ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 6, 1983 Математика

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН

ФУНКЦИИ ТИПА БЛЯШКЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

§ 0. Введение

1. Общеизвестна роль произведения Бляшке в неванлинновской теории факторизации класса N мероморфных в единичном круге $D=\{z;\ |z|<1\}$ функций ограниченного вида [1, 2].

Академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном была построена завершенная теория факторизации значительно более общих классов N_α $(-1<\alpha<+\infty)$ мероморфных в круге D функций [3, 4] В построении этой теории основополагающую роль сыграли открытые им функции

$$A_\alpha(z;s)=\exp\left\{\int\limits_{|s|}^{1}\left(\left[1-\frac{\bar{s}z}{x}\right]^{-1-\alpha}+\left[1-\frac{xz}{s}\right]^{-1-\alpha}-1\right)\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx\right\}, \tag{1}$$

$$s\in D,\ -1<\alpha<+\infty$$

(см. [4], стр. 622—624) и ассоциированные с ними произведения типа Бляшке

$$\prod_k A_\alpha(z;z_k);\ \{z_k\}\subset D,\ -1<\alpha<+\infty. \tag{2}$$

Нули $\{z_k\}\subset D$ этих произведений подчинены условиям

$$\sum_k (1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty;\ -1<\alpha<+\infty, \tag{3}$$

обеспечивающим сходимость указанных произведений в круге D.

Отметим, что как сами факторы Бляшке

$$A_0(z;s)=\frac{s-z}{1-\bar{s}z}\,\frac{|s|}{s}, \tag{4}$$

так и факторы $A_\alpha(z;s)(-1<\alpha<+\infty)$ появляются в исследованиях [3] и [4] естественным образом—в открытом там же семействе формул типа классической формулы Иенсена-Неванлинны.

В отличие от общеизвестных свойств функции Бляшке для круга

$$\prod_k A_0(z;z_k);\ \{z_k\}\subset D,\ \sum_k(1-|z_k|)<+\infty, \tag{5}$$

свойства функции типа Бляшке (2) М. М. Джрбашяна описываются посредством интегродифференциального оператора $D^{-\alpha}$ Римана-Лиувилля соответствующего порядка α $(-1<\alpha<+\infty)$.

2. Факторизация Р. Неванлинны функций ограниченного вида в полуплоскости (см., напр., [5], гл. 1, [6]), а также найденное Б. Я. Ле-

виным представление в полуплоскости функций конечной степени и класса A ([7]), гл. V, § 3, теорема 5) осуществляются посредством функции Бляшке для верхней полуплоскости $G^{(+)}=\{z;\ \operatorname{Im} z>0\}$ следующего вида:

$$\widetilde{B}(z)=\prod_k (1-z/z_k)/(1-z/\bar{z}_k);\ \{z_k\}\subset G^{(+)},\ \sum_k \left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_k}\right|<+\infty. \tag{6}$$

В свете изложенных выше факторов, естественно возникает задача построения теории факторизации новых широких классов мероморфных в полуплоскости функций. При этом, на первый взгляд, кажется естественным выведение результатов для полуплоскости из известных результатов М. М. Джрбашяна для круга, посредством отображения полуплоскости на круг. Однако при таком тривиальном подходе получаются произведения (которые, кстати, не совпадают с (6) при $\alpha=0$) и интегродифференциальные операторы довольно запутанного вида, а параметрические представления соответствующих классов функций оказываются сложными и неудобными для анализа.

Основополагающее значение произведений типа Бляшке (2) в теории факторизации классов N_α $(-1<\alpha<+\infty)$ мероморфных в круге D функций и приведенные соображения привели автора прежде всего к необходимости *независимого* построения такого же рода произведений для полуплоскости, являющихся естественными обобщениями произведения вида (6).

3. Настоящая статья является развернутым изложением в существенно усиленном и дополненном виде работы автора [8]. В статье приводятся построение и исследование основных свойств семейства функций типа Бляшке для полуплоскости, зависящих от непрерывного параметра α $(-1<\alpha<+\infty)$ и совпадающих при $\alpha=0$ с произведением Бляшке вида (6).

Вышеуказанное построение, а также доказательства результатов статьи в целях удобства изложения приведены в терминах нижней полуплоскости $G^{(-)}=\{w;\ \operatorname{Im} w<0\}$, где произведение Бляше (6) после отображения $z=w^{-1}$ $(z_k=w_k^{-1};\ k=1,2,\cdots)$ записывается в виде

$$B(w)=\prod_k \frac{w-w_k}{w-\bar{w}_k};\ \{w_k\}\subset G^{(-)},\ \sum_k |\operatorname{Im} w_k|<+\infty. \tag{7}$$

4. Для построения функций, являющихся естественными обобщениями фактора Бляшке для полуплоскости и обладающих свойствами, аналогичными в естественном смысле свойствам факторов типа Бляшке $A_\alpha(z;s)$ $(-1<\alpha<+\infty)$, мы применяем метод, возникший из одного правдоподобного рассуждения.

Чтобы по возможности кратко изложить суть этого рассуждения, сначала же отметим, что фактор Бляшке для нижней полуплоскости

$$b(w;\zeta)=\frac{w-\zeta}{w-\bar{\zeta}};\ w,\ \zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)} \tag{8}$$

представим в полуплоскости $G^{(-)}$ в виде

$$b(w;\zeta)=\exp\left\{-\int_0^{|\eta|}\left([\tau+i(w-\zeta)]^{-1}+[i(w-\bar{\zeta})-\tau]^{-1}\right)d\tau\right\}. \qquad (9)$$

Теперь, условившись считать, что $\zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)}$ — фиксированная точка, для любого α $(-1<\alpha<+\infty)$ введем в рассмотрение функцию

$$b_\alpha(w;\zeta)=\exp\left\{-\int_0^{|\eta|}\left([\tau+i(w-\zeta)]^{-1-\alpha}+[i(w-\bar{\zeta})-\tau]^{-1-\alpha}\right)\tau^\alpha d\tau\right\}. \qquad (10)$$

Важной предпосылкой в пользу нашего предположения относительно такого вида искомых факторов типа Бляшке является глубокая аналогия между представлением (1) функции $A_\alpha(z;s)$ и формулой(10). Эта аналогия, помимо надлежащего сходства интегралов (1) и (10), заключается в инвариантности их подынтегральных функций по переменным z, s и w, ζ соответственно—при вращении круга D относительно начала координат и при параллельном к вещественной оси перемещении полуплоскости $G^{(-)}$.

Эквивалентный (10) вид факторов типа Бляшке в случае целых $\alpha=p\geqslant1$ был найден в работе Л. Х. Меграбяна [9]. Однако, построение факторов типа Бляшке в работе [9] основано на совершенно ином подходе, который, на наш взгляд, может быть приложен лишь в случае целых $\lambda=p\geqslant1$, для которых он приводит к довольно громоздкому виду записи искомых функций.

Отметим, что в работе [10], выполненной автором совместно с Г. В. Микаеляном, введено другое семейство произведений типа Бляшке для полуплоскости значительно более простой природы, также зависящее от непрерывного параметра α $(-1<\alpha<+\infty)$. При $\alpha=0$ факторы этих произведений, как и функции (10), переходят в фактор вида (8), однако эти произведения обладают лишь частью основных свойств произведений, рассматриваемых в настоящей статье.

5. Результаты статьи показывают, что формула (10) для искомых факторов типа Бляшке не только правдоподобна, но и вполне оправдана.

Основной результат § 1—это теорема 1.1. В ней устанавливается, что функция $b_\alpha(w;\zeta)$ $(-1<\alpha<+\infty,\ \zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)})$, несмотря на наличие в ее представлении (10) интеграла, являющегося особым на всем отрезке, соединяющем точки ζ и ξ, однозначна и аналитична в полуплоскости $G^{(-)}$. В этой теореме устанавливается также, что при любом α $(-1<\alpha<+\infty)$ функция $b_\alpha(w;\zeta)$ имеет нуль, притом первого порядка, только в точке $w=\zeta$.

Остальное содержание параграфа посвящено другим, сравнительно более простым свойствам функции $b_\alpha(w;\zeta)(-1<\alpha<+\infty)$ и, в том числе, ее представлениям при целочисленных значениях параметра α.

В § 2, после определения оператора интегродифференцирования Г. Вейля $W^{-\alpha}$ $(-\infty<\alpha<+\infty)$, в серии лемм и теорем устанавливается ряд свойств функции $\log|b_\alpha(w;\zeta)|$ $(-1<\alpha<+\infty)$, выраженных посредством указанного оператора. Эти свойства являются своеобразными аналогами свойств функций $\log|A_\alpha(z;s)|$ $(-1<\alpha<+\infty)$, выраженных посредством интегродифференциального оператора Римана—Лиувилля [3, 4].

В заключительном § 3 устанавливаются основные результаты статьи, относящиеся к вопросам сходимости и свойствам произведений

$$B_\alpha(w)=\prod_k b_\alpha(w;w_k);\ \{w_k\}\subset G^{(-)},\ -1<\alpha<+\infty. \tag{11}$$

В частности, устанавливается, что условие сходимости этого произведения имеет вид

$$\sum_k |\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha}<+\infty. \tag{12}$$

Функции типа Бляшке настоящей статьи нашли существенные приложения в работах автора [11] и [12].

§ 1. Простейшие свойства элементарных факторов типа Бляшке

1.1. Прежде, чем приступить к исследованию простейших свойств функции $b_\alpha(w;\zeta)(-1<\alpha<+\infty)$, определенной равенством (10), найдем для нее более удобное для наших целей представление.

Условившись всюду ниже считать, что $\zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)}$ — фиксированная точка, для любого α $(-1<\alpha<+\infty)$ введем в рассмотрение функцию

$$\Omega_\alpha(w;\zeta)=\int_0^{|\eta|}\frac{\tau^\alpha\,d\tau}{[\tau+i(w-\zeta)]^{1+\alpha}}+\int_0^{|\eta|}\frac{\tau^\alpha\,d\tau}{[i(w-\bar{\zeta})-\tau]^{1+\alpha}}. \tag{1.1}$$

Ввиду формулы (10), очевидно, что

$$b_\alpha(w;\zeta)=\exp\{-\Omega_\alpha(w;\zeta)\};\ -1<\alpha<+\infty. \tag{1.2}$$

Как нетрудно убедиться, заменами переменной $t=-(\tau+\eta)$ в первом и $t=\tau+\eta$—во втором интеграле представления (1.2) функции $\Omega_\alpha(w;\zeta)$, получим

$$\Omega_\alpha(w;\zeta)=\int_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha\,dt}{[i(w-\xi)-t]^{1+\alpha}};\ -1<\alpha<+\infty. \tag{1.2'}$$

Таким образом

$$\Omega_\alpha(w;\zeta)=U_\alpha(w;\zeta)+V_\alpha(w;\zeta);\ -1<\alpha<+\infty, \tag{1.3}$$

где

$$U_\alpha(w;\zeta)=\int_{-|\eta|}^{0}\frac{(|\eta|+t)^\alpha\,dt}{[i(w-\xi)-t]^{1+\alpha}};\quad -1<\alpha<+\infty. \tag{1.3'}$$

$$V_\alpha(w;\zeta)=\int_0^{|\eta|}\frac{(|\eta|-t)^\alpha\,dt}{[i(w-\xi)-t]^{1+\alpha}},\ -1<\alpha<+\infty. \qquad (1.3')$$

Принципиальное значение для всего дальнейшего изложения имеет следующая

Теорема 1.1. *При любом* $\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ *функция* $b_\alpha(w;\zeta)$ *аналитична в области* $\mathbf{C}\setminus\{\xi+ih;\ 0\leqslant h<+\infty\}$ *и обращается в нуль только в точке* $\zeta\in G^{(-)}$, *где имеет нуль первого порядка.*

Доказательство. Пусть $\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ — любое. Очевидно, что ввиду представлений (1.2) и (1.3) имеем

$$b_\alpha(w;\zeta)=\frac{w-\zeta}{w-\bar\zeta}\exp\{U_0(w;\zeta)-U_\alpha(w;\zeta)+V_0(w;\zeta)-V_\alpha(w;\zeta)\}.$$

Как нетрудно заметить, в силу первой из формул (1.3') функции $U_\alpha(w;\zeta)$ и $U_0(w;\zeta)$ аналитичны в области $\mathbf{C}\setminus\{\xi+ih;\ 0\leqslant h<+\infty\}$. Тем самым, для доказательства теоремы достаточно показать, что в области $\mathbf{C}\setminus\{\xi+ih;\ 0\leqslant h<+\infty\}$ аналитична функция

$$F_\alpha(w;\zeta)\equiv V_0(w;\zeta)-V_\alpha(w;\zeta)=$$

$$=-\int_0^{|\eta|}\left\{\frac{(|\eta|-t)^\alpha}{[i(w-\xi)-t]^{1+\alpha}}-\frac{1}{i(w-\xi)-t}\right\}dt.$$

