

УДК 517.51

К. С. КАЗАРЯН

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ДО БАЗИСОВ В L^p , $1 < p < \infty$, РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Исследования, касающиеся мультипликативного дополнения неполных ортонормированных систем, берут начало с оригинальной работы Р. Боаса и Г. Полларда [1], которые показали, что из любой полной ортонормированной системы удаляя произвольный конечный набор функций, оставшуюся систему умножением на одну и ту же функцию можно сделать полной в пространстве L^2 .

Дж. Прайсу и Р. Зинку [2] удалось описать системы функций, которые можно мультипликативно дополнить в L^2 . Точнее, они доказали, что для того, чтобы система $\{m(x)f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была полной в $L^2[0,1]$ для некоторой ограниченной функции $m(x) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое множество E_ε , $|E_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$, на котором система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была бы полной в пространстве $L^2(E_\varepsilon)$.

Бен-Ами Браун [3] показал, что в теореме Р. Боаса и Г. Полларда можно добиться большего: чтобы полученная система не только была замкнутой в L^p , $1 < p < \infty$, но обладала также тем свойством, что для любой функции из L^p нашелся ряд по полученной системе, который в этом пространстве сходил к взятой функции. Отметим, что можно также дать полное описание систем, которые обладают свойством теоремы Бен-Ами Брауна.

В работах автора [4], [5], [6] были исследованы вопросы о мультипликативной дополняемости неполных систем до базисов в L^p , $1 < p < \infty$. Здесь и в дальнейшем будем следовать терминологии монографии С. Качмажа и Г. Штейнгауза [7]. В работе [5] для замкнутых минимальных в $L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$ (E — измеримое множество положительной меры) систем $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ были установлены необходимые и достаточные условия на $M(x)$, чтобы система $\{M(x)\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольное натуральное число, были замкнутыми, минимальными в $L^p(E)$. Были полностью описаны все функции $M(x)$, для которых система $\{M(x)\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, где $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система, оставшаяся после удаления из системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ конечного набора функций, является базисом Маркушевича пространства $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, т. е. замкнута минимальна в $L^p[0,1]$ и сопряженная ей система функций полна относительно $L^p[0,1]$.

В работе [4] было доказано, что для любого натурального N можно найти такую функцию $M(x)$, чтобы система $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$

где $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара, была базисом во всех пространствах $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$. Полное описание всех таких функций M дано в [6], где доказывается также, что если система $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является базисом пространства $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, то одновременно является безусловным базисом этого пространства.

В работах автора, перечисленных выше, были получены также результаты, касающиеся описания таких замкнутых минимальных систем пространств L^p , $1 \leq p < \infty$, удаляя из которых конечное число функций, оставшуюся систему невозможно умножением на одну и ту же функцию сделать базисом пространства L^p . Для приведения этих результатов дадим два определения.

Определение 1. Скажем, что система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на измеримом множестве E , $|E| > 0$, имеет свойство (A) на множестве F ($F \subset E$, $|F| > 0$), если существует положительное число α такое, что для любого натурального числа N_1 можно найти число N_2 , для которого

$$\left| \bigcup_{k=N_1}^{N_2} E_k \right| \equiv |F|, \text{ где } E_k = \{x: |\varphi_k(x)| \geq \alpha\} \cap F.$$

Определение 2. Будем говорить, что на множестве F функция M имеет особенность степени q ($1 \leq q \leq \infty$), если $[M(x)]^{-1/q} \in L^q(F)$. В работе [4] была доказана следующая

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полная равномерно ограниченная ортонормированная система функций, определенных на множестве E положительной меры. Пусть, далее, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ имеет свойство (A) на E . Тогда для любого натурального числа N и произвольной ограниченной функции $M(x)$ система $\{M(x)\varphi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ не является базисом ни в одном из пространств $L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$.

Здесь же заметим, что тригонометрическая система и система Уолша удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Аналог теоремы 1 имеет место и для равномерно ограниченных замкнутых минимальных систем (см. [5], теоремы 3, 3°. 3°). С помощью построения соответствующего примера было показано также, что эти результаты без требования, чтобы рассматриваемая система имела свойство (A) на множестве полной меры, в L^p , $1 \leq p < \infty$, не имеет место. Это условие в пространстве L лишнее, так как для любой конечной положительной меры μ в $L(\mu)$ не существует ограниченного нормированного базиса (см. [8], [9], [10]).

Аналогичный вопрос для равномерно ограниченных полных ортонормированных систем оставался открытым, т. е. не было известно можно ли доказать теорему 1 для пространств L^p , $1 \leq p < \infty$, без требования, чтобы рассматриваемые системы имели свойство (A) на множестве полной меры.

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 2. Существует равномерно ограниченная ортонормированная полная относительно $L[0,1]$ система функций $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, которая обладает тем свойством, что удаляя из нее некоторое конечное число функций, оставшуюся систему можно умножением

на одну и ту же функцию из $L^\infty[0,1]$ сделать базисом во всех пространствах $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$.

В связи с теоремой 2 заметим, что согласно теореме 2 работы [5] для системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^\infty$ существует некоторое множество $F \subset [0,1]$ положительной меры такое, что ограниченная функция, существование которой утверждается в теореме 2, не может иметь особенности степени q ($1 < q < \infty$) на F , $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Как дополнение к теореме 2 отметим также, что ввиду того, что базисность системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $L_{[0,1]}(\psi dx)$, где $\psi(x) = |M(x)|$, эквивалентна базисности системы $\{M(x)\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ в $L[0,1]$, из теоремы 2 работы 8 вытекает следующая

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — равномерно ограниченная ортонормированная система функций, определенных на отрезке $[0,1]$ и N — любое натуральное число. Тогда для любой интегрируемой функции $M(x)$ система $\{M(x)\varphi_n(x)\}_{n=N}^\infty$ не является базисом пространства $L[0,1]$.

