соединяющей точки

$$z_{k_1}, z_{k_2}, \cdots, z_{k_\mu} \; (z_{l_1,\nu_{k_1}}, z_{l_2,\nu_{k_2}}, \cdots, z_{l_\mu,\nu_{k_\mu}}).$$

Справедливы следующие результаты*.

Теорема 1. *Необходимым условием решения задачи I в классе мероморфных в $|z|<\infty$ функций является выполнение следующих предложений.*

Для заданного ε $(0<\varepsilon<1)$ и любого r, исключая множество конечной логарифмической меры, в круге $|z|\leqslant r$ можно указать некоторое число $\overline{\Phi}(r)$ таких пачек $\Pi'_j(r)$ $(j=1, 2, \cdots, \overline{\Phi}(r))$, что

$$\frac{(1-\varepsilon)}{q}\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt\leqslant \int_0^r \frac{\overline{\Phi}(t)}{t}\,dt\leqslant \frac{1+\varepsilon}{q-2}\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt, \tag{1}$$

$$(1+\varepsilon)\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt\geqslant \int_0^r \frac{\overline{n}(t)}{t}\,dt\geqslant \frac{(q-2-\varepsilon)}{q}\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt, \tag{2}$$

где $\overline{n}(r)$ — суммарное количество всех точек z_l, принадлежащих всем пачкам $\Pi'_j(r)$, $j=1, 2, \cdots, \overline{\Phi}(r)$;

$$l(\Pi'_j(r))\leqslant \frac{K}{[n(r)]^{1/2}}\,r,\; j=1, 2, \cdots, \overline{\Phi}(r), \tag{3}$$

где K — постоянная, зависящая только от $a_1, a_2, \cdots, a_q$ и ε.

Теорема 1'. *Необходимым условием решения задачи II в классе мероморфных в $|z|<\infty$ функций является выполнение следующих предложений.*

Для заданного ε $(0<\varepsilon<1)$ и любого r, исключая множество E конечной логарифмической меры, в круге $|z|\leqslant r$ можно указать некоторое число $\overline{\Phi}^*(r)$ таких пачек $\Pi^*_j(r)$ $(j=1, 2, \cdots, \overline{\Phi}^*(r))$, что

* Учитывая, что приводимые далее необходимые условия, по всей вероятности далеки от достаточных, мы для наглядности приводим их в менее общей форме, чем это позволяет делать способ вывода.

$$\frac{(1-\varepsilon)}{q}\int_0^r \frac{n^*(t)}{t}\,dt \leqslant \int_0^r \frac{\overline{\Phi}^*(t)}{t}\,dt \leqslant \frac{1+\varepsilon}{q-2}\int_0^r \frac{n^*(t)}{t}\,dt, \qquad (1')$$

$$(1+\varepsilon)\int_0^r \frac{n^*(t)}{t}\,dt \geqslant \int_0^r \frac{\overline{n}^*(t)}{t}\,dt \geqslant \frac{q-2-\varepsilon}{q}\int_0^r \frac{n^*(t)}{t}\,dt, \qquad (2')$$

где $\overline{n}^*(r)$ — *суммарное количество всех точек* $z_{l,\nu}$, *принадлежащих всем пачкам* $\Pi_j^*(r), j=1, 2, \cdots, \overline{\Phi}^*(r)$,

$$l(\Pi_j^*(r)) \leqslant \frac{K}{[n^*(r)]^{1/2}}\, r, \; j=1, 2, \cdots, \overline{\Phi}^*(r), \qquad (3')$$

где K — *постоянная, зависящая только от* $a_1, a_2, \cdots, a_q$ *и* ε.

Эти теоремы отображают свойство близости a-точек мероморфных функций, притом неравенство $(2')$ отражает, по существу, вторую основную теорему Р. Неванлинны. Качественно полученные результаты можно выразить так: чтобы интерполяционная задача имела решение необходимо, чтобы большинство узлов интерполяции можно было бы сгруппировать в пачки с малыми длинами.

Указанное свойство близости вытекает из следующего более общего предложения.

Теорема А, [2]. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < R \leqslant \infty$ функция; n и p — фиксированные числа; $a_\nu \in C$ ($\nu=1, 2, \cdots, q$) таковы, что $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$.