Для этого представим $F_\alpha(w;\zeta)$ в следующем виде:

$$F_\alpha(w;\zeta)=\int_{-\infty}^{0}\left\{\frac{(|\eta|-t)^\alpha}{[i(w-\xi)-t]^{1+\alpha}}-\frac{1}{i(w-\xi)-t}\right\}dt-$$

$$-\int_{-\infty}^{|\eta|}\left\{\frac{(|\eta|-t)^\alpha}{[i(w-\xi)-t]^{1+\alpha}}-\frac{1}{i(w-\xi)-t}\right\}dt\equiv$$

$$\equiv I_\alpha^{(1)}(w;\zeta)-I_\alpha^{(2)}(w;\zeta).$$

Докажем теперь по отдельности аналитичность функций $I_\alpha^{(1)}(w;\zeta)$ и $I_\alpha^{(2)}(w;\zeta)$ в указанной области. С этой целью заметим, что при $-\infty<t<0$ функция

$$\varphi_\alpha(w;\zeta;t)\equiv\frac{(|\eta|-t)^\alpha}{[i(w-\xi)-t]^{1+\alpha}}-\frac{1}{i(w-\xi)-t}$$

аналитична в области $\mathbf{C}\setminus\{\xi+ih;\ 0\leqslant h<+\infty\}$, одновременно, при $-\infty<t<|\eta|$ эта функция аналитична в меньшей области $\mathbf{C}\setminus\{\xi+ih;\ -|\eta|\leqslant h<+\infty\}$. Далее, легко видеть, что для любого компакта $K\subset\mathbf{C}$ при $t\to-\infty$, равномерно по $w\in K$ имеем

$$\varphi_\alpha(w;\zeta;t)=O(t^{-2}).$$

Поэтому, ввиду равномерной сходимости интеграл $I_\alpha^{(1)}(w;\zeta)$ представляет аналитическую функцию в области $\mathbf{C}\setminus\{\xi+ih;\ 0\leqslant h<+\infty\}$, а интеграл $I_\alpha^{(2)}(w;\zeta)$ представляет аналитическую функцию в области $\mathbf{C}\setminus\{\xi+ih;\ -|\eta|<h<+\infty\}$.

Убедимся, однако, в том, что функция $I_\alpha^{(2)}(w;\zeta)$ — константа. С этой целью рассмотрим ее значения на луче $w=\zeta-ih$ $(0<h<+\infty)$. Поскольку заменой переменной $t=-\sigma h+|\eta|$ получаем

$$I_\alpha^{(2)}(\zeta-ih,\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{|\eta|}\left\{\frac{(|\eta|-t)^\alpha}{(|\eta|+h-t)^{1+\alpha}}-\frac{1}{|\eta|+h-t}\right\}dt=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left\{\frac{\sigma^\alpha}{(1+\sigma)^{1+\alpha}}-\frac{1}{1+\sigma}\right\}d\sigma\equiv\text{const}\neq\infty,$$

то в силу единственности аналитической функции

$$I_\alpha^{(2)}(w;\zeta)\equiv\text{const}\neq\infty.$$

1.2. Выведем рекуррентные формулы для интегралов $U_\alpha(w;\zeta)$ и $V_\alpha(w;\zeta)$, которые приведут нас к представлениям функции $b_\alpha(w;\zeta)$. При этом будем полагать, что $0<\alpha<+\infty$, а $p\geqslant1$ — целое число, определенное неравенствами $p-1<\alpha\leqslant p$.

Заметим, что ввиду первой из формул (1.3′) интегрированием по частям получим

$$U_\alpha(w;\zeta)=\frac{1}{\alpha}\int\limits_{t=-|\eta|}^{0}(|\eta|+t)^\alpha\,d\,[i(w-\zeta)-t]^{-\alpha}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{i\eta}{w-\xi}\right)^\alpha-U_{\alpha-1}(w;\zeta).$$

Отсюда приходим к рекуррентной формуле

$$U_\alpha(w;\zeta)=\sum_{j=1}^{p}\frac{(-1)^{p-j}}{\alpha-p+j}\left(\frac{i\eta}{w-\xi}\right)^{\alpha-p+j}+(-1)^pU_{\alpha-p}(w;\zeta).\tag{1.4}$$

Далее, заметим, что ввиду второй из формул (1.3′) интегрированием по частям будем иметь

$$V_\alpha(w;\zeta)=\frac{1}{\alpha}\int\limits_{t=0}^{|\eta|}(|\eta|-t)^\alpha\,d\,[i(w-\xi)-t]^{-\alpha}=$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{i\eta}{w-\xi}\right)^\alpha+V_{\alpha-1}(w;\zeta).$$

Отсюда получаем другую рекуррентную формулу

$$V_\alpha(w;\zeta)=-\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\alpha-p+j}\left(\frac{i\eta}{w-\xi}\right)^{\alpha-p+j}+V_{\alpha-p}(w;\zeta).\tag{1.4′}$$

Из установленных рекуррентных формул и представления (1.2) — (1.3) функции $b_\alpha(w,\zeta)$ вытекает представление

$$b_\alpha(w;\zeta)=\exp\{-[(-1)^pU_{\alpha-p}(w;\zeta)+V_{\alpha-p}(w;\zeta)]\}\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{j=1}^{p}\frac{1-(-1)^{p-j}}{\alpha-p+j}\left(\frac{i\eta}{w-\xi}\right)^{\alpha-p+j}\right\},\tag{1.5}$$

справедливое при любом $\alpha>0$ и целом $p\geqslant 1$, опрсделенном неравенствами $p-1<\alpha\leqslant p$.

Из представления (1.5), как нетрудно проверить, следует, что если $p=2n$ ($n=1, 2,\cdots$)—четное число, то

$$b_\alpha(w;\zeta)=b_{\alpha-2n}(w;\zeta)\times$$
$$\times\exp\left\{2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\alpha-1-2(n-j)}\left(\frac{i\eta}{w-\xi}\right)^{\alpha-1-2(n-j)}\right\}. \tag{1.6}$$

Для нечетных $p\geqslant 1$ из (1.5), как нетрудно проверить, вытекают следующие представления:

$$b_\alpha(w;\zeta)=\exp\{U_{\alpha-1}(w;\zeta)-V_{\alpha-1}(w;\zeta)\} \tag{1.7}$$

при $p=1$, и

$$b_\alpha(w;\zeta)=\exp\{U_{\alpha-(2n-1)}(w;\zeta)-V_{\alpha-(2n-1)}(w;\zeta)\}\times$$
$$\times\exp\left\{2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\alpha+1-2(n-j)}\left(\frac{i\eta}{w-\xi}\right)^{\alpha+1-2(n-j)}\right\}, \tag{1.8}$$

при $p=2n-1$ ($n=2, 3,\cdots$).

Для целых $\alpha=p\geqslant 1$ представления (1.6)—(1.8) приобретают наиболее простые формы. А именно

$$b_{2n}(w;\zeta)=\frac{w-\zeta}{w-\bar\zeta}\exp\left\{2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1}\left(\frac{i\eta}{w-\xi}\right)^{2j-1}\right\}\ (n\geqslant 1), \tag{1.6'}$$

$$b_1(w;\zeta)=\frac{(w-\zeta)(w-\bar\zeta)}{(w-\xi)^2}, \tag{1.7'}$$

$$b_{2n-1}(w;\zeta)=\frac{(w-\zeta)(w-\bar\zeta)}{(w-\xi)^2}\exp\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\left(\frac{i\eta}{w-\xi}\right)^{2j}\right\}\ (n\geqslant 2). \tag{1.8'}$$

Отметим, что в приведенных сразу после леммы 1 статьи автора [8] (стр. 1296) формулах, соответствующих приведенным здесь формулам (1.6′) и (1.8′), перед символами сумм стоит лишний знак „—“.

1.3. В этом пункте мы оценим функцию $\Omega_\alpha(w;\zeta)$ $(-1<\alpha<+\infty)$, а затем установим для нее одну асимптотическую формулу, играющую существенную роль в дальнейшем изложении.

Лемма 1.1. *Пусть α $(-1<\alpha<+\infty)$— любое и $w=u+iv$— любая точка из плоскости с разрезом $\mathbf{C}\setminus\{\zeta+ih;\ 0\leqslant h<+\infty\}$ такая, что $|w-\xi|>|\eta|$. Тогда справедливы оценки*

$$|\Omega_\alpha(w;\zeta)|\leqslant\frac{2}{(|w-\xi|-|\eta|)^{1+\alpha}}\frac{|\eta|^{1+\alpha}}{1+\alpha}, \tag{1.9}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial v}\Omega_\alpha(w;\zeta)\right|\leqslant\frac{2}{(|w-\xi|-|\eta|)^{2+\alpha}}|\eta|^{1+\alpha}. \tag{1.9'}$$

Доказательство. Пусть $w\in\mathbf{C}\setminus\{\zeta+ih;\ 0\leqslant h<+\infty\}$ и $|w-\xi|>|\eta|$. Тогда при любом $t\in[-|\eta|;\ |\eta|]$ очевидно неравенство

$$|i(w-\xi)-t|^{1+\alpha}\geqslant(|w-\xi|-|\eta|)^{1+\alpha}.$$

Отсюда и из представления (1.2′) функции $\Omega_\alpha(w;\zeta)$ мы приходим к оценке (1.9) леммы.

Неравенство (1.9′) устанавливается вполне аналогичным образом, после дифференцирования по переменной $v=\operatorname{Im} w$ обеих частей формулы (1.2′).

В следующей лемме мы установим асимптотическую формулу для функции $\Omega_\alpha(w;\zeta)(-1<\alpha<+\infty)$. При этом мы не будем полагать, что точка $\zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)}$ фиксирована и устремим $\eta\to-0$.

Лемма 1.2. *Пусть $\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$ — любое. Тогда при $\eta\to-0$ для произвольного компакта $K\subset G^{(-)}$ равномерно по $w\in K$ и $\xi\in(-\infty;+\infty)$ справедлива асимптотическая формула*

$$\Omega_\alpha(w;\xi+i\eta)=\frac{2\,e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}}{(w-\xi)^{1+\alpha}}\frac{|\eta|^{1+\alpha}}{1+\alpha}+O\left(|\eta|^{2+\alpha}\right). \tag{1.10}$$

Доказательство. Из формул (1.3′) интегрированием по частям легко приходим к представлениям

$$U_\alpha(w;\zeta)=-\frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{i\eta}{w-\xi}\right)^{1+\alpha}-U_{1+\alpha}(w;\zeta),$$

$$V_\alpha(w;\zeta)=\frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{i\eta}{w-\xi}\right)^{1+\alpha}+V_{1+\alpha}(w;\zeta),$$

а отсюда, ввиду формулы (1.3) — к представлению для функции

$$\Omega_\alpha(w;\zeta)=\frac{2\,e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}}{(w-\xi)^{1+\alpha}}\frac{|\eta|^{1+\alpha}}{1+\alpha}+R_\alpha(w;\zeta),$$

где

$$R_\alpha(w;\zeta)=-U_{1+\alpha}(w;\zeta)+V_{1+\alpha}(w;\zeta).$$

Докажем теперь, что при $\eta\to-0$ равномерно по $w\in K$ и $\xi\in(-\infty;+\infty)$ справедлива оценка

$$|R_\alpha(w;\zeta)|\leqslant C\,|\eta|^{2+\alpha},$$

где $C\equiv C_\alpha(K)>0$ — постоянная, зависящая лишь от α и компакта K.