§ 1. Построение и базисность системы

$\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ в $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$

Пример, удовлетворяющий условиям теоремы 2, будет построен с помощью системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и специальных ортогональных матриц H_k , возникающих из системы Хаара. Напомним сначала определение системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$:

$$\chi_0^{(0)}(x) \equiv 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$\chi_k^{(j)}(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{если } \frac{2j-2}{2^{k+1}} < x < \frac{2j-1}{2^{k+1}} \\ 2^{-k/2}, & \text{если } \frac{2j-1}{2^{k+1}} < x < \frac{2j}{2^{k+1}} \\ 0, & \text{если } x \in \left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k} \right], \end{cases} \quad (1)$$

где для каждого $k=0,1,\dots$ индекс j пробегает значения $1, 2, \dots, 2^k$. Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — система Хаара, упорядоченная обычным образом: $\chi_0^{(0)}(x) = \chi_1(x)$, а при $n=2^k+j$ ($k=0,1,\dots; j=1, 2, \dots, 2^k$)

$$\chi_n^{(j)}(x) = \chi_n(x). \quad (2)$$

Приведем определение ортогональных матриц H_k ($k=1, 2, \dots$) (см. [11], стр. 156), а также [12], стр. 299). Для любого натурального числа k берем средние точки $x_s^{(k)} = (s+1/2)2^{-k}$ интервалов $[s \cdot 2^{-k}, (s+1)2^{-k}]$ и полагаем

$$H_k = \{h_{ij}^{(k)}\} = 2^{-\frac{k}{2}} \chi_i(x_j^{(k)}); \quad 1 \leq i \leq 2^k; \quad j=0, 1, \dots, 2^k-1. \quad (3)$$

Отметим одно свойство матриц H_k ($k=1, 2, \dots$), которое нам понадобится. Существует положительное число $\beta > 0$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{2^k} |h_{ij}^{(k)}| < \beta \quad (1 \leq j \leq 2^k; k=1, 2, \dots). \quad (4)$$

Более подробно со свойствами этих матриц можно познакомиться в монографии А. М. Олевского [13], который независимо ввел и плодотворно применил эти матрицы в теории ортогональных рядов.

Заменой линейного переменного отображим систему Хаара с отрезка $[0, 1]$ соответственно на отрезки $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$, вне которых функции предположим равными нулю. Полученные системы после нормирования соответственно обозначим $\{\bar{\chi}_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и $\{\bar{\chi}_n(x)\}_{n=1}^\infty$:

$$\bar{\chi}_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \chi_n\left(\frac{x}{2}\right), & \text{при } x \in [0, 1/2] \\ 0, & \text{при } x \in [1/2, 1]; n=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5)$$

$$\bar{\chi}_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [0, 1/2] \\ \sqrt{2} \chi_n(2x-1), & \text{при } x \in [1/2, 1], n=1, 2, \dots \end{cases} \quad (6)$$

С помощью матриц H_k преобразуем систему $\{\bar{\chi}_n(x)\}_{n=1}^\infty$ в систему $\{\bar{\psi}_n(x)\}_{n=1}^\infty$. Положим

$$\bar{\psi}_n(x) = \bar{\chi}_n(x) \quad (n=1, 2),$$

$$\bar{\psi}_n(x) = \sum_{j=1}^{2^k} h_{ij}^{(k)} \bar{\chi}_j^{(k)}(x), \quad n=2^k+i \quad (1 \leq i \leq 2^k, k=1, 2, \dots). \quad (7)$$

Из [6], [7] и [3] вытекает (см. [12], стр. 302), что при $n > 2$

$$\bar{\psi}_n(x) = \bar{\chi}_i(x) r_{k+2}(x), \quad (8)$$

где $\bar{\psi}_n(x)$ ($n=3, 4, \dots$) определяется равенством (7) и $r_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$) — функции Радемахера. Функции системы $\{\bar{\psi}_n(x)\}_{n=1}^\infty$ сгруппируем в „пачки“. В k -ую „пачку“ ($k=1, 2, \dots$) входят функции

$$\bar{\psi}_n^{(k)}(x) = \bar{\psi}_n(x), \quad n=2^k+v \quad (v=1, 2, \dots, 2^k). \quad (9)$$

Совокупность функций $\{\bar{\chi}_n(x)\}_{n=1}^\infty \cup \{\bar{\psi}_n(x)\}_{n=1}^\infty$, которая является ортонормированной и полной относительно $L[0, 1]$ системой будем специальным образом объединять в группы, а потом в каждой из этих групп соответствующим образом сделаем ортогональное преобразование. Полученные функции объединим в две части. Функции первой части будем обозначать буквой ξ , а второй части — буквой ζ . Функции первой части будут сгруппированы в „пачки“, которые, в свою очередь, — в „блоки“, а последние — в „контейнеры“. n -ый „контейнер“ состоит из 2^n ($n=1, 2, \dots$) „блоков“. Каждая „блок“ n -го „контейнера“ состоит из 2^{2^n} „пачек“, а каждая из этих „пачек“ — из 2^k функций. n -ый „контейнер“ первой части строится с помощью функций

$$\bar{\chi}_i^{(n)}(x) (1 \leq i \leq 2^n); \bar{\chi}_i^{(n)}(x) r_{v_n+j+2}(x) (1 \leq i \leq 2^n; 1 \leq j \leq 2^{2n}-1),$$

$$\bar{\psi}_{k_n+1}(x) (k_n+1 \leq j \leq k_n+2^n \cdot 2^{2n} (2^n-1) = k_{n+1}; k_1 = -1), \quad (10)$$

где $2^{2n}+1$ — наибольший индекс тех функций $\bar{\psi}_j(x)$, которые были использованы для построения предыдущих $n-1$ „контейнеров“ первой части и для первых $n-1$ „блоков“ второй части. Через v_n будем обозначать наибольший номер той „пачки“ системы $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, все функции которой были использованы при построении предыдущих $n-1$ „контейнеров“ первой части и $n-1$ „блоков“ второй части.

Функции второй части сгруппируем в „пачки“, которые, в свою очередь, будут сгруппированы в „блоки“. Функции n -го „блока“ второй части будут построены с помощью всех тех функций системы $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, которые находятся в „пачках“ с номерами $v_n+1, v_n+2, \dots, v_n+2^{2n}$ и которые не были использованы при построении n „контейнеров“ первой части и $n-1$ „блоков“ второй части, а также с помощью функций $\bar{\psi}_{2^j+1}(x) (k_n+1 \leq j \leq k_{n+1})$, где величина k_{n+1} будет ясна из конкретного построения функций n -го „блока“ второй части. Полагаем

$$\varphi_i^{(j,n)}(x) = h_{ii}^{(2n)} \bar{\chi}_i^{(n)}(x) + \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{iv}^{(2n)} \bar{\chi}_v^{(n)}(x) r_{v_n+v+2}(x)$$

$$(n=1, 2, \dots; 1 \leq i \leq 2^{2n}; 1 \leq j \leq 2^n). \quad (11)$$

Из условий (6), (5), (1) и (4) получаем

$$|\varphi_i^{(j,n)}(x)| \leq \beta \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} (n=1, 2, \dots; 1 \leq j \leq 2^n; 1 \leq i \leq 2^{2n}).$$

Откуда и из условий (3) и (4) следует, что функции

$$\xi_{lm}^{(i,j,n)}(x) = h_{lm}^{(n)} \varphi_i^{(j,n)}(x) + \sum_{m=2}^{2^n} h_{lm}^{(n)} \bar{\psi}_{2^m+1}(x) \quad (12)$$

$$(n=1, 2, \dots; 1 \leq j \leq 2^n; 1 \leq i \leq 2^{2n}; 1 \leq m \leq 2^n),$$

где

$$l(i, j, n, m) = k_n + (j-1) 2^{2n} \cdot (2^n-1) + (i-1)(2^n-1) + m-1, \quad (13)$$

равномерно ограничены на отрезке $[0, 1]$. Ортонормальность построенной системы очевидно следует из ортогональности матриц H_k .

