ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 5, 1983 Математика

УДК 517.984.5

И. Г. ХАЧАТРЯН

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА ВСЕЙ ОСИ

Пусть L — максимальный дифференциальный оператор в $L^2(-\infty, \infty)$ (см. [1], стр. 192), порожденный дифференциальным выражением

$$l[y] \equiv \frac{1}{i^n} y^{(n)} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{i^{2k}} [p_{2k} y^{(k)}]^{(k)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m_1-1} \frac{1}{2 i^{2k+1}} \{[p_{2k+1} y^{(k)}]^{(k+1)} + [p_{2k+1} y^{(k+1)}]^{(k)}\}, \tag{1}$$

где $n > 2$, $m = \left[\frac{n}{2}\right]$, $m_1 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, а $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-2)$ — вещественные суммируемые на всей оси $(-\infty, \infty)$ функции.

Оператор L является самосопряженным.

В настоящей работе исследуются спектр и разложение по собственным функциям оператора L, а затем при дополнительных ограничениях на коэффициенты $p_k(x)$ рассматривается вариант обратной задачи рассеяния. Решение этой задачи основывается на аналоге интегрального уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко (см. [2], [3]).

На перспективность обратных задач рассеяния для дифференциальных операторов вида (1) в связи с решением нелинейных эволюционных уравнений указал Л. Д. Фаддеев [4], стр. 155 (см. в связи с этим также [5]).

Попытка решить обратную задачу рассеяния для оператора третьего порядка в другой постановке предпринята в работе [6]. Для дифференциальных операторов произвольного четного порядка некоторый вариант обратной задачи рассеяния на полуоси рассмотрен автором в работах [7], [8].

1. Исследование спектра. Равенство Парсеваля. Суммируемость коэффициентов $p_k(x)$ на оси $(-\infty, \infty)$ всюду в дальнейшем предполагается выполненной.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1°. *Непрерывный спектр оператора L при $n = 2m+1$ совпадает с осью $(-\infty, \infty)$, а при $n = 2m$ — с полуосью $[0, \infty)$. Точечный спектр ограничен и не имеет отличной от нуля точки сгущения. При $n = 2m+1$ кратность отличных от нуля собственных значений не превосходит m. При $n = 2m$ кратность отрицательных* *собственных значений не превосходит m, а кратность положительных собственных значений не превосходит $m-1$.*

2°. *Если выполняется одно из следующих двух условий:*

$$\int_{-\infty}^{0} |p_k(x)|\, dx + \int_{0}^{\infty} (1+x)^{n-1-k} |p_k(x)|\, dx < \infty, \; k = 0, 1, \cdots, n-2,$$

$$\int_{-\infty}^{0} (1-x)^{n-1-k} |p_k(x)|\, dx + \int_{0}^{\infty} |p_k(x)|\, dx < \infty, \; k = 0, 1, \cdots, n-2,$$

то нуль не является собственным значением оператора L.

3°. *Если выполняется условие*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^{n-1-k} |p_k(x)|\, dx < \infty, \; k = 0, 1, \cdots, n-2,$$

то при четном n число отрицательных собственных значений оператора L конечно, а в случаях $n=3$ и $n=4$ конечно число всех собственных значений. Кроме того, в общем случае для последовательности $\{\mu_k\}$ собственных значений, пронумерованных в порядке невозрастания модулей, сходится ряд

$$\sum_k \sqrt{|\mu_k|} < \infty.$$

Обозначим через T множество всех чисел λ таких, что числа λ^n являются собственными значениями оператора L и, кроме того, при нечетном n $\operatorname{Im} \lambda = 0$, а при четном n $\lambda > 0$ или $\arg \lambda = -\pi/n$.

При нечетном n для каждого вещественного значения λ ($\lambda \overline{\in} T$, $\lambda \neq 0$) уравнение

$$l[y] = \lambda^n y \tag{2}$$

имеет с точностью до постоянного множителя одно ограниченное на всей оси решение $u(x, \lambda) \not\equiv 0$. Для такого решения при $x \to \pm\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$u(x, \lambda) = A_0^{\pm}(\lambda) e^{i\lambda x} + o(1),$$