Для этого обозначим через $\rho=\min\limits_{w\in K}|\operatorname{Im} w|$ и заметим, что если $|\eta|<\frac{\rho}{2}$, то для любого $w\in K$ и $\xi\in(-\infty;+\infty)$ имеем $|w-\xi|-|\eta|\geqslant\frac{\rho}{2}$. Тем самым, аналогично доказательству предыдущей леммы мы приходим к требуемой оценке

$$|R_\alpha(w;\zeta)|\leqslant\frac{|\eta|^{2+\alpha}}{(1+\alpha)\,2^\alpha\rho^{1+\alpha}};\quad w\in K,\ |\eta|<\frac{\rho}{2}.$$

Замечание. Пусть $R_0\,(4|\zeta|\leqslant R_0<+\infty)$ фиксировано. Тогда, ввиду того, что $2|\zeta|>|\xi|+|\eta|$, для любого $w\in\mathbb{C}\,(|w|>R_0)$ справедливы неравенства

$$|w-\xi|-|\eta|>|w|-(|\xi|+|\eta|)\geqslant|w|-2\,|\zeta|>$$

$$\geqslant \frac{|w|}{2} + \frac{R_0 - 4|\zeta|}{2} \geqslant \frac{|w|}{2}.$$

Тем самым, ввиду формулы (1.2) и оценок (1.9), (1.9′) для любых $w \in \mathbf{C} \setminus \{\zeta + ih;\ 0 < h < +\infty\}$ $(|w| \geqslant R_0)$ и α $(-1 < \alpha < +\infty)$ получим

$$|\log|b_\alpha(w;\zeta)|| \leqslant |\Omega_\alpha(w;\zeta)| \leqslant \frac{2^{2+\alpha}}{1+\alpha}|\eta|^{1+\alpha}|w|^{-(1+\alpha)}, \tag{1.11}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial v}\log|b_\alpha(w;\zeta)|\right| \leqslant \left|\frac{\partial}{\partial v}\Omega_\alpha(w;\zeta)\right| \leqslant 2^{3+\alpha}|\eta|^{1+\alpha}|w|^{-(2+\alpha)}. \tag{1.11′}$$

1.3. В заключение параграфа, предполагая, что $s = \delta + i\lambda$ — любая фиксированная точка из верхней полуплоскости $G^{(+)} = \{z;\ \operatorname{Im} z > 0\}$, приведем эквивалентные переформулировки результатов параграфа. Эти переформулировки мы получим посредством отображения $w = z^{-1}$, переводящего полуплоскость $G^{(+)}$ в полуплоскость $G^{(-)}$.

Предварительно введем некоторые обозначения.

Пусть $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$ — любое, и $s = \zeta^{-1}$ $(s = \delta + i\lambda \in G^{(+)})$. Обозначим через $\Gamma^*[\xi;\ \infty]$ луч

$$\Gamma^*[\xi;\ \infty] = \{w = \xi + ih;\ 0 < h < +\infty\}. \tag{1.12}$$

Далее, пусть

$$L^*[\xi^{-1};\ 0] = \{\Gamma^*[\xi;\ \infty]\}^{-1} = \{z = w^{-1};\ w \in \Gamma^*[\xi;\ \infty]\}. \tag{1.13}$$

Как нетрудно заметить, дуга $L^*[\xi^{-1};\ 0]$ при этом целиком лежит в замкнутой полуплоскости $\overline{G}^{(-)} = \{w;\ \operatorname{Im} w \leqslant 0\}$ и при $\xi \neq 0$ является полуокружностью с центром на вещественной оси, соединяющей точки $\xi^{-1} = \frac{|s|^2}{\delta}$ и 0.

Определим теперь семейство аналитических функций, зависящих от непрерывного параметра α $(-1 < \alpha < +\infty)$

$$\tilde{b}_\alpha(z;\ s) \equiv b_\alpha(w;\zeta)|_{w=z^{-1},\,\zeta=s^{-1}}. \tag{1.14}$$

Очевидно, что свойства функций $\tilde{b}_\alpha(z;\ s)$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ являются простыми переформулировками свойств функций $b_\alpha(w;\zeta)$ $(-1 < \alpha < +\infty)$. При этом, поскольку $b_0(w;\zeta) = \frac{w-\zeta}{w-\bar{\zeta}}$, то, в частности,

$$\tilde{b}_\alpha(z;\ s) = \frac{z^{-1} - s^{-1}}{z^{-1} - \bar{s}^{-1}} = (1 - z/s)/(1 - z/\bar{s}). \tag{1.15}$$

Имеет место следующая эквивалентная переформулировка теоремы 1.1.

Теорема 1.1*. *При любом* α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *функция* $\tilde{b}_\alpha(z;\ s)$ *аналитична в области* $\mathbf{C} \setminus L^*\left[\frac{|s|^2}{\delta};\ 0\right]$ *и обращается в нуль только в точке* $s \in G^{(+)}$, *где имеет нуль первого порядка.*

Из формул (1.2), (1.2′) и (1.15) вытекает представление

$$\tilde{b}_\alpha(z;s)=\exp\left\{-\int\limits_{-\left|\operatorname{Im}\frac{1}{s}\right|}^{\left|\operatorname{Im}\frac{1}{s}\right|}\frac{\left(\left|\operatorname{Im}\frac{1}{s}\right|-|t|\right)^\alpha dt}{[i(z^{-1}-\operatorname{Re}s^{-1})-t]^{1+\alpha}}\right\};\ \alpha\in(-1;+\infty). \quad (1.16)$$

Укажем теперь представления для функции $\tilde{b}_\alpha(z;s)$, когда $\alpha=p\geqslant1$ — целое число. Из формул (1.6′)—(1.8′) и (1.15) непосредственно вытекают представления

$$\tilde{b}_{2n}(z;s)=(1-z/s)/(1-z/\bar{s})\exp\left\{2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1}\left(\frac{i\lambda z}{\delta z-|s|^2}\right)^{2j-1}\right\}(n\geqslant1), \quad (1.17)$$

$$\tilde{b}_1(z;s)=\frac{(1-z/s)(1-z/\bar{s})}{(\delta z-|s|^2)^2}|s|^4, \quad (1.18)$$

$$\tilde{b}_{2n-1}(z;s)=\frac{(1-z/s)(1-z/\bar{s})}{(\delta z-|s|^2)^2}|s|^4\exp\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\left(\frac{i\lambda z}{\delta z-|s|^2}\right)^{2j}\right\}(n\geqslant2). \quad (1.19)$$

§ 2. Свойства элементарного фактора типа Бляшке, выраженные посредством интегродифференциального оператора Вейля

В этом параграфе, полагая, что $\zeta=\xi+i\eta$ — фиксированная точка из полуплоскости $G^{(-)}=\{w;\operatorname{Im}w<0\}$, мы применим интегродифференциальный оператор $W^{-\alpha}$ Вейля к функции $\log b_\alpha(w;\zeta)=-\Omega_\alpha(w;\zeta)$ $(-1<\alpha<+\infty)$, аналитической в плоскости с разрезом $\mathbf{C}\setminus\{\zeta+ih;\ 0\leqslant h<+\infty\}$, а затем установим основные свойства функции

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|=-W^{-\alpha}\operatorname{Re}\Omega_\alpha(w;\zeta)(-1<\alpha<+\infty).$$

Определим сначала интегродифференциальный оператор $W^{-\alpha}$ $(-\infty<\alpha<+\infty)$.

Пусть $w=u+iv\in\mathbf{C}$ — любая точка, и функция $f(\omega)$ определена почти всюду и измерима на полупрямой $\Gamma(w;\infty)=\{\omega=w-i\sigma;\ 0<\sigma<+\infty\}$. Формально мы считаем, что

$$W^{-\alpha}f(w)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{+\infty}\sigma^{\alpha-1}f(w-i\sigma)\,d\sigma;\ 0<\alpha<+\infty, \quad (2.1)$$

$$W^0f(w)\equiv f(w), \quad (2.2)$$

$$W^\alpha f(w)=W^{-(p-\alpha)}\frac{\partial^p}{\partial v^p}f(u+iv); \quad (2.3)$$

$p\geqslant1$ — целое, $p-1<\alpha\leqslant p$.

2.1. Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения для отрезков прямой, соединяющих точки ζ и $\bar{\zeta}$, ζ и ξ

$$(\zeta;\bar{\zeta})=\{\xi+ih;\ -|\eta|<h<|\eta|\},$$

$$[\zeta; \bar\zeta] = \overline{(\zeta; \bar\zeta)} = \{\xi + ih;\ -|\eta| \leqslant h \leqslant |\eta|\}, \tag{2.4}$$
$$(\zeta; \xi) = \{\xi + ih;\ -|\eta| < h < 0\}.$$

Справедлива следующая

Лемма 2.1. *Функция* $W^{-\alpha} \log b_\alpha (w; \zeta)(-1 < \alpha < +\infty)$ *аналитична в области* $\mathbf{C} \setminus [\zeta; \bar\zeta]$, *где для нее справедливо представление*

$$W^{-\alpha} \log b_\alpha (w; \zeta) = - W^{-\alpha}\, \Omega_\alpha (w; \zeta) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - |t|)^\alpha\, dt}{t - i(w - \xi)};\ -1 < \alpha < +\infty. \tag{2.5}$$

Доказательство. Заметим, что в случае $\alpha = 0$ утверждения леммы очевидны ввиду тождественности оператора W^0 и формул (1.2) и (1.2′). Рассмотрим теперь в отдельности случаи $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$.

а) $0 < \alpha < +\infty$. В силу формул (1.2), (1.2′) и (2.1) при $w \in \mathbf{C} \setminus \{\zeta + ih;\ 0 \leqslant h < +\infty\}$ имеем

$$W^{-\alpha} \log b_\alpha (w; \zeta) \equiv - W^{-\alpha}\, \Omega_\alpha (w; \zeta) =$$
$$= - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1}\, d\sigma \int\limits_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - |t|)^\alpha\, dt}{[i(w - \xi) - t + \sigma]^{1+\alpha}}.$$

При этом, легко видеть, что подынтегральная функция последнего повторного интеграла такова, что он абсолютно сходится, и поэтому допустима перемена порядка интегрирования.

Ввиду очевидного равенства

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\alpha-1}\, d\sigma}{(z + \sigma)^{1+\alpha}} = \frac{1}{\alpha z} \left(\frac{\sigma}{z + \sigma}\right)^\alpha \Bigg|_{\sigma=0}^{+\infty} = \frac{1}{\alpha z}, \tag{2.6}$$

справедливого при любых α $(0 < \alpha < +\infty)$ и $z \neq 0$, указанной переменой порядка интегрирования мы придем к формуле (2.5) леммы при $w \in \mathbf{C} \setminus \{\zeta + ih;\ 0 \leqslant h < +\infty\}$. Однако, из этой формулы, как нетрудно заметить, следует, что функция $W^{-\alpha}\, \Omega_\alpha (w; \zeta)$ аналитически продолжается в область $\mathbf{C} \setminus [\zeta; \bar\zeta]$, и что представление (2.5) справедливо во всей этой области.

б) $-1 < \alpha < 0$. Ввиду формул (1.2), (1.2′) и (2.3) при $w \in C \setminus \{\zeta + ih;\ 0 \leqslant h < +\infty\}$ будем иметь

$$W^{-\alpha} \log b_\alpha (w; \zeta) \equiv - W^{-\alpha}\, \Omega_\alpha (w; \zeta) =$$
$$= - \frac{1 + \alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} \sigma^\alpha\, d\sigma \int\limits_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - |t|)^\alpha\, dt}{[i(w - \xi) - t + \sigma]^{2+\alpha}}.$$

Отсюда переменой порядка интегрирования, воспользовавшись формулой (2.6) (где вместо α берем $1 + \alpha$), мы придем к представлению (2.5) леммы, которое, как и в случае $0 < \alpha < +\infty$ оказывается справедливым всюду в области $\mathbf{C} \setminus [\zeta; \bar\zeta]$. Лемма доказана.

Из представления (2.5) вытекает, что при любом $w \in \mathrm{C}$, таком, что $|w-\xi|>|\eta|$, справедлива оценка

$$|W^{-\alpha} \log |b_\alpha(w; \zeta)|| \leqslant \frac{2}{|w-\xi|-|\eta|} \frac{|\eta|^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}; \ -1<\alpha<+\infty. \tag{2.7}$$

Доказательство этой оценки вполне аналогично доказательству неравенства (1.9).