Как было отмечено выше функции второй части группируются в „пачки“, которые, в свою очередь, — в „блоки“. Построим n -ый „блок“ второй части. Для этого сначала пронумеруем, сохраняя их прежний порядок друг относительно друга, все те функции системы $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, которые находятся в „пачках“ с номерами $v_n+1, v_n+2, \dots, v_n+2^{2n}$ и которые не были использованы во время построения первых n „контейнеров“ системы $\{\xi\}$ и $n-1$ „блоков“ системы $\{\zeta\}$. Обозначим эти функции через $g_i^{(n)}(x) (1 \leq i \leq l_n, l_n = 1)$.

Носители функций $g_i^{(n)}(x)$, т. е. наименьшие интервалы, вне которых $g_i^{(n)}(x)$ тождественно равны нулю, обозначим через $\Gamma_i^{(n)}, \Gamma_1^{(n)} =$

$= (1/2, 1)$. Функции i -ой „пачки“ l -го „блока“ второй части определим следующим образом:

$$\zeta_v^{(l, n)}(x) = h_{1, v}^{(P_l(n))} g_l^{(n)}(x) + \sum_{m=2}^{l^{P_l(n)}-1} \bar{h}_{m, v}^{(P_l(n))} \psi_{2^{q_l(n)+m-1}}(x), \quad (14)$$

где

$$P_l(n) = \log_2 |\Gamma_l^{(n)}|^{-1} \quad \text{и} \quad q_l^{(n)} = l(2^{2^n}, 2^n, n, 2^n) + \sum_{m=1}^{l-1} |\Gamma_l^{(m)}|^{-1}.$$

Числа $l(i, j, n, m)$ определяются равенством (13).

Из условий (7), (8), (9), (3) и (4) очевидно следует, что система функций

$$\{\zeta_v^{(l, n)}(x) \mid (1 \leq v \leq |\Gamma_l^{(n)}|^{-1}; 1 \leq l \leq \mu_n; n = 1, 2, \dots)\} \quad (15)$$

равномерно ограничена. Из ортогональности матриц $H_k (k=1, 2, \dots)$ получаем, что система (15) ортонормальна. Искомую систему получим соответствующим образом пронумеровав системы $\{\xi\}$ и $\{\zeta\}$ и прибавив несколько первых функций совокупности $\{\bar{\chi}_n\} \cup \{\bar{\psi}_n\}$, которые не были использованы во время построения этих систем. Из условия (10) легко видеть, что при построении систем $\{\xi\}$ и $\{\zeta\}$ не были использованы следующие функции: $\bar{\gamma}_1(x)$, $\bar{\gamma}_2(x)$ и $\bar{\psi}_1(x)$. Полагаем

$$\gamma_1(x) = \bar{\gamma}_1(x), \quad \gamma_2(x) = \bar{\gamma}_2(x), \quad \gamma_3(x) = \bar{\psi}_1(x), \quad (16)$$

далее

$$\gamma_{jk}(x) = \xi_v^{(l, j, n)}(x), \quad (17)$$

если

$$k = \sum_{m=0}^{n-1} 2^m \cdot 2^{2^m} \cdot 2^m + (j-1) 2^n \cdot 2^{2^n} + (i-1) 2^n + v + \sum_{m=1}^{\mu_n-1} |\Gamma_m^{(n-1)}|^{-1}; \quad (18)$$

$$\gamma_{jk}(x) = \zeta_v^{(l, n)}(x), \quad (19)$$

если

$$k = \sum_{m=0}^n 2^m \cdot 2^m \cdot 2^{2^m} + \sum_{m=1}^{\mu_n-1} |\Gamma_m^{(n-1)}|^{-1} + \sum_{m=1}^{l-1} |\Gamma_m^{(n)}|^{-1} + v. \quad (20)$$

Система $\{\gamma_{jk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированной полной относительно $L[0, 1]$ системой функций, так как она получена из полной относительно $L[0, 1]$ ортонормированной совокупности функций $\{\bar{\chi}_n\} \cup \{\bar{\psi}_n\}$ путем разделения последней на конечные части и применения в них ортогональных преобразований.

Докажем, что система $\{\gamma_{jk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом во всех пространствах $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. В данном случае, ввиду того, что $\{\gamma_{jk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна, достаточно доказать базисность системы $\{\gamma_{jk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в пространствах $L^p[0, 1]$ только при $p > 2$. Система $\{\gamma_{jk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна относительно $L[0, 1]$ и ортогональна, следовательно, согласно хорошо известной теореме С. Банаха, для доказательства базисности $\{\gamma_{jk}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^p(0, 1]$, $p > 2$ остается только доказать, что

для любого $p > 2$ существует абсолютная константа C_p такая, что для всех функций $f \in L^p[0, 1]$

$$\left\| \sum_{k=1}^m c_k(f) \eta_k \right\|_{L^p[0, 1]} \leq C_p \|f\|_{L^p[0, 1]} \quad (m=1, 2, \dots), \quad (21)$$

где

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t) \eta_k(t) dt. \quad (22)$$

Множество индексов тех функций системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^\infty$, которые входят в n -ый "контейнер" системы $\{\zeta_i\}$, обозначим $\Omega^{(n)}$, а множество индексов тех функций, которые входят в n -ый "блок" системы $\{\zeta_i\}$, обозначим через R_n . Пусть f — произвольная функция из пространства $L^p[0, 1]$, $p > 2$. Сначала убедимся в том, что существует некоторая положительная константа D_p , для которой выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k \in \bigcup_{i=1}^m (\Omega^{(i)} \cup R_i)} c_k(f) \eta_k \right\|_{L^p[0, 1]} \leq D_p \|f\|_{L^p[0, 1]} \quad (m=1, 2, \dots). \quad (23)$$

Для доказательства (23) сначала заметим, что из неравенства Колмогорова—Хинчина (см. [7], стр. 153) и условий (8), (6) выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i \bar{\psi}_{2^i+1} \right\|_{L^p[0, 1]} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 \right)^{1/2} \quad (m=1, 2, \dots),$$

для произвольной последовательности чисел $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ и константы $B_p > 0$. Откуда, учитывая, что $p > 2$, получаем

$$\left\| \sum_{i=1}^m \int_0^1 f(t) \bar{\psi}_{2^i+1}(t) dt \cdot \bar{\psi}_{2^i+1} \right\|_{L^p[0, 1]} \leq B_p \|f\|_{L^{p/2}[0, 1]} \quad (m=1, 2, \dots). \quad (24)$$