причем $|A_0^{+}(\lambda)| = |A_0^{-}(\lambda)| \neq 0$. Если $A_0^{+}(\lambda) \equiv 1$ или $A_0^{-}(\lambda) \equiv 1$, то решение $u(x, \lambda)$ непрерывно по λ и по непрерывности определяется также для значений $\lambda \in T$ ($\lambda \neq 0$), кроме того, при каждом фиксированном x по переменной λ аналитически продолжается с полуосей $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ до мероморфной в секторах $|\arg \lambda| \geqslant \pi - \dfrac{\pi}{2n}$ и $|\arg \lambda| \leqslant \dfrac{\pi}{2n}$ функции. Однако в дальнейшем важно, чтобы функции $A_0^{\pm}(\lambda)$ были измеримыми на вещественной оси и

$$|A_0^{\pm}(\lambda)| \equiv 1, \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{3}$$

В случае $n = 2m$ при каждом $\lambda > 0$ ($\lambda \overline{\in} T$) уравнение (2) имеет два линейно независимых ограниченных на всей оси решения $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$. Для таких решений при $x \to \pm\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$u_\nu(x, \lambda) = B_{0\nu}^{\pm}(\lambda) e^{i\lambda x} + B_{m\nu}^{\pm}(\lambda) e^{-i\lambda x} + o(1), \; \nu = 1, 2,$$

где числа $B_{0\nu}^{\pm}(\lambda)$ и $B_{m\nu}^{\pm}(\lambda)$ связаны соотношениями

$$|B_{0\nu}^{+}|^2+|B_{m\nu}^{-}|^2=|B_{m\nu}^{+}|^2+|B_{0\nu}^{-}|^2,\ \nu=1,2,$$

$$B_{01}^{+}\overline{B}_{02}^{+}+B_{m1}^{-}\overline{B}_{m2}^{-}=B_{m1}^{+}\overline{B}_{m2}^{+}+B_{01}^{-}\overline{B}_{02}^{-}.$$

Кроме того, определители матриц

$$\left\| \begin{matrix} B_{01}^{+} & B_{m1}^{-} \\ B_{02}^{+} & B_{m2}^{-} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} B_{m1}^{+} & B_{01}^{-} \\ B_{m2}^{+} & B_{02}^{-} \end{matrix} \right\| \tag{4}$$

отличны от нуля и равны по модулю.

Отметим, что если $p_{2k+1}(x)\equiv 0$ $(k=0, 1, \cdots, m-2)$, то имеет место также соотношение

$$B_{01}^{+}B_{m2}^{+}+B_{m1}^{-}B_{02}^{-}=B_{m1}^{+}B_{02}^{+}+B_{01}^{-}B_{m2}^{-}.$$

Впредь будем предполагать, что матрицы (4) унитарны. Очевидно, что в силу указанных выше соотношений такой выбор решений $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$ всегда возможен. При этом одну из матриц (4) можно задавать произвольно, а по ней вторая матрица и решения $u_\nu(x, \lambda)$ определятся однозначно. Отметим, что если одна из матриц (4) тождественно равна единичной матрице, то соответствующие решения $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$ непрерывны по λ и по непрерывности опрeделяются также для значений $\lambda \in T$ $(\lambda>0)$. Однако в дальнейшем важны лишь унитарность матриц (4) и измеримость их элементов на полуоси $\lambda>0$. При четном n функцию $u(x, \lambda)$ определим по формуле

$$u(x, \lambda)=\begin{cases} u_1(x, \lambda), & \lambda>0, \\ u_2(x, -\lambda), & \lambda<0. \end{cases}$$

Таким образом, всюду в дальнейшем будем предполагать, что для ограниченного на всей оси решения $u(x, \lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty, \lambda\neq 0)$ уравнения (2) при нечетном n выполняется равенство (3), а при четном n унитарны матрицы (4).

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1°. *Пусть $f(x)\in L^2(-\infty, \infty)$, тогда интеграл*

$$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{u}(x, \lambda)\,dx,\ -\infty<\lambda<\infty, \tag{5}$$

сходится в смысле метрики в $L^2(-\infty, \infty)$, и имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\,d\lambda+\sum_k\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\overline{\varphi}_k(x)\,dx\right|^2, \tag{6}$$

где $\{\varphi_k(x)\}$ — ортонормированная система всех собственных функций оператора L.