Лемма 2.2. *При любом* α $(-1<\alpha<+\infty)$ *в области* $\mathrm{C}\setminus[\zeta; \bar{\zeta}]$ *справедливо представление*

$$W^{-\alpha} \log |b_\alpha(w; \zeta)| = -\operatorname{Re} W^{-\alpha} \Omega_\alpha(w; \zeta) =$$

$$= \frac{2 \operatorname{Im} w}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_0^{|\eta|} \frac{|w-\xi|^2-t^2}{|(w-\xi)^2+t^2|^2} (|\eta|-t)^\alpha \, dt. \tag{2.8}$$

При любом положительном α $(0<\alpha<+\infty)$ *всюду в конечной плоскости* w *справедливо представление*

$$W^{-\alpha} \log |b_\alpha(w; \zeta)| = -\operatorname{Re} W^{-\alpha} \Omega_\alpha(w; \zeta) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{|\eta|} \log \left| \frac{\xi-it-w}{\xi+it-w} \right| (|\eta|-t)^\alpha \, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \iint\limits_{G^{(-)}} \log \left| \frac{w-\bar{s}}{w-s} \right| |\zeta-s|^{\alpha-1} \chi_\zeta(s) \, d\sigma(s), \tag{2.9}$$

где $\chi_\zeta(s)$ — *характеристическая функция интервала* $(\zeta; \xi)$, *а* $d\sigma(s)$ — *элемент площади.*

Доказательство. Обозначим $z=i(w-\xi)$, тогда для любого $\alpha \in (-1; +\infty)$ из формулы (2.5) очевидным образом получим

$$W^{-\alpha} \log |b_\alpha(w; \zeta)| = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_0^{|\eta|} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z} \right\} (|\eta|-t)^\alpha \, dt.$$

Однако

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z} \right\} = \frac{2 \operatorname{Re} z \, (t^2-|z|^2)}{|t^2-z^2|^2},$$

и поэтому справедливо представление (2.8) леммы.

Для доказательства формулы (2.9) заметим, что при любых $w \in \mathrm{C}$ и $t \in (-\infty; +\infty)$

$$\operatorname{Re} \frac{dt}{t-i(w-\xi)} = d_t \log |t-i(w-\xi)|.$$

Воспользовавшись этим, из формулы (2.5) интегрированием по частям и несложными заменами переменных интегрирования получим

$$W^{-\alpha} \log |b_\alpha(w; \zeta)| = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{-|\eta|}^{|\eta|} \log \frac{1}{|t-i(w-\xi)|} \, d(|\eta|-|t|)^\alpha =$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{|\eta|}\log\left|\frac{\xi-it-w}{\xi+it-w}\right|(|\eta|-t)^{\alpha-1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{(\zeta,\,\xi)}\log\left|\frac{w-\bar{s}}{w-s}\right|[i(\zeta-s)]^{\alpha-1}\,ids=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\iint\limits_{G^{(-)}}\log\left|\frac{w-\bar{s}}{w-s}\right||\zeta-s|^{\alpha-1}\chi_\zeta(s)\,d\sigma(s).$$

Из формулы (2.8) следует, что гармоническая вне отрезка $[\zeta;\ \bar{\zeta}]$ функция $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\ \zeta)|$ на вещественной оси обращается в нуль, то есть при любом u $(-\infty<u<+\infty,\ u\neq\xi)$

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u;\ \zeta)|=0;\ -1<\alpha<+\infty. \tag{2.10}$$

Далее, так как при $|w-\xi|\geqslant|\eta|$ подынтегральная функция в формуле (2.8) неотрицательна, то при любом $w\in\mathbf{C}$, таком, что $|w-\xi|>|\eta|$, имеем

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\ \zeta)|\begin{cases}<0; & w\in G^{(-)},\\ >0; & w\in G^{(+)},\ -1<\alpha<+\infty.\end{cases} \tag{2.11}$$

2.2. Более подробное исследование свойств функции $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|$ $(-1<\alpha<+\infty)$ может быть основано на ее представлении (2.9). Однако, так как это представление имеет место лишь при положительных α $(0<\alpha<+\infty)$, то для достижения указанной цели в этом пункте мы прибегнем к иному методу, дающему возможность исследовать свойства функции $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\ \zeta)|$ при любом α $(-1<\alpha<+\infty)$.

Как нетрудно убедиться из формулы (2.5) путем несложных преобразований, для любого $z\in\mathbf{C}\diagdown[-|\eta|;\ |\eta|]$ получим следующее представление:

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(-iz+\xi;\ \zeta)|=-\frac{2\pi}{\Gamma(1+\alpha)}\ \mathrm{Im}\,\{\Phi_\alpha(z)\};\ -1<\alpha<+\infty, \tag{2.12}$$

где

$$\Phi_\alpha(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha}{t-z}\,dt;\ -1<\alpha<+\infty. \tag{2.12'}$$

Тем самым выявление свойств функции $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\ \zeta)|$ сводится к выявлению свойств последнего интеграла типа Коши. Заметим также, что из формул (2.12)—(2.12′) вытекает тождество

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(-iz+\xi;\ \zeta)|\equiv-W^{-\alpha}\log|b_\alpha(iz+\xi;\ \zeta)|;\ -1<\alpha<+\infty, \tag{2.13}$$

справедливое во всей плоскости z.

Очевидно, что функция $\Phi_\alpha(z)$ при любом α $(-1<\alpha<+\infty)$ аналитична в области $\mathbf{C}\diagdown[-|\eta|;\ |\eta|]$. Одновременно, так как функция

$\varphi_\alpha(t)=(|\eta|-|t|)^\alpha$ удовлетворяет условию Липшица (при $\alpha=0$ и $1\leqslant\alpha<<+\infty$ — порядка 1 на сегменте $[-|\eta|;|\eta|]$, при $0<\alpha<1$ — порядка α на сегменте $[-|\eta|;|\eta|]$, а при $-1<\alpha<0$ — порядка 1 на интервале $(-|\eta|;|\eta|)$), то в силу общеизвестных результатов теории интегралов типа Коши (см., напр., [13], гл. 1) справедливы следующие утверждения.

1. Особый интеграл в смысле главного значения Коши

$$\Phi_\alpha(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha}{t-x}\,dt;\ -1<\alpha<+\infty$$

при некотором $\lambda\in(0;1)$ является непрерывной функцией из класса $\mathrm{Lip}\,\lambda$ на интервале $(-|\eta|;|\eta|)$.

2. При любом α $(-1<\alpha<+\infty)$ в любой точке $x\in(-|\eta|;|\eta|)$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\substack{z\to x\\ z\in G^{(+)}}}\Phi_\alpha(z)=\Phi_\alpha^+(x),\ \lim_{\substack{z\to x\\ z\in G^{(-)}}}\Phi_\alpha(z)=\Phi_\alpha^-(z),$$

для которых справедливы формулы Сохоцкого

$$\Phi_\alpha^+(x)-\Phi_\alpha^-(x)=(|\eta|-|x|)^\alpha,$$

$$\Phi_\alpha^+(x)+\Phi_\alpha^-(x)=2\Phi_\alpha(x).$$

3. При любом α $(-1<\alpha<+\infty)$ эти предельные значения являются непрерывными функциями из класса $\mathrm{Lip}\,\lambda$ для некоторого $\lambda\in(0;1)$ на интервале $(-|\eta|;|\eta|)$.

4. При любом положительном α $(0<\alpha<+\infty)$ интеграл типа Коши $\Phi_\alpha(z)$, как функция комплексного переменного, непрерывен в точках $-|\eta|$ и $|\eta|$.

5. При любом отрицательном α $(-1<\alpha<0)$ интеграл типа Коши $\Phi_\alpha(z)$ в достаточно малых окрестностях точек $-|\eta|$ и $|\eta|$ допускает представления

$$\Phi_\alpha(z)=-\frac{e^{-i\pi\alpha}}{2i\sin\pi\alpha}(z+|\eta|)^\alpha+\psi_\alpha^0(z),$$

$$\Phi_\alpha(z)=\frac{e^{-i\pi\alpha}}{2i\sin\pi\alpha}(-z+|\eta|)^\alpha+\psi_\alpha^1(z),$$

где функции $\psi_\alpha^0(z)$ и $\psi_\alpha^1(z)$ аналитичны в окрестностях точек $-|\eta|$ и $|\eta|$ соответственно.

Приведенные свойства интеграла типа Коши $\Phi_\alpha(z)(-1<\alpha<+\infty)$ ввиду представления (2.12)—(2.12′) очевидным образом переходят в свойства функции $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|\,(-1<\alpha<+\infty)$, сформулированные в следующей лемме.

Лемма 2.3. *Функция* $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|\,(-1<\alpha<+\infty)$, *гармоническая в области* $\mathbf{C}\diagdown[\zeta;\bar\zeta]$, *при* $0<\alpha<+\infty$ *непрерывно продолжается через сегмент* $[\zeta;\bar\zeta]$, *а при* $-1<\alpha<0$ — *через интервал* $(\zeta;\bar\zeta)$. *При этом, в случае* $-1<\alpha<0$ *в достаточно малых окрестностях точек* $\zeta\in G^{(-)}$ *и* $\bar\zeta\in G^{(+)}$ *соответственно справедливы представления*

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)| = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}|w-\zeta|^\alpha\cos[\alpha\arg i(w-\zeta)] + u_\alpha^0(w),$$
$$(2.14)$$
$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)| = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}|w-\bar\zeta|^\alpha\cos[\alpha\arg i(\bar\zeta-w)] + u_\alpha^1(w),$$

где функции $u_\alpha^0(w)$ и $u_\alpha^1(w)$ гармоничны соответственно в окрестностях точек ζ и $\bar\zeta$.

Замечание. Ввиду тождественности оператора W^0 и того, что $b_0(w;\zeta) = \frac{w-\zeta}{w-\bar\zeta}$ в случае $\alpha = 0$ для функции $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|$ очевидны следующие утверждения:

1°. Функция

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|\Big|_{\alpha=0} = \log|b_0(w;\zeta)| = \log\left|\frac{w-\zeta}{w-\bar\zeta}\right|$$

гармонична всюду в конечной плоскости, кроме точек ζ и $\bar\zeta$ ($\zeta \in G^{(-)}$, $\bar\zeta \in G^{(+)}$), причем

$$\lim_{w\to\zeta}\log|b_0(w;\zeta)| = -\infty, \quad \lim_{w\to\bar\zeta}\log|b_0(w;\zeta)| = +\infty.$$

2°. Положив $\log|b_0(\zeta;\zeta)| = -\infty$ и $\log|b_0(\bar\zeta;\zeta)| = +\infty$, будем иметь

$$\log|b_0(w;\zeta)| \begin{cases} <0; & w \in G^{(-)}, \\ >0; & w \in G^{(+)}, \end{cases}$$
$$\log|b_0(u;\zeta)| = 0; \quad -\infty < u < +\infty.$$

В следующей теореме устанавливаются основные свойства функции $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|$ $(-1<\alpha<+\infty)$, которые являются аналогами вышеприведенных свойств функции $\log|b_0(w;\zeta)|$. Однако, если функция $\log|b_0(w;\zeta)|$ субгармонична в $G^{(-)}$ и супергармонична в $G^{(+)}$, то подобные субгармоничность и супергармоничность для функции $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|$ при $\alpha \neq 0$ не сосредоточены только в точках ζ и $\bar\zeta$, а, как мы увидим ниже, оказываются „растерты“ по отрезку $[\zeta;\bar\zeta]$.

Теорема 2.1. 1°. *Для положительных α $(0<\alpha<+\infty)$ функция $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|$ непрерывна в конечной плоскости w, гармонична вне отрезка $[\zeta;\bar\zeta]$, субгармонична в полуплоскости $G^{(-)}$ и супергармонична в полуплоскости $G^{(+)}$. Одновременно справедливы неравенства*

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)| \begin{cases} <0; & w \in G^{(-)}, \\ >0; & w \in G^{(+)}, \end{cases} \quad 0<\alpha<+\infty. \tag{2.15}$$

2°. *Для отрицательных α $(-1<\alpha<0)$ функция $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|$ непрерывна везде в конечной плоскости, кроме точек $\zeta \in G^{(-)}$ и $\bar\zeta \in G^{(+)}$, гармонична вне отрезка $[\zeta;\bar\zeta]$, супергармонична в $G^{(-)}\setminus\zeta$ и субгармонична в $G^{(+)}\setminus\bar\zeta$. Одновременно справедливы неравенства*

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|\begin{cases}<0; & w\in G^{(-)},\ |w-\xi|>|\eta|,\\ >0; & w\in G^{(+)},\ |w-\xi|>|\eta|,\end{cases}\quad -1<\alpha<0. \tag{2.16}$$

3°. *При любом* $\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u;\zeta)|=0;\ -\infty<u<+\infty. \tag{2.17}$$

Доказательство. Сначала же заметим, что ввиду леммы 2.3 функция $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|$, каково бы ни было $\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$, непрерывна всюду в конечной плоскости w, за исключением, быть может, точек ζ и $\bar\zeta$. Тем самым, ввиду равенства (2.10), очевидно утверждение 3° леммы.