Функции Лебега для системы $\{\bar{\psi}_n(x)\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничены (см. [12], стр. 302), откуда ввиду того, что $\{\bar{\psi}_n(x)\}_{n=1}^\infty$ полна относительно $L[1/2, 1]$, следует, что $\{\bar{\psi}_n(x)\}_{n=1}^\infty$ является базисом во всех пространствах $L^p[1/2, 1]$, $1 \leq p < \infty$ (см. [14]). Из построения системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^\infty$ (см. (12) — (20)) и из ортогональности матриц H_k очевидно получаем, что для любого m ($m=1, 2, \dots$) сумма

$$\sum_{k \in \bigcup_{i=1}^m (\Omega^{(i)} \cup R_i)} c_k(f) \eta_k(x) = \Phi_1^{(m)}(x) + \Phi_2^{(m)}(x) + \Phi_3^{(m)}(x), \quad (25)$$

где $\Phi_1^{(m)}(x)$ — 2^{m+1} -ая частичная сумма разложения функции f по системе $\{\bar{\chi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$, $\Phi_2^{(m)}(x)$ — соответствующая частичная сумма разложения функции f по системе $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$, и $\Phi_3^{(m)}(x)$ — некоторая часть разложения f по системе $\{\bar{\psi}_{2^i+1}(x)\}_{i=1}^\infty$. Следовательно, из базисности систем соответственно в пространствах $L^p[0, 1/2]$ и $L^p[1/2, 1]$, а также из условий (24), (25) получаем (23).

Для произвольного натурального числа $n=1, 2, \dots$ оценим колебание разложения функции f по системе $\{\xi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ в n -ом „контейнере“. Множество тех функций системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^\infty$, которые входят в j -ый „блок“ n -го „контейнера“ системы $\{\xi_i\}$ обозначим $\Omega_j^{(n)}$, $(1 \leq j \leq 2^n)$. Покажем, что существует некоторая абсолютная константа D_p , для которой

$$\left\| \sum_{k \in \bigcup_{j=1}^s \Omega_j^{(n)}} c_k(f) \eta_k \right\|_{L^p[0,1]} \leq D_p \|f\|_{L^p[0,1]} \quad (1 \leq s \leq 2^n). \quad (26)$$

Из условий (11), (12) и из ортогональности матриц H_k очевидно имеем

$$\sum_{k \in \bigcup_{j=1}^s \Omega_j^{(n)}} c_k(f) \eta_k(x) = \sum_{j=1}^s \int_0^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) dt \cdot \bar{\chi}_j^{(n)}(x) + \sum_{j=1}^s \sum_{v=2}^{2^{2n}} \int_0^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) r_{v_{n+v+2}}(t) dt \cdot \bar{\chi}_j^{(n)}(x) r_{v_{n+v+2}}(x) + F_s^{(n)}(x), \quad (27)$$

где $F_s^{(n)}(x)$ — некоторый отрезок ортогонального разложения функции f по системе $\{\psi_{2^t+1}(x)\}_{t=1}^\infty$. Из неравенства (24) очевидно имеем

$$\|F_s^{(n)}\|_{L^p[0,1]} \leq 2B_p \|f\|_{L^p[0,1]} \quad (1 \leq s \leq 2^n). \quad (28)$$

Из базисности системы Хаара в $L^p[0,1]$ и из (5) очевидно следует существование абсолютной константы $K_p > 0$, для которой

$$\left\| \sum_{j=1}^s \int_0^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) dt \cdot \bar{\chi}_j^{(n)}(x) \right\|_{L^p[0,1]} \leq K_p \|f\|_{L^p[0,1]} \quad (29)$$

Из условий (1), (2), (6), используя неравенства Колмогорова — Хинчина, Бесселя и Гельдера, для любого s , $1 \leq s \leq 2^n$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^s \sum_{v=2}^{2^{2n}} \int_0^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) r_{v_{n+v+2}}(t) dt \cdot \bar{\chi}_j^{(n)}(x) r_{v_{n+v+2}}(x) \right|^p dx = \\ &= \sum_{j=1}^s \int_{\frac{\Delta(n)}{2}}^{\frac{2^{2n}}{\Delta(n)}} \left| \sum_{v=2}^{2^{2n}} \int_{\frac{\Delta(n)}{2}}^{\frac{2^{2n}}{\Delta(n)}} f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) r_{v_{n+v+2}}(t) dt \cdot \bar{\chi}_j^{(n)}(x) r_{v_{n+v+2}}(x) \right|^p dx = \\ &= \sum_{j=1}^s 2^{\frac{p-2}{2}(n+1)} \int_{\frac{\Delta(n)}{2}}^{\frac{2^{2n}}{\Delta(n)}} \left| \sum_{v=2}^{2^{2n}} \int_{\frac{\Delta(n)}{2}}^{\frac{2^{2n}}{\Delta(n)}} f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) r_{v_{n+v+2}}(t) dt \cdot r_{v_{n+v+2}}(x) \right|^p \cdot 2^{n+1} dx \leq \\ &\leq C_p \sum_{j=1}^s 2^{\frac{p-2}{2}(n+1)} \left(\int_{\frac{\Delta(n)}{2}}^{\frac{2^{2n}}{\Delta(n)}} |f(t)|^2 dt \right)^{p/2} \leq C_p \sum_{j=1}^s \int_{\frac{\Delta(n)}{2}}^{\frac{2^{2n}}{\Delta(n)}} |f(t)|^p dt \leq \\ &\leq C_p \int_{1/2}^1 |f(t)|^p dt. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь и в дальнейшем через $\bar{\Delta}_j^{(n)}$, $\bar{\Delta}_j^{(n)}$ обозначаем носители функций $\bar{\Delta}_j^{(n)}$, $\bar{\Delta}_j^{(n)}$. Отсюда и из условий (27), (28), (29) сразу следует неравенство (26). Теперь докажем, что существует абсолютная константа, для которой при всех $n = 1, 2, \dots$ и $1 \leq j \leq 2^n$ имеет место следующее неравенство:

$$\left\| \sum_{l=1}^m \sum_{v=1}^{2^n} \int_0^1 f(t) \xi_{v,l}^{(l,j,n)}(t) dt \cdot \xi_{v,l}^{(l,j,n)}(x) \right\|_{L^p[0,1]} \leq K_p \|f\|_{L^p[0,1]} \quad (1 \leq m \leq 2^{2n}). \quad (31)$$

Из ортогональности матриц H_k и из условий (11), (12) имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^m \sum_{v=1}^{2^n} \int_0^1 f(t) \xi_{v,l}^{(l,j,n)}(t) dt \cdot \xi_{v,l}^{(l,j,n)}(x) = \\ & = \sum_{l=1}^m \int_0^1 f(t) \varphi_l^{(j,n)}(t) dt \cdot \varphi_l^{(j,n)}(x) + F_{j,m}^{(n)}(x), \end{aligned} \quad (32)$$