Тогда для любого $r < R$ можно указать в круге $|z| \leqslant r$ $\Phi(r)$ односвязных областей $E_k(r)$ ($k=1, 2, \cdots, \Phi(r)$), удовлетворяющих условиям:

I. $E_{k_1}(r) \cap E_{k_2}(r) = \varnothing$ при $k_1 \neq k_2$: $w(z)$ однолистна в $E_k(r)$ ($k=1, 2, \cdots, \Phi(r)$); множество

$$\bigcup_{k=1}^{\Phi(r)} \bigcup_{j \neq k} \{\partial E_k(r) \cap \partial E_j(r)\}$$

является подмножеством множества не более чем p-кратных a_ν-точек ($\nu=1, 2, \cdots, q$);

II.

$$|\Phi(r) - A(r)| \leqslant \frac{8}{n+2} A(r) + hn^2 L(r), \qquad (4)$$

где $A(r)$ — сферическая характеристика Л. Альфорса (см. [3]), $h = \text{const} < \infty$, $L(r)$ — длина (в сферической метрике) образа окружности $|z| = r$ при отображении функцией $w(z)$;

III.

$$\sum_{k=1}^{\Phi(r)} d(E_k(r)) \leqslant K(n+2np)\, rA^{1/2}(r), \qquad (5)$$

где $d(x)$ — диаметр множества x, $K = K(a_1, a_2, \cdots, a_q) = \text{const} < \infty$ зависит только от $a_1, a_2, \cdots, a_q$;

IV.

$$\sum_{\nu=1}^{q}{}' n^*(r, a_\nu) \geqslant (q-2) A(r) -$$

$$-\left\{ 16 q \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) A(r) + hn^2 L(r) \right\}, \tag{6}$$

где $n^*(r, a_\nu)$ — количество a_ν-точек (без учета кратности), лежащих на

$$\bigcup_{k=1}^{\Phi(r)} \overline{E_k(r)}.$$

(В тексте в [2] вместо $\Phi(r)$ стоит $\tilde{\Phi}(r)$; учитываем однако, что $\Phi(r) = \tilde{\Phi}(r)$. Неравенства (4) и (6) записаны в [2] соответственно под номерами (4*) и (3*). Неравенство (5) устанавливается в [2] в конце доказательства теоремы 1').

Нам понадобится еще следующая

Лемма (И. Майлз [4], Б. О. Гыжа [5]). Пусть $w(z)$-мероморфная в $|z| < R \leqslant \infty$ функция. Тогда при $R = \infty$ оценка (r_0 фиксировано)

$$\int_{r_0}^{r} \frac{L(t)}{t} dt = O\{\sqrt{T(r) \ln T(r)}\} \tag{7}$$

выполняется при $r \to \infty$, $r \overline{\in} E_1$, где E_1 — некоторое множество значений r конечной логарифмической меры.

Если при $R < \infty$ выполняется $\varlimsup\limits_{r \to R} (R - r) A(r) = +\infty$, то оценка

$$\int_{r_0}^{r} \frac{L(t)}{t} dt = O\left\{ \left[T(r) \ln \frac{R T(r)}{R - r} \right]^{1/2} \right\} \tag{8}$$

выполняется при $r \to R$, $r \overline{\in} E_1$, где E_1 — некоторое множество значений r, для которого справедливо неравенство

$$\int_E d\left(\frac{1}{R-r}\right) < \infty.$$

Перейдем к доказательству теорем 1 и 1'. Положим, что существуют мероморфные функции $w(z)$, доставляющие решение задач I и II и выведем условия, которым должны удовлетворять узлы интерполяции $a_1, a_2, \cdots, a_q$-точки функции $w(z)$ являются при этом узлами интерполяции.

Для заданного ε $(0 < \varepsilon < 1)$ выберем числа $n = p$ такими, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{8q}{n+2} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},\ 16 q^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Применим теорему А с этими n и p.