1°. Пусть $\alpha\ (0<\alpha<+\infty)$—любое. В силу представления (2.12)—(2.12′) функция $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|$ гармонична в конечной плоскости w, вне отрезка $[\zeta;\bar\zeta]$. Одновременно, ввиду леммы 2.3 эта функция непрерывна в конечной плоскости. Поэтому первое утверждение теоремы будет следовать из формул (2.10) и (2.11) в силу принципа максимума субгармонических и минимума супергармонических функций, если мы докажем, что при любом $s\in[\zeta;\bar\zeta]$, при достаточно малых $\rho>0$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(s+\rho e^{i\theta};\zeta)|\,d\theta\ \begin{cases}>W^{-\alpha}\log|b_\alpha(s;\zeta)|; & s\in[\zeta;\xi),\\ <W^{-\alpha}\log|b_\alpha(s;\zeta)|, & s\in(\xi;\bar\zeta].\end{cases} \tag{2.18}$$

Прежде чем доказать эти неравенства, заметим, что ввиду (2.13) и уже доказанного равенства (2.17) при любых $\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ и $\rho\ (0<\rho<+\infty)$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\xi+\rho e^{i\theta};\zeta)|\,d\theta=W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\xi;\zeta)|=0. \tag{2.19}$$

Предположим теперь, что $h\ (0<h<|\eta|)$ и $\rho\ (0<\rho<\max\{h;|\eta|-h\})$ — любые. Тогда из формулы (2.5) для произвольного $\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\xi-ih+\rho e^{i\theta};\zeta)|\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-|\eta|}^{|\eta|}(|\eta|-|t|)^\alpha\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=\rho}\frac{ds}{s\,(t-h-is)}\right\}dt.$$

Однако

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=\rho}\frac{ds}{s\,(t-h-is)}=\begin{cases}0 & \text{при}\quad |t-h|<\rho,\\ \dfrac{1}{t-h} & \text{при}\quad |t-h|>\rho,\end{cases}$$

поэтому при любых $\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$, $h\ (0<h<|\eta|)$ и $\rho\ (0<\rho<\max\{h;|\eta|-h\})$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\xi-ih+\rho e^{i\theta};\zeta)|d\theta=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\int_{-|\eta|}^{h-\rho}+\int_{h+\rho}^{|\eta|}\right)\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha}{t-h}\,dt.$$

Отсюда, ввиду формулы (2.5), для любых α $(-1<\alpha<+\infty)$, h $(0<h<<|\eta|)$ и ρ $(0<\rho<\max\{h;\ |\eta|-h\})$ мы приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\xi-ih+\rho e^{i\theta};\zeta)|\,d\theta-W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\xi-ih;\zeta)|=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{h-\rho}^{h+\rho}\frac{(|\eta|-t)^\alpha}{t-h}\,dt. \tag{2.20}$$

Как нетрудно убедиться, аналогичными выкладками для любых α $(0<\alpha<+\infty)$ и ρ $(0<\rho<|\eta|)$ получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\zeta+\rho e^{i\theta};\zeta)|\,d\theta-W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\zeta;\zeta)|=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{\rho^\alpha}{\alpha}>0. \tag{2.20'}$$

Приведем теперь формулу (2.20) к более удобному для наших целей виду. Очевидно, что

$$\int_{h-\rho}^{h+\rho}\frac{(|\eta|-t)^\alpha}{t-h}\,dt=\int_{-\rho}^{\rho}\frac{(|\eta|-x-h)^\alpha}{x}\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_\varepsilon^\rho\frac{(|\eta|-x-h)^\alpha}{x}\,dx+\int_{-\rho}^{-\varepsilon}\frac{(|\eta|-x-h)^\alpha}{x}\,dx\right\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_\varepsilon^\rho\frac{(|\eta|-x-h)^\alpha}{x}\,dx-\int_\varepsilon^\rho\frac{(|\eta|+x-h)^\alpha}{x}\,dx\right\}=$$

$$=\int_0^\rho\frac{(|\eta|-x-h)^\alpha-(|\eta|+x-h)^\alpha}{x}\,dx.$$

Поэтому для любых α $(-1<\alpha<+\infty)$, h $(0<h<|\eta|)$ и ρ $(0<\rho<<\max\{h;\ |\eta|-h\})$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\xi-ih+\rho e^{i\theta};\zeta)|\,d\theta-W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\xi-ih;\zeta)|=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\rho\frac{(|\eta|+x-h)^\alpha-(|\eta|-x-h)^\alpha}{x}\,dx\begin{cases}>0; & 0<\alpha<+\infty\\ <0; & -1<\alpha<0.\end{cases} \tag{2.21}$$

Из (2.20′) и (2.21), ввиду формулы (2.13), вытекают неравенства (2.18) и, тем самым, утверждение 1° теоремы доказано.

2°. Как мы показали выше, при $-1<\alpha<0$ функция $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|$ непрерывна везде в конечной плоскости w, кроме точек ζ и $\bar\zeta$ и гармонична вне замкнутого отрезка $[\zeta;\bar\zeta]$. Одновременно, выполнены неравенства (2.16) (см. (2.11)). Поэтому для завершения доказательства теоремы остается только заметить, что ввиду второго из неравенств (2.23) и равенства (2.13) функция $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|$ при $-1<\alpha<0$ супергармонична в области $G^{(-)}\setminus\zeta$ и субгармонична в области $G^{(+)}\setminus\bar\zeta$.

2.3. Установим еще одно свойство функции $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\zeta)|$ $(-1<\alpha<+\infty)$.

Лемма 2.4. *При любом* α $(-1<\alpha<+\infty)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{v\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv;\zeta)||\,du=0. \tag{2.22}$$

Доказательство. Ввиду формулы (2.5) при любых α $(-1<\alpha<+\infty)$, u и v $(-\infty<u,\ v<+\infty)$ имеем

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv;\zeta)|=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{t+v}{(u-\xi)^2+(t+v)^2}(|\eta|-|t|)^\alpha\,dt.$$

Поэтому переменой порядка интегрирования получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv;\zeta)|\,du=\frac{\pi}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-|\eta|}^{|\eta|}(|\eta|-|t|)^\alpha\times$$

$$\times\left\{\frac{t+v}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(u-\xi)^2+(t+v)^2}\right\}dt=\frac{\pi}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-|\eta|}^{|\eta|}(|\eta|-|t|)^\alpha\operatorname{sign}(t+v)\,dt\equiv$$

$$\equiv I_\alpha(|\eta|;v).$$

Для вычисления последнего интеграла заметим, что при $|v|\geqslant|\eta|$ и $-|\eta|<t<|\eta|$ имеем $\operatorname{sign}(t+v)=\operatorname{sign}v$. Тем самым, при $|v|>|\eta|$

$$I_\alpha(|\eta|;v)=\operatorname{sign}v\,\frac{\pi}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-|\eta|}^{|\eta|}(|\eta|-|t|)^\alpha\,dt=\operatorname{sign}v\,\frac{2\pi}{\Gamma(2+\alpha)}|\eta|^{1+\alpha}.$$

С другой стороны, при $|v|<|\eta|$, как нетрудно убедиться, справедливы равенства

$$I_\alpha(|\eta|;v)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\int_{-v}^{|\eta|}(|\eta|-|t|)^\alpha\,dt-\int_{-|\eta|}^{-v}(|\eta|-|t|)^\alpha\,dt\right\}=$$

$$=\operatorname{sign}v\,\frac{2\pi}{\Gamma(2+\alpha)}\left[|\eta|^{1+\alpha}-(|\eta|-|v|)^{1+\alpha}\right].$$

Следовательно, для любых α $(-1<\alpha<+\infty)$ и v $(-\infty<v<+\infty)$ мы имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u+iv;\ \zeta)|\, du = \begin{cases} \operatorname{sign} v\ \dfrac{2\pi}{\Gamma(2+\alpha)}\ |\eta|^{1+\alpha};\ |v| \geqslant |\eta|, \\ \operatorname{sign} v\ \dfrac{2\pi}{\Gamma(2+\alpha)} [|\eta|^{1+\alpha} - (|\eta| - |v|)^{1+\alpha}];\ |v| < |\eta|. \end{cases} \tag{2.23}$$

Так как для неотрицательных α $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$ функция $W^{-\alpha} \log |b_\alpha(w;\ \zeta)|$ сохраняет свой знак в $G^{(-)}$ и в $G^{(+)}$, то из последней формулы очевидным образом следует соотношение (2.22) в случае, когда $0 \leqslant \alpha < +\infty$.

С целью доказательства соотношения (2.22) для $\alpha \in (-1;\ 0)$ отметим, что ввиду равенства (2.13) достаточно его доказать лишь при $v \to -0$. С этой целью предположим, что $v < 0$ и обозначим через S_v^+ ту часть прямой $\{w = u + iv;\ -\infty < u < +\infty\}$, где $W^{-\alpha} \log |b_\alpha(w;\ \zeta)| \geqslant 0$, а через S_v^- — ту часть той же прямой, где $W^{-\alpha} \log |b_\alpha(w;\ \zeta)| < 0$. Тогда интеграл (2.22) можно представить следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u+iv;\ \zeta)||\, du = \Big(\int\limits_{S_v^+} - \int\limits_{S_v^-} \Big) W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u+iv;\ \zeta)|\, du =$$

$$= \Big(2 \int\limits_{S_v^+} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big) W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u+iv;\ \zeta)|\, du. \tag{2.24}$$

Однако, из формулы (2.23) следует, что второй интеграл представления (2.24) стремится к нулю при $v \to -0$. Поэтому нам остается только доказать, что при $v \to -0$ стремится к нулю интеграл

$$\int\limits_{S_v^+} W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u+iv;\ \zeta)|\, du.$$

Заметим, что при $|v| < |\eta|$ $(v < 0)$ контур S_v^+, в силу первого из неравенств (2.16), целиком содержится в полукруге $\{w;\ |w - \xi| \leqslant |\eta|,\ w \in G^{(-)}\}$. Следовательно, справедлива оценка

$$0 \leqslant \int\limits_{S_v^+} W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u+iv;\ \zeta)|\, du < \int\limits_{\xi-|\eta|}^{\xi+|\eta|} |W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u+iv;\ \zeta)||\, du. \tag{2.25}$$

Убедимся теперь, что правый интеграл (2.25) стремится к нулю при $v \to -0$.

В самом деле, по теореме 2.1 функция $W^{-\alpha} \log |b_\alpha(w;\ \zeta)|$ непрерывна в замкнутом квадрате $\left\{w = u + iv;\ |u - \xi| \leqslant |\eta|,\ -\dfrac{\eta}{2} \leqslant v \leqslant 0\right\}$ и, следовательно, ограничена там же. Применив лемму Фату и учитывая равенство (2.17), получим

$$0 \leqslant \overline{\lim_{v \to -0}} \int\limits_{\xi-|\eta|}^{\xi+|\eta|} |W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u+iv;\zeta)||\, du \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\xi-|\eta|}^{\xi+|\eta|} \lim_{v \to -0} |W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u+iv;\zeta)||\, du = 0.$$

Лемма доказана.

В заключение этого пункта отметим, что ввиду формулы (2.23) и разложения (2.24) при любых $\alpha\,(-1 < \alpha < +\infty)$ и $v \in (-\infty; +\infty)$ справедлива оценка

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u+iv;\zeta)||\, du \leqslant \frac{6\pi}{\Gamma(2+\alpha)} |\eta|^{1+\alpha}. \tag{2.26}$$

2.4. В конце параграфа, предполагая, что $s = \delta + i\lambda$ — любая фиксированная точка из верхней полуплоскости $G^{(+)} = \{z;\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, приведем переформулировки результатов параграфа для функций $\tilde{b}_\alpha(z;s)(-1 < \alpha < +\infty)$ и операторов интегродифференцирования $\tilde{W}^{-\alpha}$, которые получаются из операторов Вейля отображением $w = z^{-1}$.

Полагая, что $w \in G^{(-)}$ — любая точка и $z = w^{-1}$, наряду с полупрямой

$$\Gamma(\infty; w) \equiv \{\omega = w - i\sigma;\ 0 < \sigma < +\infty\},$$

направленной от ∞ к w, будем рассматривать дугу

$$L(0;z) \equiv [\Gamma(\infty;w)]^{-1} \equiv \{\zeta = \omega^{-1};\ \omega \in \Gamma(\infty;w)\}$$

окружности с центром на вещественной оси, направленную от начала координат к точке z. Отметим, что поскольку $w \in G^{(-)}$ и $\Gamma(\infty;w) \subset G^{(-)}$, то точка $z = w^{-1}$ и дуга $L(0;z) \equiv [\Gamma(\infty;w)]^{-1}$ лежат уже в верхней полуплоскости $G^{(+)}$.