где $F_{j,m}^{(n)}(x)$ — некоторый отрезок разложения функции f по системе $\{\psi_{2^l+1}(x)\}_{l=1}^m$. Как и выше из неравенства (24) имеем

$$\|F_{j,m}^{(n)}\|_{L^p[0,1]} \leq 2B_p \|f\|_{L^p[0,1]}. \quad (33)$$

Из условий (11) и (3) для $1 \leq m \leq 2^{2n}$ получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{l=1}^m \int_0^1 f(t) \varphi_l^{(j,n)}(t) dt \cdot \varphi_l^{(j,n)}(x) \right\|_{L^p[0,1/2]}^p \leq \\ & \leq 2^p \left\| \sum_{l=1}^m \frac{1}{2^n} \int_0^{1/2} f(t) \bar{\chi}_l^{(n)}(t) dt \cdot \frac{1}{2^n} \bar{\chi}_l^{(n)}(x) \right\|_{L^p[0,1/2]}^p + \\ & + 2^p \left\| \sum_{l=1}^m \int_{1/2}^1 f(t) \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} \bar{\chi}_l^{(n)}(t) r_{n+v+2}(t) dt \cdot \frac{1}{2^n} \bar{\chi}_l^{(n)}(x) \right\|_{L^p[0,1/2]}^p \leq \\ & \leq 2^p \left(\frac{m}{2^{2n}} \right)^p \cdot 2^{\frac{n+1}{2}p} \cdot \left(2^{\frac{n+1}{2} \left(\frac{p}{p-1} - 1 \right)} \right)^{p-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{1/2} |f(t)|^p dt + \\ & + 2^p \left\| \int_{1/2}^1 f(t) \sum_{l=1}^m \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} \bar{\chi}_l^{(n)}(t) r_{n+v+2}(t) dt \cdot \frac{1}{2^n} \bar{\chi}_l^{(n)}(x) \right\|_{L^p[0,1/2]}^p \leq \\ & \leq 2^p \left(\frac{m}{2^{2n}} \right)^p \int_0^{1/2} |f(t)|^p dt + \frac{2^p \cdot 2^{\frac{p(n+1)}{2}}}{2^{n+1} \cdot 2^{pn}} \left\| \int_{1/2}^1 f(t) \sum_{v=2}^{2^{2n}} \bar{\chi}_l^{(n)}(t) r_{n+v+2}(t) \sum_{l=1}^m h_{v,l}^{(2n)} dt \right\| \leq \\ & \leq 2^p \left(\frac{m}{2^{2n}} \right)^p \int_0^{1/2} |f(t)|^p dt + \end{aligned}$$

$$+ 2^{\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}} \cdot 2^{-n \frac{p+2}{2}} \left| \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} r_{\nu, n+\nu+2}(t) \sum_{l=1}^m h_{\nu l}^{(2n)} dt \right|. \quad (34)$$

Из определения матриц H_k легко видеть, что для произвольного $1 \leq m \leq 2^{2n}$ сумма

$$\sum_{l=1}^m h_{\nu k l}^{(2n)} \neq 0$$

только для $2n-1$ штук чисел ν_k ($2^{k-1} + 1 \leq \nu_k \leq 2^{k+1}$), $k=1, 2, \dots, 2n-1$, а для остальных ν ($\nu \neq \nu_k$)

$$\sum_{l=1}^m h_{\nu l}^{(2n)} = 0.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} r_{\nu, n+\nu+2}(x) \sum_{l=1}^m h_{\nu l}^{(2n)} \right| &\leq \sum_{k=1}^{2n-1} 2^{-\frac{2n+1-k}{2}} \cdot 2^{2n-k} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{2n-1} 2^{n-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \leq 2^{n+1}. \end{aligned} \quad (35)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left| \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} r_{\nu, n+\nu+2}(t) \sum_{l=1}^m h_{\nu l}^{(2n)} dt \right| &\leq \\ &\leq 2^{n+1} [2^{\frac{n+1}{2}q} \cdot 2^{-(n+1)}]^{1/q} \left[\int_{1/2}^1 |f(t)|^p dt \right]^{1/p} = \\ &= 2^{(n+1)(1/2+1/p)} \left[\int_{1/2}^1 |f(t)|^p dt \right]^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (34) сразу получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=1}^m \int_0^1 f(t) \varphi_l^{(j, n)}(t) dt \cdot \varphi_l^{(j, n)} \right\|_{L^p[0, 1/2]}^p &\leq \\ &\leq 2^{2(p+1)} \int_0^{1/2} |f(t)|^p dt \quad (1 \leq m \leq 2^{2n}). \end{aligned} \quad (36)$$

Оценивая норму интересующего нас выражения на отрезке $[1/2, 1]$, для $1 \leq m \leq 2^{2n}$ получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=1}^m \int_0^1 f(t) \varphi_l^{(j, n)}(t) dt \cdot \varphi_l^{(j, n)} \right\|_{L^p[1/2, 1]}^p &\leq \\ &\leq 2^p \left\| \sum_{l=1}^m \frac{1}{2^n} \int_0^{1/2} f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) dt \cdot \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu l}^{(2n)} \bar{\chi}_j^{(n)}(x) r_{\nu, n+\nu+2}(x) \right\|_{L^p[1/2, 1]}^p + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2^p \left\| \sum_{l=1}^m \int_{1/2}^1 f(t) \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} \bar{\chi}_j^{(n)}(t) r_{v,n+v+2}(t) dt \times \right. \\
& \quad \left. \times \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} \bar{\chi}_j^{(n)}(x) r_{v,n+v+2}(x) \right\|_{L^p(1/2, 1)}^p. \quad (37)
\end{aligned}$$

Используя неравенство (35), получим

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{l=1}^m \frac{1}{2^n} \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) dt \cdot \sum_{v=2}^{2^{2n}} \bar{\chi}_j^{(n)}(x) h_{v,l}^{(2n)} r_{v,n+v+2}(x) \right\|_{L^p(1/2, 1)}^p = \\
& = \frac{1}{2^{np}} \left\| \int_0^{1/2} f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) dt \right\|^p \left\| \bar{\chi}_j^{(n)}(x) \sum_{v=2}^{2^{2n}} r_{v,n+v+2}(t) \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} \right\|_{L^p(1/2, 1)}^p \leq \\
& \leq \frac{1}{2^{np}} \left(2^{\frac{n+1}{2} \cdot \frac{p}{p-1}} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \right)^{p-1} \cdot 2^{(n+1)p} \cdot 2^{\frac{n+1}{2}p} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \int_0^{1/2} |f(t)|^p dt = \\
& = 2^p \int_0^{1/2} |f(t)|^p dt. \quad (38)
\end{aligned}$$