2°. *Пусть Q — ортогональное дополнение линейной оболочки всех собственных функций оператора L, L' — часть оператора L в Q, а Λ — оператор умножения на λ^n в $L^2(-\infty, \infty)$. Тогда L' есть абсолютно непрерывная часть оператора L, кроме того, формулы (5) и*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\,u(x,\lambda)\,d\lambda,\ -\infty<x<\infty,$$

устанавливают взаимно обратные изометрические отображения Q на $L^2(-\infty,\infty)$ и $L^2(-\infty,\infty)$ на Q соответственно, переводящие друг в друга операторы L' и Λ.

Теоремы 1 и 2 можно доказать, используя известные формулы обращения, связанные с оператором L (см. [1], стр. 251, 280; [9], стр. 289, 306; [10], стр. 216, 217). При этом нужно учесть, что для всех $\lambda\neq 0$ уравнение (2) имеет решения $y^+(x,\lambda)$ и $y^-(x,\lambda)$, обладающие асимптотикой (см. [1], стр. 320)

$$y^{\pm}(x,\lambda)=e^{i\lambda x}[1+o(1)],\quad x\to\pm\infty.$$

При доказательстве теоремы 1 используется также метод расщепления (см. [1], [11]).

2. Треугольное преобразование. Предположим теперь, что коэффициенты $p_k(x)$ в (1) при некотором вещественном a аналитически продолжаются с полуоси (a,∞) в сектор

$$\Omega^+=\left\{z;\ |\arg(z-a)|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right\}\tag{7}$$

и удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{a}|p_k(x)|\,dx+\int_{a}^{\infty}(1+|x|)^{n-1-k}\left[\sup_{\operatorname{Re}z=x}|p_k(z)|\right]dx<\infty,\tag{8}$$
$$k=0,1,\cdots,n-2.$$

Тогда при всех λ из полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ уравнение (2) имеет решение $y^+(x,\lambda)$, которое представляется на полуоси $[a,\infty)$ в виде (см. [12])

$$y^+(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+\int_{x}^{\infty}e^{i\lambda t}K^+(x,t)\,dt,\ a\leqslant x<\infty,\tag{9}$$

где ядро $K^+(x,t)\ (a\leqslant x\leqslant t<\infty)$ не зависит от λ и удовлетворяет неравенству

$$|K^+(x,t)|\leqslant h^+\left(\frac{x+t}{2}\right)\tag{10}$$

с некоторой невозрастающей суммируемой на полуоси $[a,\infty)$ функцией $h^+(x)$. Имеет место также формула

$$e^{i\lambda x}=y^+(x,\lambda)+\int_{x}^{\infty}y^+(t,\lambda)\,H^+(x,t)\,dt,\ a\leqslant x<\infty,\tag{11}$$

причем ядро $H^+(x,t)\ (a\leqslant x\leqslant t<\infty)$ удовлетворяет неравенству, аналогичному (10).

Треугольное представление (9) имеет в дальнейшем принципиальное значение. На примере покажем, что в указанных выше достаточных условиях существования треугольного преобразования (9) раствор сектора голоморфности (7) найден точно. Рассмотрим уравнение

$$y^{(4)} + p(x)\,y = \lambda^4 y, \quad -\infty < x < \infty, \tag{12}$$

где

$$p(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+1}} > 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Очевидно, что для уравнения (12) выполняются указанные выше условия в секторе $|\arg z| < \pi/4$. Поэтому уравнение (12) имеет решение $y^+(x, \lambda)$, представимое при всех $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$ в виде (9). Однако можно доказать, что при каждом $x < 0$

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} |y^+(x, \lambda)| = \infty.$$

Следовательно, при $x < 0$ представление (9) не имеет места, хотя функция $p(z)$ при любом $a < 0$ голоморфна в секторе

$$|\arg(z-a)| < \arg\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - a\right).$$

3. Данные рассеяния. Будем предполагать, что коэффициенты $p_k(x)$ в (1) голоморфны в секторе (7) и удовлетворяют условиям (8), а $y^+(x, \lambda)$ — решение (9) уравнения (2).

Обозначим через $\Phi(x, t; \lambda)$ ядро интегрального оператора, являющегося ортопроектором на собственное подпространство оператора L, соответствующее собственному значению λ^n. Заметим, что, согласно теореме 1, при условиях (8) $0 \overline{\in} T$.

Пусть M — непрерывный спектр оператора L без точки $\lambda = 0$.