Пусть функция $u(z)$ определена почти всюду и измерима на дуге $L(0;z)$. Формально мы считаем, что

$$\tilde{W}^{-\alpha} u(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{L(0;z)} \left(\frac{i}{\zeta} - \frac{i}{z}\right)^{\alpha-1} \zeta^{-2} u(\zeta)\, d\zeta \ (\alpha > 0), \tag{2.27}$$

$$\tilde{W}^0 u(z) \equiv u(z), \tag{2.28}$$

$$\tilde{W}^\alpha u(z) \equiv \tilde{W}^{-(p-\alpha)} \left\{ \frac{\partial^p}{\partial \left(\mathrm{Im} \dfrac{1}{z}\right)^p} u(z) \right\} (\alpha > 0), \tag{2.29}$$

$p \geqslant 1$ — целое, $p-1 < \alpha \leqslant p$.

Особо отметим, что при любых $\alpha\,(-1 < \alpha < +\infty)$ и $s \in G^{(+)}$ $(\zeta = s^{-1} \in G^{(-)})$ имеем

$$\tilde{W}^{-\alpha} \log |\tilde{b}_\alpha(z;s)| \Big|_{z=w^{-1}} \equiv W^{-\alpha} \log |b_\alpha(w;\zeta)|;\ z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \quad (2\ 3\ )$$

Обозначим теперь через $L[s; \bar{s}]$ замкнутый отрезок касательной к мнимой оси окружности с центром на вещественной оси, соединяющий точки $s \in G^{(+)}$ и $\bar{s} \in G^{(-)}$, т. е. если $\zeta = s^{-1}$ $(\bar{\zeta} = \bar{s}^{-1})$, то

$$L[s; \bar{s}] \equiv \{[\zeta; \bar{\zeta}]\}^{-1} \equiv \{w^{-1}; w \in [\zeta; \bar{\zeta}]\}.$$

Далее, заметим, что ввиду тождественности оператора $\tilde{W}^0$ в случае $\alpha = 0$ для функции $\tilde{W}^{-\alpha} \log |\tilde{b}_\alpha(z; s)|$ очевидны следующие утверждения:

1°. Функция

$$\tilde{W}^{-\alpha} \log |\tilde{b}_\alpha(z; s)|\,|_{\alpha=0} = \log |\tilde{b}_0(z; s)| = \log \left|\frac{z-s}{z-\bar{s}}\right|$$

гармонична всюду в конечной плоскости, кроме точек $s \in G^{(+)}$ и $\bar{s} \in G^{(-)}$, причем

$$\lim_{z \to s} \log |\tilde{b}_0(z; s)| = -\infty, \quad \lim_{z \to \bar{s}} \log |\tilde{b}_0(z; s)| = +\infty.$$

2°. Положив $\log |\tilde{b}_0(s; s)| = -\infty$ и $\log |\tilde{b}_0(\bar{s}; s)| = +\infty$, будем иметь

$$\log |\tilde{b}_0(z; s)| \begin{cases} < 0; & z \in G^{(+)}, \\ > 0; & z \in G^{(-)}, \end{cases}$$

$$\log |\tilde{b}_0(x; s)| = 0; \quad -\infty < x < +\infty.$$

Как нетрудно убедиться, отображением $w = z^{-1}$ теорема 2.1 и лемма 2.4 приводятся к следующим эквивалентным переформулировкам.

Теорема 2.1*. 1°. *Для положительных* α $(0 < \alpha < +\infty)$ *функция* $\tilde{W}^{-\alpha} \log |\tilde{b}_\alpha(z; s)|$ *непрерывна в конечной плоскости, гармонична вне отрезка* $L[s; \bar{s}]$, *субгармонична в полуплоскости* $G^{(+)}$ *и супергармонична в полуплоскости* $G^{(-)}$. *Одновременно справедливы неравенства*

$$\tilde{W}^{-\alpha} \log |\tilde{b}_\alpha(z; s)| \begin{cases} < 0; & z \in G^{(+)}, \\ > 0; & z \in G^{(-)}. \end{cases} \tag{2.31}$$

2°. *Для отрицательных* α $(-1 < \alpha < 0)$ *функция* $\tilde{W}^{-\alpha} \log |\tilde{b}_\alpha(z; s)|$ *непрерывна везде в конечной плоскости, кроме точек* $s \in G^{(+)}$ *и* $\bar{s} \in G^{(-)}$, *гармонична вне отрезка* $L[s; \bar{s}]$, *супергармонична в* $G^{(+)} \setminus s$ *и субгармонична в* $G^{(-)} \setminus \bar{s}$. *Одновременно справедливы неравенства*

$$\tilde{W}^{-\alpha} \log |\tilde{b}_\alpha(z; s)| \begin{cases} < 0; & z \in G^{(+)}, \left|\frac{1}{z} - \mathrm{Re}\,\frac{1}{s}\right| > \left|\mathrm{Im}\,\frac{1}{s}\right|, \\ > 0; & z \in G^{(-)}, \left|\frac{1}{z} - \mathrm{Re}\,\frac{1}{s}\right| > \left|\mathrm{Im}\,\frac{1}{s}\right|. \end{cases} \tag{2.32}$$

3°. *При любом* α $(-1<\alpha<+\infty)$ *имеем*

$$\widetilde{W}^{-\alpha} \log|\overline{b}_\alpha (x; s)|=0; \; -\infty<x<+\infty. \tag{2.33}$$

Лемма 2.4*. *При любом* α $(-1<\alpha<+\infty)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{R\to\pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{W}^{-\alpha} \log |\overline{b}_\alpha (R \sin\theta\, e^{i\theta}; s)|| \frac{d\theta}{R \sin^2\theta} = 0. \tag{2.34}$$

§ 3. Произведения типа Бляшке

В данном параграфе мы займемся вопросами сходимости и установлением основных свойств произведения (конечного или бесконечного)

$$B_\alpha (w) \equiv \prod_k b_\alpha (w; w_k); \; -1<\alpha<+\infty, \tag{3.1}$$

ассоциированного с последовательностью точек $\{w_k\}$, лежащих в нижней полуплоскости $G^{(-)}=\{w: \operatorname{Im} w<0\}$.

В конце параграфа отображением $w=z^{-1}$ $(w_k=\overline{z}_k^{-1};\; k=1, 2, \cdots)$ мы переформулируем полученные результаты для произведения

$$\overline{B}_\alpha (z) \equiv \prod_k \widetilde{b}_\alpha (z; z_k); \; -1<\alpha<+\infty, \tag{3.2}$$

ассоциированного с последовательностью точек $\{z_k\}$, лежащих уже в верхней полуплоскости $G^{(+)}=\{z; \operatorname{Im} z>0\}$.

Предварительно введем некоторые обозначения, используемые нами в изложении этого параграфа. А именно, при любом $\rho\in(-\infty; 0)$ через

$$G_\rho^{(-)}=\{w; \operatorname{Im} w<\rho\}$$

обозначим полуплоскость, лежащую ниже вещественной оси, удаленную от нее на расстояние $|\rho|$. Далее через $\overline{G_\rho^{(-)}}$ будем обозначать соответствующую замкнутую полуплоскость

$$\overline{G_\rho^{(-)}}=\{w: \operatorname{Im} w \leqslant \rho\}.$$

3.1. В этом пункте мы сначала установим условие, необходимое и достаточное для сходимости произведения (3.1), а затем исследуем поведение функции $\log|B_\alpha(w)|$ $(-1<\alpha<+\infty)$ при $w\to\infty$.

Теорема 3.1. 1°. *Пусть* $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ — *произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}<+\infty \tag{3.3}$$

при данном α $(-1<\alpha<+\infty)$.

Тогда бесконечное произведение

$$B_\alpha (w) = \prod_{k=1}^{\infty} b_\alpha (w; w_k) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} \Omega_\alpha (w; w_k)\right\} \tag{3.4}$$

при любом $\rho \in (-\infty; 0)$ *абсолютно и равномерно сходится в замкнутой полуплоскости* $\overline{G_{\rho}^{(-)}}$. *При этом функция* $B_{\alpha}(w)$ *аналитична в полуплоскости* $G^{(-)}$ *и имеет нули только в точках последовательности* $\{w_k\}_1^{\infty}$ *с кратностями, равными кратностям появления соответствующих точек* w_k *в последовательности* $\{w_k\}_1^{\infty}$.

2°. *Если* $\{w_k\}_1^{\infty} \subset G^{(-)}$ — *ограниченная последовательность и при данном* α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *соответствующее произведение абсолютно и равномерно сходится внутри* $G^{(-)}$, *то* $\{w_k\}_1^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (3.3).

Доказательство. 1°. Пусть $\rho \in (-\infty; 0)$—произвольное отрицательное число. Так как в силу (3.3) при $k \to \infty$ $\operatorname{Im} w_k \to 0$, то выбором числа $N_{\rho} > 1$ можем добиться того, чтобы

$$w_k \overline{\in} \overline{G_{\rho}^{(-)}} \text{ при } k > N_{\rho} + 1.$$

При этом для любой точки $w \in \overline{G_{\rho}^{(-)}}$ при $k > N_{\rho} + 1$ будем иметь

$$|w - \operatorname{Re} w_k| \geqslant |\operatorname{Im} w| \geqslant |\rho| > |\operatorname{Im} w_k|.$$

Поэтому, в силу неравенства (1.9) леммы 1.1, в любой точке $w \in \overline{G_{\rho}^{(-)}}$ при $k > N_{\rho} + 1$ справедлива оценка

$$|\Omega_{\alpha}(w; w_k)| = |\log b_{\alpha}(w; w_k)| \leqslant \frac{1}{(|\rho| - |\operatorname{Im} w_k|)^{1+\alpha}} \cdot \frac{|\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Отсюда и из (3.3) вытекает, что ряд

$$\sum_{k=N_{\rho}+1}^{\infty} \log b_{\alpha}(w; w_k) = -\sum_{k=N_{\rho}+1}^{\infty} \Omega_{\alpha}(w; w_k) \tag{3.5}$$

абсолютно и равномерно сходится в $\overline{G_{\rho}^{(-)}}$. И, тем самым, произведение (3.4) абсолютно и равномерно сходится в замкнутой полуплоскости $\overline{G_{\rho}^{(-)}}$.

По теореме 1.1 функция $b_{\alpha}(w; w_k)$ аналитична в полуплоскости $G^{(-)}$ и обращается в нуль только в точке w_k, где имеет нуль первого порядка. Поэтому ввиду абсолютной и равномерной сходимости произведения (3.4), функция $B_{\alpha}(w)$ аналитична в $G^{(-)}$ и обращается в нуль только в точках последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$, а кратность нуля в любой точке w_k равна кратности ее появления в последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$.

2°. Так как произведение $B_{\alpha}(w)$ равномерно сходится внутри $G^{(-)}$, то функция $B_{\alpha}(w) \not\equiv 0$ аналитична в $G^{(-)}$. и тем самым, ввиду ограниченности последовательности $\{w_k\}_1^{\infty} \subset G^{(-)}$ имеем $\operatorname{Im} w_k \to 0$ при $k \to \infty$.

С другой стороны, абсолютная сходимость произведения (3.4) в какой-либо точке $a \in G^{(-)}$—это, по существу, абсолютная сходимость в той же точке $w = a$ ряда (3.5), где $\rho = \operatorname{Im} a$, а $N_{\rho} \geqslant 1$ выбрано по ρ вышеуказанным способом.

Воспользуемся теперь асимптотической формулой (1.10). Так как по условию $\sup\limits_k |\mathrm{Re}\, w_k| \leqslant \sup\limits_k |w_k| = M < +\infty$, то очевидно

$$\left|\frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}|\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha}}{(a-\mathrm{Re}\, w_k)^{1-\alpha}(1+\alpha)}\right| > (|a+M|+|a-M|)^{-1-\alpha}\frac{2\,|\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Однако, $\mathrm{Im}\, w_k \to 0$ при $k\to\infty$, поэтому, ввиду асимптотической формулы (1.10) и последнего неравенства при достаточно большом $k_0 > 1$ справедлива оценка

$$|\Omega_\alpha(a;\, w_k)| > C\,|\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha};\ k \geqslant k_0,$$

где $C \equiv C(\alpha;\, a;\, M) > 0$ — постоянная, не зависящая от $k \geqslant k_0$. Отсюда и из абсолютной сходимости ряда (3.3) в точке $w=a$ вытекает сходимость ряда (3.3), и тем самым, доказательство теоремы завершено.

Отметим, что в замечании к теореме 2 статьи автора [8] (стр. 1297) пропущено условие $\sup\limits_k |u_k| < +\infty$. Более сильное, чем указанное замечание, утверждение содержится в части 2° вышеприведенной теоремы 2.1.