Обозначим через $T_j^{(n)}$ линейное отображение интервала $\bar{\Delta}_j^{(n)}$ на $(0, 1)$. Из неравенства Колмогорова—Хинчина путем несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{l=1}^m \int_{1/2}^1 f(t) \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} \bar{\chi}_j^{(n)}(t) r_{v,n+v+2}(t) dt \cdot \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} \bar{\chi}_j^{(n)} r_{v,n+v+2} \right\|_{L^p(1/2, 1)}^p = \\
& = 2^{\frac{p}{2}(n+1)} \left\| \sum_{l=1}^m \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} r_{v,n+v+2}(t) dt \cdot \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} r_{v,n+v+2} \right\|_{L^p[\bar{\Delta}_j^{(n)}]}^p = \\
& = \frac{1}{2^{n+1}} 2^{\frac{p}{2}(n+1)} \left\| \sum_{l=1}^m \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} r_{v,n+v+2}(t) dt \times \right. \\
& \quad \left. \times \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} r_{v,n+v+2}(T_j^{(n)} x) \right\|_{L^p[0, 1]}^p \leq \frac{1}{2^{n+1}} 2^{\frac{p}{2}(n+1)} C_p \times \\
& \times \left\| \sum_{l=0}^m \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} r_{v,n+v+2}(t) dt \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} r_{v,n+v+2}(T_j^{(n)} x) \right\|_{L^1[0, 1]}^p = \\
& = \frac{2^{(n+1)\frac{p}{2}}}{2^{n+1}} \cdot 2^{\frac{p}{2}(n+1)} C_p \left\| \sum_{l=1}^m \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) \sum_{v=2}^{2^{2n}} h_{v,l}^{(2n)} r_{v,n+v+2}(t) dt \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu,l}^{(2n)} r_{\nu_n+\nu+2} \right\|_{L^p(\Delta_j^{(n)})}^p \leq \\
& \leq \frac{(n+1)^{\frac{p}{2}}}{2^{n+1}} C_p \left\| \sum_{l=1}^m \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu,l}^{(2n)} r_{\nu_n+\nu+2}(t) dt \cdot \varphi_l^{(j,n)} \right\|_{L^p[0,1]}^p = \\
& = \frac{(n+1)^{\frac{p}{2}}}{2^{n+1}} C_p \left[\sum_{l=1}^{2^{2n}} \left(\int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu,l}^{(2n)} r_{\nu_n+\nu+2}(t) dt \right)^2 \right]^{p/2}. \quad (39)
\end{aligned}$$

Из ортогональности матриц H_k и из ортонормированности функций $\{\bar{\chi}_j^{(n)}(x) r_{\nu_n+\nu+2}(x)\}_{\nu=2}^{2^{2n}}$ очевидно имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{2^{2n}} \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} r_{\nu_n+\nu+2}(t) dt \cdot \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \bar{\chi}_j^{(n)}(x) r_{\nu_n+\nu+2}(x) \equiv \\
& \equiv \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) r_{\nu_n+\nu+2}(t) dt \cdot \bar{\chi}_j^{(n)}(x) r_{\nu_n+\nu+2}(x),
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{2^{2n}} \left(\int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu,l}^{(2n)} r_{\nu_n+\nu+2}(t) dt \right)^2 = \\
& = \left\| \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) r_{\nu_n+\nu+2}(t) dt \cdot \bar{\chi}_j^{(n)} r_{\nu_n+\nu+2} \right\|_{L^2[\Delta_j^{(n)}]}^2.
\end{aligned}$$

Отсюда и из условий (39), (30) получим

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{l=1}^m \int_{1/2}^1 f(t) \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu,l}^{(2n)} \bar{\chi}_j^{(n)}(t) r_{\nu_n+\nu+2}(t) dt \cdot \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} h_{\nu,l}^{(2n)} \bar{\chi}_j^{(n)} r_{\nu_n+\nu+2} \right\|_{L^p(1/2, 1)}^p \leq \\
& \leq 2^{(n+1)(\frac{p}{2}-1)} C_p \left\| \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) r_{\nu_n+\nu+2}(t) dt \cdot \bar{\chi}_j^{(n)} r_{\nu_n+\nu+2} \right\|_{L^2(\Delta_j^{(n)})}^p \leq \\
& \leq C_p \left\| \sum_{\nu=2}^{2^{2n}} \int_{1/2}^1 f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) r_{\nu_n+\nu+2}(t) dt \cdot \bar{\chi}_j^{(n)} r_{\nu_n+\nu+2} \right\|_{L^p[\Delta_j^{(n)}]}^p \leq \\
& \leq C_p \int_{1/2}^1 |f(t)|^p dt. \quad (40)
\end{aligned}$$

Из условий (37), (38) и (40) следует

$$\left\| \sum_{l=1}^m \int_0^1 f(t) \varphi_l^{(j,n)}(t) dt \cdot \varphi_l^{(j,n)} \right\|_{L^p(1/2, 1)}^p \leq C_p \int_{1/2}^1 |f(t)|^p dt. \quad (41)$$

Неравенство (31) сразу следует из условий (32), (33), (36) и (41). Из (12) и (14) с помощью неравенства Колмогорова—Хинчина и определения матриц H_k , как и выше, для любых $n=1, 2, \dots; 1 \leq j \leq 2^n, 1 \leq i \leq 2^{2^n}$ получаем

$$\left\| \sum_{v=1}^m \int_0^1 f(t) \xi_v^{(i, j, n)}(t) dt \xi_v^{(i, j, n)} \right\|_{L^p(0,1)} \leq C_p \|f\|_{L^p(0,1)} \quad (1 \leq m \leq 2^n) \quad (42)$$

и для $n=1, 2, \dots; 1 \leq i \leq 1^n$

$$\left\| \sum_{v=1}^m \int_0^1 f(t) \xi_v^{(i, n)}(t) dt \xi_v^{(i, n)} \right\|_{L^p(0,1)} \leq C_p \|f\|_{L^p(0,1)} \quad (1 \leq m \leq |\Gamma_i^{(n)}|^{-1}). \quad (43)$$

Из неравенств (23), (26), (31), (42), (43) и из условий (17)–(20) сразу следует (21). Таким образом, базисность системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^\infty$ в пространствах $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$, доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Покажем, что для системы $\{\eta_k(x)\}_{k=2}^\infty$ можно найти ограниченную функцию $M(x)$ такую, что $\{M(x) \eta_k(x)\}_{k=2}^\infty$ являлась бы базисом во всех пространствах $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$. Для этого сначала приведем формулировку теоремы 4 работы [4], которую мы существенно используем для доказательства теоремы 2 настоящей работы.