Введем также обозначения

$$\omega_k = \exp\left(\frac{2\pi k i}{n}\right),$$

$$\beta_{k,\lambda} = \begin{cases} \omega_k \text{ при } \lambda > 0 \text{ или } \arg\lambda = -\dfrac{\pi}{n}, \\ \bar{\omega}_k \text{ при } \lambda < 0, \end{cases} \tag{13}$$

$$k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

В случае $n = 2m+1$ ядро $\Phi(x, t; \lambda)$ и ограниченное решение $u(x, \lambda)$ уравнения (2) представляются в виде

$$\Phi(x, t; \lambda) = \sum_{k,j=1}^{m} N_{kj}^+(\lambda)\, y^+(x, \lambda\beta_{k,\lambda})\, \bar{y}^+(t, \lambda\beta_{j,\lambda}); \; \lambda \in T, \tag{14}$$

$$u(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{m} A_k^+(\lambda)\, y^+(x, \lambda\beta_{k,\lambda}), \; \lambda \in M.$$

Обозначим

$$S_{kj}^+(\lambda) = A_k^+(\lambda)\, \bar{A}_j^+(\lambda), \; k, j = 0, 1, \cdots, m.$$

В силу (3) имеют место равенства

$$S_{00}^{+}(\lambda)=1,\ S_{kj}^{+}(\lambda)=S_{k0}^{+}(\lambda)\overline{S}_{j0}^{+}(\lambda). \tag{15}$$

Очевидно, что функции $S_{kj}^{+}(\lambda)$ не зависят от выбора решения $u(x,\lambda)$ для которого выполняется (3). При этом, если $A_0^{+}(\lambda)\equiv 1$, то все функции $A_k^{+}(\lambda)$, а следовательно, и $S_{kj}^{+}(\lambda)$ непрерывны на полуосях $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, кроме того, функции $A_k^{+}(\lambda)$ аналитически продолжаются до мероморфных в секторах

$$\pi-\frac{\pi}{2n}\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi \text{ и } 0\leqslant\arg\lambda\leqslant\frac{\pi}{2n}$$

функций.

В случае $n=2m$ при каждом $\lambda\in T$ ядро $\Phi(x, t; \lambda)$ представляется в виде (14), причем $N_{km}^{+}(\lambda)=N_{mk}^{+}(\lambda)=0$ $(k=1, 2,\cdots, m)$ при $\lambda>0$, а ограниченные решения $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$ уравнения (2) представляются в виде

$$u_\nu(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{m}B_{k\nu}^{+}(\lambda)\,y^{+}(x, \lambda\omega_k),\ \lambda\in M,\ \nu=1, 2.$$

В этом случае функции $S_{kj}^{+}(\lambda)$ определим по формулам

$$S_{kj}^{+}(\lambda)=B_{k1}^{+}(\lambda)\overline{B}_{j1}^{+}(\lambda)+B_{k2}^{+}(\lambda)\overline{B}_{j2}^{+}(\lambda),\ k,\ j=0, 1,\cdots, m.$$

Учитывая унитарность матриц (4), нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$S_{00}^{+}(\lambda)=S_{mm}^{+}(\lambda)=1,$$

$$S_{kj}^{+}=S_{km}^{+}\overline{S}_{jm}^{+}+(S_{k0}^{+}-\overline{S}_{0m}^{+}S_{km}^{+})(\overline{S}_{j0}^{+}-S_{0m}^{+}\overline{S}_{jm}^{+})(1-|S_{0m}^{+}|^2)^{-1}, \tag{16}$$

причем равенство $|S_{0m}^{+}(\lambda)|=1$ может выполняться лишь для некоторых значений λ, не имеющих отличной от нуля точки сгущения. Отметим, что функции $S_{kj}^{+}(\lambda)$ не зависят от выбора решений $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$, для которых матрицы (4) унитарны. При этом, если одна из матриц (4) тождественно равна единичной матрице, то все функции $B_{k\nu}^{+}(\lambda)$, а следовательно, и $S_{kj}^{+}(\lambda)$ непрерывны на полуоси $\lambda>0$.

Введем эрмитовы неотрицательные матрицы

$$N^{+}(\lambda)=\|N_{kj}^{+}(\lambda)\|_{k,\ j=1}^{m},\quad \lambda\in T,$$

$$S^{+}(\lambda)=\|S_{kj}^{+}(\lambda)\|_{k,\ j=0}^{m},\quad \lambda\in M,$$

где $m=\left[\frac{n}{2}\right]$. Ранг матрицы $N^{+}(\lambda)$ совпадает с кратностью собственного значения λ^n, а для каждого $\lambda\in M$ $S^{+}(\lambda)$ есть матрица ранга 1 при n нечетном и ранга 2 при n четном.