Очевидно, совокупность узлов интерполяции, принадлежащих $\overline{E_k(r)}$, образует пачку (как в смысле задачи 1, так и в смысле задачи II). Обозначим $\Pi_j^{'}(r)$, $j=1, 2, \cdots, \overline{\Phi}(r)$ (соответственно $\Pi_j^{*}(r)$, $j=1, 2, \cdots, \overline{\Phi}^*(r)$) — те пачки, которые образуются от областей $E_k(r)$, удовлетворяющих условию

$$d(E_k(r)) \leqslant \frac{K(a_1, a_2, \cdots, a_q)(n+2np)^2(q-2)}{\left(\sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu)\right)^{1/2}} r. \tag{10}$$

Так как фигурирующая в (10) сумма равна $n(r)$ $(n^*(r))$, если рассматривается задача I (задача II), то очевидно с этими определениями пачек $\Pi_j^{'}(r)$ $(\Pi_j^{*}(r))$ выполняются соответственно неравенства (3) и (3′) теорем 1 и 1′.

По второй основной теореме Л. Альфорса ([3], гл. XIII) выполняется неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) \geqslant (q-2) A(r) - h_1 L(r),$$

где $0 \leqslant h_1 = \text{const} < \infty$.

Учитывая еще неравенство (5), имеем

$$\sum_{k=1}^{\Phi(r)} d(E_k(r)) \leqslant \frac{K(a_1, a_2, \cdots, a_q)}{q-2} (n+2np) r \times$$

$$\times \left\{ \left(\sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) \right)^{1/2} + (h_1 L(r))^{1/2} \right\},$$

откуда и из неравенства (10) для количества $\overline{\Phi}(r)$ и $\overline{\Phi}^*(r)$ этих пачек получаем оценки

$$|\Phi(r) - \overline{\Phi}(r)| \leqslant \frac{1}{n+2np} \frac{1}{q-2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) + \left(h_1 L(r) \sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) \right)^{1/2} \right\}, \tag{11}$$

$$|\Phi(r) - \overline{\Phi}^*(r)| \leqslant \frac{1}{n+2np} \frac{1}{q-2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) + \left(h_1 L(r) \sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) \right)^{1/2} \right\}. \tag{11'}$$

Отсюда в силу неравенства (4) выполняется

$$|\overline{\Phi}(r) - A(r)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} A(r) + \frac{h'}{\varepsilon^2} L(r) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{q-2} \sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{3} \left(h' L(r) \sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) \right)^{1/2}, \quad h' = \text{const} < \infty. \tag{12}$$

Это же неравенство справедливо, если в нем заменить $\overline{\Phi}(r)$ на $\overline{\Phi}^*(r)$.

По второй основной теореме Р. Неванлинны с учетом известного соотношения

$$\left|T(r)-\int_0^r \frac{A(t)}{t}\,dt\right| = O(1),\ r\to\infty,$$

выполняется

$$\sum_{\nu=1}^{q}\int_0^r \frac{n(t,a_\nu)}{t}\,dt > (q-2)\int_0^r \frac{A(t)}{t}\,dt - o\,[T(r)],$$

при $r\to\infty$, $r\notin E_2$, где E_2 — некоторое множество конечной меры.

Так как сумма слева в последнем неравенстве равна $n(r)$ $(n^*(r))$, если рассматривается задача I (задача II), с учетом неравенства (12) и леммы получим неравенство

$$\int_0^r \frac{\overline{\Phi}(t)}{t}\,dt \leqslant \frac{1+\frac{2}{3}\varepsilon}{q-2}\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt + O\left[\int_{r_0}^r \frac{L(t)}{t}\,dt\right] +$$

$$+\,o[T(r)] + O\left\{\left[\int_0^r \frac{L(t)}{t}\,dt\right]^{1/2}\left[\sum_{\nu=1}^{q}\int_0^r \frac{n(t,a_\nu)}{t}\,dt\right]^{1/2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+\varepsilon}{q-2}\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt,$$

справедливое при $r\in(0,\infty)\setminus[E_1\cup E_2]$, $r>r_0$.

Это же неравенство, при рассмотрении задачи II, справедливо, если в нем заменить $\overline{\Phi}(r)$ на $\overline{\Phi}^*(r)$, а $n(r)$ на $n^*(r)$.

Таким же образом, применяя вместо второй основной теоремы Р. Неванлинны следующее неравенство:

$$\frac{1}{q}\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt = \left(\frac{1}{q}\int_0^r \frac{n^*(t)}{t}\,dt\right) = \frac{1}{q}\sum_{\nu=1}^{q}\int_0^r \frac{n(t,a_\nu)}{t}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^r \frac{A(t)}{t}\,dt + O(1),\ r\to\infty, \tag{13}$$

вытекающее из соотношения инвариантности Симидзу—Альфорса, получим левые части неравенств 1 и 1′.