Теорема А. Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — система Хаара. Тогда система $\{M(x) \chi_n(x)\}_{n=2}^\infty$, где

$$M(x) = 2^{-n}, \text{ при } x \in (1/2^{n+1}, 1/2^n) \quad (n=1, 2, \dots)$$

является базисом во всех пространствах $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$.

Из леммы 1 и условия (3.11) работы [4] имеем также, что сопряженная к $\{M(x) \chi_n(x)\}_{n=2}^\infty$ система $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^\infty$ определяется равенством

$$\psi_n(x) = \begin{cases} [M(x)]^{-1} [\chi_n(x) - 2^{k/2}], & \text{если } n = 2^k + 1, k=0, 1, 2, \dots \\ \chi_n(x) [M(x)]^{-1}, & \text{если } n \neq 2^k + 1, k=0, 1, \dots \end{cases}$$

В качестве искомой функции $M(x)$ возьмем функцию M из теоремы А. Сначала убедимся, что система $\{M(x) \eta_k(x)\}_{k=2}^\infty$ замкнута и минимальна во всех пространствах $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$. Для этого проверим выполнение условий теоремы 1 работы [4]. Очевидно, что $\eta_1(x) [M(x)]^{-1}$ не интегрируема на $[0,1]$, следовательно не принадлежит ни одному из пространств $L^q[0,1]$, $1 < q < \infty$. Из определения функции $M(x)$ и условий (11), (12), (14), (16)–(20) легко видеть, что функции $\theta_k(x)$ ($1 \leq k < \infty$), которые определяются следующим условием:

$$\theta_k(x) = \begin{cases} \left[\eta_k(x) - \frac{1}{2^n} \eta_1(x) \right] [M(x)]^{-1}, & \text{если } k \in \Omega_1^{(n)}, n=1, 2, \dots \\ \eta_k(x) [M(x)]^{-1}, & \text{если } k \notin \Omega_1^{(n)}, n=1, 2, \dots \end{cases} \quad (44)$$

ограничены. Условия теоремы 1 работы [4] выполняются. Таким образом, замкнутость и минимальность системы $\{M(x) \eta_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$ в пространствах $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, доказана.

Докажем, что существует такая абсолютная константа $B_p > 0$, зависящая только от параметра p , для которой, если $f \in L^p[0, 1]$

$$\left\| \sum_{k=2}^N a_k M \eta_k \right\|_{L^p(0, 1)} \leq B_p \|f\|_{L^p(0, 1)}, \quad (45)$$

где

$$a_k = \int_0^1 f(t) \theta_k(t) dt.$$

Так как $M(x) = 1$ при $x \in (1/2, 1)$, то из построения системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ легко вывести, что при $n = 1, 2, \dots$; $1 \leq j \leq 2^n$

$$\sum_{k \in \Omega_j^{(n)}} a_k M(x) \eta_k(x) \equiv \sum_{k \in \Omega_j^{(n)}} c_k \eta_k(x), \text{ при } x \in (1/2, 1],$$

где коэффициенты c_k определяются условием (22). Отсюда учитывая, что $a_k M(x) \eta_k(x) \equiv c_k \eta_k(x)$, для тех чисел k , которые определяются условием (20), и при $x \in [0, 1/2)$

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \Omega_j^{(n)}} a_k M(x) \eta_k(x) = \\ &= \int_0^{1/2} f(t) [\bar{\chi}_n^{(1)}(t) - 2^{n/2} \bar{\chi}_1(t)] [M(t)]^{-1} dt \cdot M(x) \bar{\chi}_n^{(1)}(x), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\sum_{k \in \Omega_j^{(n)}} a_k M(x) \eta_k(x) = \int_0^{1/2} f(t) \bar{\chi}_j^{(n)}(t) [M(t)]^{-1} dt \cdot M(x) \bar{\chi}_n^{(j)}(x). \quad (47)$$

Из определения системы функций $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, сопряженной к $\{M(x) \chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$, теоремы А, базисности системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^p[0, 1]$ и из условий (11), (12) настоящей работы получаем, что для доказательства неравенства (45) остается только оценить нормы в $L^p[0, 1]$ следующих выражений:

$$\sum_{v=1}^m \int_0^1 f(t) \left[\xi_v^{(i, 1, n)}(t) - \frac{1}{2^n} \bar{\chi}_1(x) \right] [M(t)]^{-1} dt \cdot M(x) \xi_v^{(i, 1, n)}(x), \quad (48)$$

$$\sum_{v=1}^m \int_0^1 f(t) \xi_v^{(i, j, n)}(t) [M(t)]^{-1} dt \cdot M(x) \xi_v^{(i, j, n)}(x) \quad (49)$$

$$(n = 1, 2, \dots; 2 \leq j \leq 2^n, 1 \leq i \leq 2^{2n}; 1 \leq m \leq 2^n).$$

Как и выше легко убедиться, что отрезки ортогонального и биортогонального разложений некоторой функции $f \in L^p[0, 1]$ соответственно

по системам $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{M(x) \gamma_k\}_{k=2}^{\infty}$, состоящие в первом случае из функций некоторого „блока“ системы $\{\xi\}$, а во втором — из тех же функций, умноженных на $M(x)$, совпадают на интервале $(1/2, 1]$. Из (46), (47) очевидно также, что при $x \in [0, 1/2]$

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^{2^n} \int_0^1 f(t) \left[\xi_v^{(i, 1, n)}(t) - \frac{1}{2^n} \bar{\gamma}_1(t) \right] [M(t)]^{-1} dt \cdot M(x) \xi_v^{(i, 1, n)}(x) = \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{1/2} f(t) [\bar{\gamma}_n^{(1)}(t) - 2^{n/2} \bar{\gamma}_1(t)] [M(t)]^{-1} dt \cdot M(x) \bar{\gamma}_n^{(1)}(x), \\ & \sum_{v=1}^{2^n} \int_0^1 f(t) \xi_v^{(i, j, n)}(t) [M(t)]^{-1} dt \cdot M(x) \xi_v^{(i, j, n)}(x) = \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{1/2} f(t) \bar{\gamma}_n^{(j)}(t) [M(t)]^{-1} dt \cdot M(x) \bar{\gamma}_n^{(j)}(x) \\ & \quad (n=1, 2, \dots; 2 \leq j \leq 2^n; 1 \leq i \leq 2^{2n}). \end{aligned}$$

Таким образом, имеют место следующие неравенства:

$$\left\| \sum_{v=1}^{2^n} \int_0^1 f(t) \left[\xi_v^{(i, 1, n)}(t) - \frac{1}{2^n} \bar{\gamma}_1(x) \right] [M(t)]^{-1} dt \cdot M(x) \xi_v^{(i, 1, n)}(x) \right\|_{L^p(0,1)} \leq B_p \|f\|_{L^p(0,1)}, \quad (50)$$

$$\left\| \sum_{v=1}^{2^n} \int_0^1 f(t) \xi_v^{(i, j, n)}(t) [M(t)]^{-1} dt \cdot M(x) \xi_v^{(i, j, n)}(x) \right\|_{L^p(0,1)} \leq B_p \|f\|_{L^p(0,1)}.$$