Отметим, что матрицы $N^{+}(\lambda)$ и $S^{+}(\lambda)$ можно ввести также, не используя явно функцию (9), а опираясь непосредственно на спектральную функцию (разложения единицы) E_μ $(-\infty<\mu<\infty)$ оператора

L. Это делается таким же образом, как аналогичные матрицы вводятся в работе [8].

Рассмотрим набор данных

$$\{T,\ N^+(\lambda)\ \ (\lambda\in T),\ S^+(\lambda)\ (\lambda\in M)\}, \tag{17}$$

которые условимся называть правыми данными рассеяния оператора L.

4. Обратная задача рассеяния. Линейное интегральное уравнение для ядра треугольного преобразования. Рассмотрим обратную задачу рассеяния, состоящую в восстановлении оператора L (т. е. коэффициентов $p_k(x)$ в (1)) по набору данных (17).

Отметим, что в силу равенств (15) и (16) в рассматриваемой задаче для определения $n-1$ вещественных функций $p_k(x)$ $(k=0, 1,\cdots, n-2)$ на оси $(-\infty, \infty)$ при $n=2m+1$ задаются $\frac{n-1}{2}$ комплекснозначных функций $S^+_{k0}(\lambda)$ $(k=1, 2,\cdots, m)$ на оси $(-\infty, \infty)$, а при $n=2m$ задаются $n-1$ комплекснозначных функций $S^+_{0m}(\lambda)$, $S^+_{km}(\lambda)$, $S^+_{k0}(\lambda)$ $(k=1, 2,\cdots, m-1)$ на полуоси $(0, \infty)$.

Заметим еще, что если $n=2m+1$ и $p_{2k}(x)\equiv 0$ $(k=0, 1,\cdots,m-1)$, то $S^+_{kj}(\lambda)=S^+_{jk}(-\lambda)$ $(k, j=0, 1,\cdots, m)$, а если $n=2m$ и $p_{2k+1}(x)\equiv 0$ $(k=0,1,\cdots, m-2)$, то $S^+_{kj}(\lambda)=S^+_{m-j,\,m-k}(\lambda)$ $(k, j=0, 1,\cdots, m)$. Поэтому в указанных частных случаях также сохраняется согласование между числом задаваемых и числом определяемых функций.

Рассматриваемая задача при $n=2$ совпадает с хорошо известной обратной задачей рассеяния для оператора Штурма—Лиувилля.

Для решения поставленной задачи введем функцию

$$\widetilde{F}^+(x, t)=\int\limits_M\int\limits_a^x\int\limits_a^t\sum_{k,j=0}^{m} S^+_{kj}(\lambda)\, e^{i\lambda(\xi\beta_{k,\lambda}-\eta\overline{\beta}_{j,\lambda})}\, d\eta\, d\xi\, d\lambda+$$

$$+\sum_{\lambda\in T}\int\limits_a^x\int\limits_a^t\sum_{k,j=1}^{m} N^+_{kj}(\lambda)\, e^{i\xi\lambda\beta_{k,\lambda}-i\eta\overline{\lambda}\overline{\beta}_{j,\lambda}}\, d\eta\, d\xi,$$

где $a<x,\ t<\infty$, а числа $\beta_{k,\lambda}$ определяются по формулам (13).

Теорема 3. *Существует непрерывная производная*

$$F^+(x, t)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}[\widetilde{F}^+(x, t)-\min\{x, t\}],\ a<x,\ t<\infty,$$

причем $F^+(x, t)=\overline{F}^+(t, x)$. *Кроме того, имеют место равенства*

$$\overset{+}{F}(x, t)=H^+(x, t)+\int\limits_t^\infty H^+(x, \xi)\,\overline{H}^+(t, \xi)\, d\xi,\ a<x\leqslant t, \tag{18}$$

$$F^+(x, t)+K^+(x, t)+\int\limits_x^\infty K^+(x, \xi)\, F^+(\xi, t)\, d\xi=0,\ a<x\leqslant t. \tag{19}$$

При этом для каждого фиксированного значения $x > a$ ядро $K^+(x, t)$ как функция от t является единственным решением интегрального уравнения (19) *в классе* $L^1(x, \infty)$.