Замечание. Рассматривая вопрос о сходимости произведения $B_\alpha(w)$ на компактах $K \subset \mathbb{C}$ нетрудно доказать, что при выполнении условия (3.3) функция $B_\alpha(w)(-1<\alpha<+\infty)$ аналитически продолжается через любой интервал $(a;\, b)$, не содержащий точек $u_k = \mathrm{Re}\, w_k$ $(k=1, 2, \cdots)$ в полосу $\{w;\ a<\mathrm{Re}\, w<b,\ 0<\mathrm{Im}\, w<+\infty\} \subset G^{(+)}$.

Найдем теперь оценку для функции $\log|B_\alpha(w)|$ $(-1<\alpha<+\infty)$.

Пусть $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ — произвольная ограниченная последовательность (с конечным или бесконечным числом членов), такая, что при данном α $(-1<\alpha<+\infty)$ имеем

$$\sum_k |\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{3.3'}$$

Обозначив

$$\sup_k |w_k| = M\ (M<+\infty),$$

предположим, что $w \in G^{(-)}$ — любая точка, такая, что $|w| > 4M$. Тогда, ввиду абсолютной сходимости ряда (3.5) в точке w и оценки (1.11) будем иметь

$$\big|\log|B_\alpha(w)|\big| \leqslant \sum_k \big|\log|b_\alpha(w;\, w_k)|\big| <$$

$$\leqslant \left\{\frac{2^{2+\alpha}}{1+\alpha}\sum_k |\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha}\right\}|w|^{-(1+\alpha)}. \tag{3.6}$$

3.2. В этом пункте мы установим две леммы, необходимые нам для исследования свойств произведения типа Бляшке $B_\alpha(w)(-1<\alpha<+\infty)$, выраженных посредством оператора $W^{-\alpha}$.

Пусть последовательность $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ при данном $\alpha \in (-1;\, +\infty)$ удовлетворяет условию (3.3). Тогда очевидно, $\mathrm{Im}\, w_k \to 0$ при $k\to\infty$, и, как уже отмечалось, для любой замкнутой полуплоскости $\overline{G_\rho^{(-)}} =$

$=\{w;\ \mathrm{Im}\, w \leqslant \rho < 0\}$ выбором числа $N \equiv N_\rho + 1$ можно добиться того, чтобы имели

$$w_k \overline{\in} \overline{G_\rho^{(-)}} \text{ при } k > N+1.$$

Составим теперь функцию

$$\psi_\alpha(w) \equiv \log|B_\alpha(w)| - \sum_{k=1}^{N} \log|b_\alpha(w;\ w_k)| \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=N+1}^{\infty} \log|b_\alpha(w;\ w_k)|. \tag{3.7}$$

Так как все функции $\log|b_\alpha(w;\ w_k)|$ при $k \geqslant N+1$ гармоничны в $\overline{G_\rho^{(-)}}$ и, как следует из доказательства теоремы 3.1, правый ряд в (3.7) абсолютно и равномерно сходится в $\overline{G_\rho^{(-)}}$, то функция $\psi_\alpha(w)$ гармонична в $\overline{G_\rho^{(-)}}$.

Далее, воспользовавшись неравенством (1.9′), легко увидеть, что в полуплоскости $\overline{G_\rho^{(-)}}$ справедливо и другое абсолютно и равномерно сходящееся представление

$$\frac{\partial}{\partial(\mathrm{Im}\, w)} \psi_\alpha(w) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial(\mathrm{Im}\, w)} \log|b_\alpha(w;\ w_k)|. \tag{3.7′}$$

Лемма 3.2. *Если при некотором* $\alpha\ (-1 < \alpha < +\infty)$ *выполнено условие* (3.3), *то ряд*

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(w;\ w_k)|$$

абсолютно и равномерно сходится в замкнутой полуплоскости $\overline{G_\rho^{(-)}}$.

Доказательство. Так как по выбору числа $N \equiv N_\rho \geqslant 1$ имеем

$$w_k \overline{\in} \overline{G_\rho^{(-)}} \text{ при } k > N+1,$$

то очевидно, что для любой точки $w \in \overline{G_\rho^{(-)}}$ и любого $k > N+1$ справедливы неравенства

$$|w - \mathrm{Re}\, w_k| \geqslant |\mathrm{Im}\, w| \geqslant |\rho| > |\mathrm{Im}\, w_k|.$$

Отсюда, ввиду оценки (2.7), получим, что при $w \in \overline{G_\rho^{(-)}}$ и $k > N+1$

$$|W^{-\alpha} \log|b_\alpha(w;\ w_k)|| \leqslant \frac{2}{\Gamma(2+\alpha)} \frac{|\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha}}{|\rho| - \delta}, \tag{3.8}$$

где $\delta = \max\limits_{k > N+1} |\mathrm{Im}\, w_k| < |\rho|$.

В силу последней оценки и условия (3.3) утверждение леммы справедливо.

Лемма 3.3. *Если при некотором* $\alpha\ (-1 < \alpha < +\infty)$ *выполнено условие* (3.3), *то справедливо представление*

$$W^{-\alpha}\psi_\alpha(w) = \sum_{k=N+1}^{\infty} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(w;\ w_k)|;\ w \in \overline{G_\rho^{(-)}}. \tag{3.9}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно в $\overline{G_\rho^{(-)}}$.

Доказательство. Обозначив

$$\delta = \max_{k \geqslant N+1} |\operatorname{Im} w_k|,$$

приведем предварительно две оценки, справедливые при любых u $(-\infty < u < +\infty)$, t $(-\infty < t < \rho)$ и $k \geqslant N+1$:

$$|\log |b_\alpha (u+it;\ w_k)|| \leqslant \frac{2}{(|t|-\delta)^{1+\alpha}} \frac{|\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}}{1+\alpha}, \tag{3.10}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \log |b_\alpha (u+it;\ w_k)| \right| \leqslant \frac{2}{(|t|-\delta)^{2+\alpha}} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}. \tag{3.10'}$$

Отметим, что эти оценки следуют непосредственно из неравенств (1.9) и (1.9′).

Теперь рассмотрим по отдельности случаи $0 < \alpha < +\infty$ и $-1 < \alpha < 0$.

а) $0 < \alpha < +\infty$. Из оценки (3.10) вытекает, что при любом $w = u + iv \in \overline{G_\rho^{(-)}}$ интеграл

$$I(w) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{v} \sum_{k=N+1}^{\infty} (v-t)^{\alpha-1} |\log |b_\alpha (u+it;\ w_k)|| \, dt$$

сходится. Действительно, так как в этом интеграле $-\infty < t < v < \rho$, то, ввиду оценки (3.10) и сходимости ряда (3.3), имеем

$$I(w) \leqslant \frac{2}{1+\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} \right) \int_{-\infty}^{v} \frac{(v-t)^{\alpha-1}\, dt}{(|t|-\delta)^{1+\alpha}} < +\infty.$$

В силу определения (3.7) функции $\psi_\alpha(w)$ и сходимости интеграла $I(w)$ в любой точке $w = v + iv \in \overline{G_\rho^{(-)}}$ будем иметь

$$W^{-\alpha} \psi_\alpha (w) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{v} (v-t)^{\alpha-1} \sum_{k=N+1}^{\infty} \log |b_\alpha (u+it;\ w_k)| \, dt =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{v} (v-t)^{\alpha-1} \log |b_\alpha (u+it;\ w_k)| \, dt \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=N+1}^{\infty} W^{-\alpha} \log |b_\alpha (w;\ w_k)|.$$

б) $-1 < \alpha < 0$. Аналогично предыдущему рассуждению из оценки (3.10′) следует, что при любом $w = u + iv \in \overline{G_\rho^{(-)}}$ сходится интеграл

$$J(w) \equiv \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{v} \sum_{k=N+1}^{\infty} (v-t)^{\alpha} \left| \frac{\partial}{\partial t} \log |b_\alpha (u+it;\ w_k)| \right| dt.$$

Следовательно, в любой точке $w = u + iv \in \overline{G_\rho^{(-)}}$ будем иметь

$$W^{-\alpha}\psi_\alpha(w) \equiv \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-\infty}^{v}(v-t)^\alpha \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\log|b_\alpha(u+it;\ w_k)|\,dt =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-\infty}^{v}(v-t)^\alpha\frac{\partial}{\partial t}\log|b_\alpha(u+it,\ w_k)|\,dt \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=N+1}^{\infty} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w,\ w_k)|.$$

3.3. Из формулы (3.7) и лемм 3.2 ы 3.3, ввиду свойств функции $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\ w_k)|$ $(-1<\alpha<+\infty)$, сформулированных в теореме 2.2, непосредственно вытекает следующая

Теорема 3.2. 1°. *Если при данном* α $(0<\alpha<+\infty)$ *выполнено условие* (3.3′), *то функция* $W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|$ *непрерывна и субгармонична в нижней полуплоскости* $G^{(-)}$, *причем она гармонична в области* $G^{(-)}\setminus\bigcup_k[w_k;\ \mathrm{Re}\,w_k)$.

Одновременно, выполняется неравенство

$$W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|\leqslant 0;\quad w\in G^{(-)}.$$

2°. *Если при данном* α $(-1<\alpha<0)$ *выполнено условие* (3.3′), *то функция* $W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|$ *непрерывна и супергармонична в области* $G^{(-)}\setminus\{w_k\}$, *причем она гармонична в области* $G^{(-)}\setminus\bigcup_k[w_k;\ \mathrm{Re}\,w_k)$. *Одновременно, при любом* $w\in G^{(-)}$, *таком, что* $|w-\mathrm{Re}\,w_k|>|\mathrm{Im}\,w_k|$ $(k\geqslant 1)$, *выполнено неравенство*

$$W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|\leqslant 0.$$

Замечание. Выкладками, аналогичными вышеприведенным, нетрудно доказать, что при выполнении условия (3.3), ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\ w_k)| = W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|\ (-1<\alpha<+\infty)$$

абсолютно и равномерно сходится на любом компакте $K\subset\mathbf{C}$, не содержащем точек сгущения последовательности $\{u_k\}_1^\infty$. Тем самым, ввиду теоремы 2.1, функция $W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|$ непрерывно продолжается из $G^{(-)}$ через любой интервал $(a;\ b)$, содержащий конечное число точек $u_k=\mathrm{Re}\,w_k$ и

$$W^{-\alpha}\log|B_\alpha(u)|=0;\quad a<u<b.$$

Для установления других, более тонких граничных свойств функции $W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|$ $(0<\alpha<+\infty)$ необходима следующая

Теорема 3.3. *Пусть при данном* α $(-1<\alpha<+\infty)$ *выполнено условие* (3.3′). *Тогда для соответствующего произведения*

$$\lim_{v\to-0}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|B_\alpha(u+iv)||\,du=0. \tag{3.11}$$

Доказательство. Заметим, что ввиду формулы (3.7) в любой точке $w\in G^{(-)}\setminus\{w_k\}$ справедливо неравенство

$$|W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)||\leqslant\sum_k|W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\ w_k)||, \tag{3.12}$$

где ряд справа сходится.

В силу последнего неравенства, оценки (2.26) и условия (3.3′) для любого $v \in (-\infty; 0)$ имеем

$$\sup_{v<0} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |B_\alpha (u+iv)|| \, du \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \sup_{v<0} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |b_\alpha (u+iv; w_k)|| \, du \leqslant \frac{6\pi}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{3.13}$$

Из неравенств (3.12), (3.13) и соотношения (2.22), в силу леммы Фату, следует утверждение теоремы:

$$0 \leqslant \overline{\lim_{v\to -0}} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |B_\alpha (u+iv)|| \, du \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{v\to -0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k |W^{-\alpha} \log |b_\alpha (u+iv; w_k)|| \, du =$$

$$= \overline{\lim_{v\to -0}} \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |b_\alpha (u+iv; w_k)|| \, du \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \overline{\lim_{v\to -0}} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |b_\alpha (u+iv; w_k)|| \, du = 0.$$

Обозначим через $w = \varphi(z)$ фиксированное конформное отображение единичного круга $D = \{z; |z| < 1\}$ на полуплоскость $G^{(-)}$, а через $l(u_0) \subset G^{(-)}$ обозначим дугу окружности, ортогональную вещественной оси, проходящую через точку $u_0 \in (-\infty; +\infty)$ и являющуюся образом радиуса круга D при отображении φ.