Остается вывести соотношения 2 и 2′. В силу определений и неравенств (6) и (9) имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q} n(r,a_\nu) \geqslant \overline{n}(r) > \sum_{\nu=1}^{q} n^*(r,a_\nu) - q\,[\Phi(r)-\overline{\Phi}(r)] >$$

$$> \left(q-2-\frac{\varepsilon}{3}\right)A(r) - \frac{h'}{\varepsilon^2}L(r) -$$

$$-\frac{\varepsilon}{3}\,\frac{1}{q-2}\left\{\sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu)+\left(h_1 L(r) \sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu)\right)^{1/2}\right\}, \tag{14}$$

откуда с учетом неравенства (13) и леммы получим правую часть соотношения 2. Левая часть неравенства 2 сразу вытекает из (14) и второй основной теоремы Р. Неванлинны. Аналогично выводится неравенство (2′), чем и завершается доказательство теорем 1 и 1′.

Аналогичные необходимые условия можно легко получить для функций, мероморфных в $|z|<R<\infty$, при условии, что узлов интерполяции „достаточно" много. Последнее обстоятельство обеспечивает выполнение условия на $A(r)$, при котором справедлива оценка (8). Все остальное проделывается аналогичным образом.

Автор выражает благодарность профессору Бухарестского университета К. Андреан-Казаку, обратившему его внимание на литературу [1].

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 31.V.1982

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ. Ընդհանուր ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծման գոյության անհրաժեշտ պայմանի մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ստացված է Ռ. Նևանլիննայի [1] հոդվածում բերված ընդհանուր ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծման գոյության մի անհրաժեշտ պայման։ Խնդիրն է՝ գտնել այնպիսի պայմաններ $z_i \in C$ *բազմության վրա, որ գոյություն ունենա C-ում մերոմորֆ ֆունկցիա* $w(z)$ *բավարարող հետևյալ պայմաններին՝*

$$\{z_i\}_{i=1}^{\infty}=\{w^{-1}(a_1),\ w^{-1}(a_2), \cdots,\ w^{-1}(a_q)\},$$

որտեղ $a_1, a_2, \cdots, a_q$*-ն տված կոմպլեքս թվեր են։ Ստացված պայմանը կարելի է որակապես նկարագրել հետևյալ կերպ՝* z_i *կետերը պետք է դասավորված լինեն այնպիսի «խմբերով», որ ամեն մի խմբում լինի միջինում ոչ ավել քան* q *և ոչ պակաս քան,* $q-2$ z_i *կետեր, և ամեն մի խմբին պատկանող* z_i *կետերը լինեն մոտիկ մեկը մյուսին։*

G. A. BARSEGIAN. *On necessary condition of existence of the solution of the whole interpolating problem* (summary)

The paper gives a necessary condition of existence of a solution of the following general interpolation problem of Nevanlinna, under which conditions on the given set $\{z_i\}_1^{\infty} \in C$ there exists a meromorphic in C function, for which

$$\{z_i\}_{i=1}^{\infty}=\{w^{-1}(a_1),\ w^{-1}(a_2), \cdots,\ w^{-1}(a_q)\},$$

where the complex numbers $a_1, a_2, \cdots, a_q$ are given beforehand.

Roughly, our solution is as follows. The set $\{z_i\}_1^{\infty}$ should admit partition in "groups" with numbers of points between q and $q-2$ in each, the points within a "group" should be close to each other.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Nevanlinna*. Über die Konstruktion von meromorphen Funktion mit gegebenen Wertzuordnungen, Wiss, Abh. der Arbeitgemeinschaft für Forschung des Landes Nordhein—Westfalen, b. 33, 1965, 579—582.
2. *Г. А. Барсегян*. Свойство близости α-точек мероморфных функций, Матем. сборник, 120 (162), № 1, 1983, 42—67.
3. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, 1941.
4. *J. Miles*. A note on Ahlfors' theory of covering surfaces, Proc. Amer. Math., Soc. 21, № 1, 1969, 30—32.
5. *Б. О. Гыжа*. Замечание к теории Альфорса накрывающих поверхностей, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, № 20, 1974, 70—72.