Соотношения (18) и (19) выводятся при помощи равенства Парсеваля (6) и формул (9), (11) подобно тому, как это делается в случае $n=2$ (см. [3]).

Теорема 4. *Коэффициенты $p_k(x)$, голоморфные в секторе* (7) *и удовлетворяющие условиям* (8), *по данным* (17) *определяются на полуоси (a, ∞) однозначно. Следовательно, если функции $p_k(x)$ дополнительно голоморфны в некоторой области, содержащей полуось $(-\infty, a]$, то они по данным* (17) *определяются однозначно на всей оси $(-\infty, \infty)$.*

Это непосредственно следует из теоремы 3, так как функции $p_k(x)$ по ядру $K^+(x, t)$ определяются на полуоси (a, ∞) однозначно (см. [12]).

Если вместо условий (8) потребовать, чтобы функции $p_k(x)$ были голоморфными в секторе

$$\Omega^- = \left\{ z;\ |\arg(z-a)| > \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} \right\}$$

и удовлетворяли условиям

$$\int_{-\infty}^{a} (1+|x|)^{n-1-k} \{\sup_{Re z = x} |p_k(z)|\}\, dx + \int_{a}^{\infty} |p_k(x)|\, dx < \infty, \tag{20}$$

$$k=0, 1, \cdots, n-2,$$

то при всех λ из полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$ уравнение (2) имеет решение $y^-(x, \lambda)$, представимое на полуоси $(-\infty, a]$ в виде

$$y^-(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_{-\infty}^{x} e^{i\lambda t} K^-(x, t)\, dt, \quad -\infty < x \leqslant a.$$

Поэтому при условиях (20) возникают левые данные рассеяния

$$\{T,\ N^-(\lambda)\ \ (\lambda \in T),\ S^-(\lambda)\ (\lambda \in M)\},$$

и аналогичные результаты справедливы относительно этих данных.

В заключение автор приносит глубокую благодарность В. Б. Лидскому за полезные обсуждения результатов.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.III.1982

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Ամբողջ առանցքի վրա բարձր կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների համար մի հակադարձ խնդրի մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է $L^2(-\infty, \infty)$ *տարածությունում* $n \geqslant 3$ *կարգի և ամբողջ առանցքի վրա հանրագումարելի գործակիցներով ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ* L *օպերատորը: Հետազոտվում* է L օպերատորի սպեկտրը և վերլուծությունը ըստ L-ի սեփական ֆունկցիաների։ Այնուհետև L օպերատորի գործակիցների վրա լրացուցիչ պայմանների դեպքում դրվում և լուծվում է մի հակադարձ խնդիր, որը նման է ցրման տեսության հակադարձ խնդրին։

I. G. KHACHATRIAN. *On an inverse problem for differential operators of higher order on the whole axes* (summary)

In the space $L^2(-\infty, \infty)$ a self-adjoint differential operator L of order $n \geqslant 3$ with integrable coefficients is considered. We investigate the spectrum of the operator L and expansion by eigenfunctions of that operator. Futher, under additional conditions on coefficients we pose and solve an inverse problem which is analogous with the inverse problem of scattering theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Наймарк.* Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.
2. *И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР, серия матем., 15, № 4, 1951, 309—360.
3. *В. А. Марченко.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения, Киев, «Наукова думка», 1977.
4. *Л. Д. Фаддеев.* Обратная задача квантовой теории рассеяния, Итоги науки и техники, серия Современные проблемы математики, М., «ВИНИТИ», 1974, т. 3, 93—180.
5. *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния, Функц. анализ и его прилож., 8, № 3, 1974, 43—53.
6. *D. J. Kaup.* On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$, Stud. Appl. Math., 62, № 3, 1980, 189—216.
7. *И. Г. Хачатрян.* Об одной обратной задаче, ДАН Арм.ССР, 70, № 3, 1980, 160—166.
8. *И. Г. Хачатрян.* О некоторых обратных задачах для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси, Функц. анализ и его прилож. 17, № 1, 1983, 40—52.
9. *Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «ИЛ», 1958.
10. *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян.* Введение в спектральную теорию, М., «Наука», 1970.
11. *И. М. Глазман.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., «Физматгиз», 1963.
12. *И. Г. Хачатрян.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений, Изв. АН Арм.ССР, серия матем., 14, № 6, 1979, 424—445.