Справедлива следующая теорема о граничных значениях функций $W^{-\alpha} \log |B_\alpha (w)|$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

Теорема 3.4. *Пусть последовательность* $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ *удовлетворяет условию* (3.3) *при данном* $\alpha \in [0; +\infty)$. *Тогда почти для всех* $u_0 \in (-\infty; +\infty)$

$$\lim_{\substack{w \to u_0 \\ w \in l(u_0)}} W^{-\alpha} \log |B_\alpha (w)| = 0. \tag{3.14}$$

Доказательство. Ввиду теоремы 3.2, функция $W^{-\alpha} \log |B_\alpha(w)|$ субгармонична и неположительна в $G^{(-)}$. Составим субгармоничную в единичном круге D функцию

$$\Phi(z) \equiv W^{-\alpha} \log |B_\alpha (\varphi(z))|.$$

Так как $\Phi^+(z) \equiv 0$, то при $r \to 1-0$

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\theta})| \, d\theta = O(1)$$

(см., напр., [14]), стр. 118). Поэтому, ввиду теоремы Литтльвуда (см., напр., [15], гл. IV, п. 10, теорему IV.34) почти для всех $\theta \in (0; 2\pi)$ существует предел

$$\lim_{r\to 1-0} \Phi(re^{i\theta}) = \Phi(e^{i\theta}) \leqslant 0.$$

Очевидно, что существование этого предела эквивалентно тому, что почти для всех $u_0 \in (-\infty; +\infty)$ существует предел

$$\lim_{\substack{w\to u_0\\ w\in l(u_0)}} W^{-\alpha} \log |B_\alpha(w)| = \psi(u_0) \leqslant 0.$$

Функция $|\psi(u_0)|$, очевидно, измерима на оси $-\infty < u_0 < +\infty$, с другой стороны, для любого конечного интервала $(a; b) \subset (-\infty; +\infty)$ такого, что $[a; b] \subset (\xi; +\infty)$, либо $[a; b] \subset (-\infty; \xi)$, где $\xi = \operatorname{Re} \varphi(0)$, имеем

$$0 \leqslant \int_a^b |\psi(u_0)|\, du_0 = \int_a^b \lim_{\substack{w\to u_0\\ w\in l(u_0)}} |W^{-\alpha} \log |B_\alpha(w)||\, du_0.$$

Нетрудно убедиться в том, что при $w = u + iv \to u_0$, $w \in l(u_0)$ (тогда $v \to -0$) имеем $u = u_0 + O(v^2)$, с другой стороны, как нетрудно убедиться, на интервале $(a; b)$ имеем $du_0 < C du$, где $C \equiv C(a; b) \in (0; +\infty)$— постоянная. Сделав замену переменной $u = u_0 + O(v^2)$ в последнем интеграле и воспользовавшись леммой Фату и соотношением (3.11), получим

$$0 \leqslant \int_a^b |\psi(u_0)|\, du_0 \leqslant \varliminf_{v\to -0} \int_a^b |W^{-\alpha} \log |B_\alpha(u_0 + O(v^2) + iv)||\, du_0 \leqslant$$

$$\leqslant C \varliminf_{v\to -0} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |B_\alpha(u+iv)||\, du = 0.$$

Тем самым $\psi(u_0) = 0$ почти для всех $u_0 \in (-\infty; +\infty)$, и теорема доказана.

В следующей лемме мы установим оценку для функции $W^{-\alpha} \log |B_\alpha(w)|$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ при $w \to \infty$.

Лемма 3.4. *Пусть* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ — *любая последовательность, такая, что* $\sup_k |w_k| < r_0$ *при некотором* r_0 $(0 < r_0 < +\infty)$ *и при данном* α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *выполнено условие* (3.3′).

Тогда для функции $W^{-\alpha} \log |B_\alpha(w)|$, *где* $B_\alpha(w)$— *произведение типа Бляшке с нулями* $\{w_k\}$, *справедлива оценка*

$$|W^{-\alpha} \log |B_\alpha(w)|| \leqslant \left\{ \frac{4}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} \right\} |w|^{-1}; \quad |w| > 4r_0. \qquad (3.15)$$

Доказательство. Пусть $w \in G^{(-)}$ —любая точка, такая, что $|w| > 4r_0$. Поскольку

$$|w - \operatorname{Re} w_k| - |\operatorname{Im} w_k| > |w| - (|\operatorname{Re} w_k| + |\operatorname{Im} w_k|) \geqslant$$

$$>|w|-2|w_k|>\frac{|w|}{2}+2(r_0-|w_k|)\geqslant\frac{|w_k|}{2},$$

то из (2.7) очевидным образом получим

$$|W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\,w_k)||\leqslant\frac{4}{\Gamma(2+\alpha)}|\mathrm{Im}\,w_k|^{1+\alpha}|w|^{-1}.$$

Отсюда, в силу леммы 3.2 и формулы (3.7), мы приходим к оценке (3.15) леммы.

3.4. В конце параграфа, полагая, что $\{z_k\}$ — любая (конечная или бесконечаая) последовательность точек из верхней полуплоскости $G^{(+)}=\{z;\,\mathrm{Im}\,z>0\}$, приведем эквивалентные переформулировки результатов параграфа для произведений

$$\widetilde{B}_\alpha(z)=\prod_k\widetilde{b}_\alpha(z;\,z_k);\quad -1<\alpha<+\infty \tag{3.16}$$

и операторов интегродифференцирования $\widetilde{W}^{-\alpha}$, определенных в конце § 2.

Как нетрудно убедиться, теоремы 3.1, 3.2 и 3.3 отображением $w=z^{-1}$ $(w_k=z_k^{-1};\ k=1,2,\cdots)$ приводятся к следующим эквивалентным переформулировкам.

Теорема 3.1*. 1°. *Пусть* $\{z_k\}_1^\infty\subset G^{(+)}$ — *произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\mathrm{Im}\,\frac{1}{z_k}\right|^{1+\alpha}<+\infty \tag{3.17}$$

при данном α $(-1<\alpha<+\infty)$.

Тогда бесконечное произведение

$$\widetilde{B}_\alpha(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\widetilde{b}_\alpha(z;\,z_k) \tag{3.18}$$

абсолютно и равномерно сходится внутри полуплоскости $G^{(+)}$. *При этом функция* $\widetilde{B}_\alpha(z)$ *аналитична в полуплоскости* $G^{(+)}$ *и имеет нули только в точках последовательности* $\{z_k\}_1^\infty$, *с кратностями, равными кратностям появления соответствующих точек* z_k *в последовательности* $\{z_k\}_1^\infty$.

2°. *Если точки последовательности* $\{z_k\}_1^\infty\subset G^{(+)}$ *лежат вне некоторой окрестности начала координат (т. е.* $\inf_k|z_k|>0$) *и при данном* α $(-1<\alpha<+\infty)$ *соответствующее произведение типа Бляшке абсолютно и равномерно сходится внутри* $G^{(+)}$, *то* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (3.17).

Теорема 3.2*. 1°. *Если при данном* α $(0<\alpha<+\infty)$ *выполнено условие*

$$\sum_k\left|\mathrm{Im}\,\frac{1}{z_k}\right|^{1+\alpha}<+\infty, \tag{3.17'}$$

то функция $\widetilde{W}^{-\alpha}\log|\widetilde{B}_\alpha(z)|$ *непрерывна и субгармонична в полуплоскости* $G^{(+)}$, *причем она гармонична в области* $G^{(+)}\setminus\bigcup_k L[z;\,\bar{z}_k]$. *Одновременно, выполнено неравенство*

$$\widetilde{W}^{-\alpha} \log |\widetilde{B}_\alpha (z)| \leqslant 0; \; z \in G^{(+)}.$$

2°. *Если при данном* $\alpha \, (-1 < \alpha < 0)$ *выполнено условие* (3.17′), *то функция* $\widetilde{W}^{-\alpha} \log |\widetilde{B}_\alpha (z)|$ *непрерывна и супергармонична в области* $G^{(+)} \setminus \{z_k\}$, *причем она гармонична в области* $G^{(+)} \setminus L \, [z_k; \overline{z}_k]$.

Одновременно, при любом $z \in G^{(+)}$, *таком, что* $\left| \frac{1}{z} - \mathrm{Re} \frac{1}{z_k} \right| > \left| \mathrm{Im} \frac{1}{z_k} \right| \; (k \geqslant 1)$, *выполнено неравенство*

$$\widetilde{W}^{-\alpha} \log |\widetilde{B}_\alpha (z)| \leqslant 0.$$

Теорема 3.3*. *Если при данном* $\alpha \, (-1 < \alpha < +\infty)$ *выполнено условие* (3.17′), *то для соответствующего произведения*

$$\sup_{0 < R < +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \widetilde{W}^{-\alpha} \log |\widetilde{B}_\alpha (R \sin \theta \, e^{i\theta})| \right| \frac{d\theta}{R \sin^2 \theta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6\pi}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_k \left| \mathrm{Im} \frac{1}{z_k} \right|^{1+\alpha} < +\infty, \tag{3.18}$$

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{W}^{-\alpha} \log |\widetilde{B}_\alpha (R \sin \theta \, e^{i\theta})|| \frac{d\theta}{R \sin^2 \theta} = 0. \tag{3.19}$$

Легко переформулировать также теорему 3.4.

Для этого будем полагать, что $z = \varphi(\zeta)$ — фиксированное конформное отображение единичного круга $D = \{\zeta; |\zeta| < 1\}$ на полуплоскость $G^{(+)}$, а $l(x_0) \subset G^{(+)}$ — дуга окружности, проходящая через точку $x_0 \in (-\infty; +\infty)$ и ортогональная вещественной оси, являющаяся образом радиуса круга D при отображении φ.

Теорема 3.4*. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_1^\infty \subset G^{(+)}$ *удовлетворяет условию* (3.17) *при данном* $\alpha \in [0; +\infty)$. *Тогда почти для всех* $x_0 \in (-\infty; +\infty)$

$$\lim_{z \to x_0} \widetilde{W}^{-\alpha} \log |\widetilde{B}_\alpha (z)| = 0. \tag{3.20}$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22.IV.1983

Ա. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Բլյաշկեի տիպի ֆունկցիաներ կիսահարթության համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում $G^{(+)} = \{z; \mathrm{Im}\, z > 0\}$ *վերին կիսահարթության համար կառուցված են* $\alpha \, (-1 < \alpha < +\infty)$ *անընդհատ պարամետրի հետ ասոցացված Բլյաշկեի տիպի արտադրյալներ, որոնց* $\{z_k\} \subset G^{(+)}$ *զրոները բավարարում են*

$$\sum_k \left| \mathrm{Im} \frac{1}{z_k} \right|^{1+\alpha} < +\infty$$

պայմանին։ Հետազոտված են կառուցված արտադրյալների հիմնական հատկությունները։

A. M. JERBASHIAN (DZRBASJAN). *Blaschke type functions for the half-plane* (summary)

In the present paper Blaschke type functions for the upper half-plane $G^{(+)} = \{z;\ \operatorname{Im} z > 0\}$ are constructed associated with the continuous parameter α $(-1<\alpha< < +\infty)$, with zeros $\{z_k\} \subset G^{(+)}$ satisfying the condition

$$\sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_k} \right|^{1+\alpha} < +\infty.$$

We also give an investigation of certain general properties of these functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
2. *И. И. Привалов.* Граничные свойства однозначных аналитических функций, МГУ, М., 1941.
3. *М. М. Джрбашян.* О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 157, № 5, 1964, 1024—1027.
4. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
5. *De Branges.* Hilbert Spaces of Entire Functions, Prentice—Hall Inc., Englewood Cliffs, N. Y., 1968.
6. *R. P. Boas.* Entire Functions, Ac. Press Inc., New York, 1954.
7. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
8. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 246, № 6, 1979, 1295—1298.
9. *Л. Х. Меграбян.* О произведениях типа Бляшке-Джрбашяна в верхней полуплоскости, Сиб. матем. ж., XX, № 4, 1979, 807—825.
10. *А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян.* Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XV, № 6, 1980, 461—474.
11. *А. М. Джрбашян.* Факторизация некоторых общих классов мероморфных в полуплоскости функций, ДАН СССР, 257, № 1, 1981, 21—25.
12. *А. М. Джрбашян.* Факторизация аналитических функций любого конечного порядка в полуплоскости, ДАН СССР, 257, № 3, 1981, 530—533.
13. *Ф. Д. Гахов.* Краевые задачи, «Наука», М., 1977.
14. *И. И. Привалов* Субгармонические функции, ГИТТЛ, М.—Л., 1937.
15. *M. Tsuji.* Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen Company Ltd Tokyo, Japan, 1975.