Выражения (48) и (49) оцениваются идентично, поэтому нужные рассуждения проведем только для (48). Из базисности системы $\{\eta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^p(0,1)$, базисности системы $\{M(x) \gamma_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ в $L^p(0, 1/2)$ (см. теорему 4 работы [4]), ввиду того, что функции системы $\{\bar{\gamma}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ принимают значение нуль на $(1/2, 1)$ и функция $M(x)$ на этом интервале равна единице, очевидно, что достаточно оценить сумму

$$\sum_{v=1}^m \int_0^{1/2} f(t) \left[\xi_v^{(i, 1, n)}(t) - \frac{1}{2^n} \bar{\gamma}_1(t) \right] [M(t)]^{-1} dt \cdot M(x) \xi_v^{(i, 1, n)}(x)$$

в $L^p(1/2, 1)$ и сумму

$$\sum_{v=1}^m \int_{1/2}^1 f(t) \left[\xi_v^{(i, 1, n)}(t) - \frac{1}{2^n} \bar{\gamma}_1(t) \right] [M(t)]^{-1} dt \cdot M(x) \xi_v^{(i, 1, n)}(x)$$

в $L^p(0, 1/2)$. Из (11), (12) и (3) получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{v=1}^m \int_0^{1/2} f(t) \left[\xi_v^{(l, 1, n)}(t) - \frac{1}{2^n} \bar{\gamma}_1(t) \right] [M(t)]^{-1} dt \cdot M \xi_v^{(l, 1, n)} \right\|_{L^p(1/2, 1)} = \\
& = \left\| \int_0^{1/2} f(t) \left[\xi_v^{(l, 1, n)}(t) - \frac{1}{2^n} \bar{\gamma}_1(t) \right] [M(t)]^{-1} dt \cdot \sum_{v=1}^m M \xi_v^{(l, 1, n)} \right\|_{L^p(1/2, 1)} = \\
& = \frac{1}{2^n} \left\| \int_0^{1/2} f(t) \left[2^{-\frac{n}{2}} \bar{\gamma}_1^{(1)}(t) - \bar{\gamma}_1(t) \right] [M(t)]^{-1} dt \cdot \sum_{v=1}^m \xi_v^{(l, 1, n)} \right\|_{L^p(1/2, 1)} \leq \\
& \leq C_p \|f\|_{L^p(1/2, 1)}.
\end{aligned}$$

Выражение (52) в $L^p(0, 1/2)$ оценивается подобным образом. Таким образом, неравенство (45) доказано. Тем самым доказательство теоремы 2 завершено.

Замечание 1. Используя известные результаты о мультипликативном дополнении до базисов в $L^p(0, 1)$ подсистем системы Хаара (см. [5], [6]), подобным образом как и выше можно доказать, что удаляя из системы $\{\gamma_k(x)\}_{k=1}^\infty$ конечный набор функций, линейно независимых на отрезке $[0, 1/2]$, оставшуюся систему функций можно умножением на ограниченную функцию превратить в базис пространства $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$.

Замечание 2. Удаляя из системы $\{\gamma_k(x)\}_{k=1}^\infty$ конечный набор функций, которые на отрезке $[0, 1/2]$ являются линейно зависимыми, можно показать, что оставшуюся систему функций невозможно умножением на какую-либо функцию превратить в базис пространства $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$. Это делается с помощью таких же рассуждений, что и в доказательстве теоремы 1 (см. [4]). В данном случае нужно использовать конструктивные особенности системы $\{\gamma_k(x)\}_{k=1}^\infty$.

Замечание 3. Из двух предыдущих замечаний следует, что система $\{\gamma_k(x)\}_{k=1}^\infty$ обладает также следующим свойством:

из нее можно удалить некоторый конечный набор функций таким образом, чтобы оставшуюся систему функций было невозможно умножением на какую-либо функцию превратить в базис пространства $L^p(0, 1)$ для какого-нибудь p , $1 < p < \infty$, в том случае, когда удалив из системы $\{\gamma_k(x)\}_{k=1}^\infty$ любую функцию из выбранного набора (может еще некоторые их комбинации) оставшуюся систему можно умножением на ограниченную функцию превратить в базис пространства $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$.

В заключение отметим, что рассмотренный вопрос довольно тесно взаимосвязан с вопросом существования почти всюду расходящегося ряда Фурье по полной равномерно ограниченной ортонормированной системе (см. [15]). На первый взгляд между этими вопросами нет ничего общего, но дело в том, что оба эти вопроса зависят от поведения рядов Фурье δ -функций. Некоторым подтверждением вышесказанного может служить тот факт, что в основу примера построен-

ного автором равномерно ограниченной ортонормированной системы, все ряды Фурье по которой сходятся на фиксированном множестве положительной меры (см. [16]), лежит та же идея, которая положена в основу примера, построенного в настоящей работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.VII.1982

Ղ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Հավասարաչափ սահմանափակ օրթոնորմավորված սխեմաների մուլտիպլիկատիվ լրացումը միջին բազիսներ L^p -ում, $1 < p < +\infty$ (ամփոփում)

Հեղինակի նախորդ աշխատանքներում ([4], [5], [6]) ուսումնասիրվել է ոչ լրիվ օրթոնորմավորված սխեմաների միջին բազիսներ L^p -ում, $1 < p < \infty$, բազիսներ մուլտիպլիկատիվ լրացման հարցը:

Սահմանափակ ապացուցվել է (տես [4], [5]), որ եթե լրիվ օրթոնորմավորված սխեման հավասարաչափ սահմանափակ է և բավարարում է (A) պայմանին, ապա այդ սխեմայի ցանկացած վերջավոր թվով ֆունկցիաներ հեռացնելուց հետո մնացած համակարգը հնարավոր չէ մուլտիպլիկատիվ եղանակով դարձնել L^p -ի բազիս ցանկացած p ($1 < p < \infty$)-ի համար: Այդ պայմաններին բավարարում են այնպիսի սխեմաներ ինչպիսին են եռանկյունաչափական սխեման, Ուելչի սխեման և այլն:

Ներկա աշխատանքում կառուցված է լրիվ հավասարաչափ օրթոնորմավորված սխեման օրինակը, որից վերջավոր թվով ֆունկցիան հեռացնելուց հետո, մնացած համակարգը կարելի է միևնույն սահմանափակ ֆունկցիայով բազմապատկելով դարձնել բազիս բոլոր L^p , $1 < p < \infty$ տարածություններում: Որակից հետևում է, որ [4]-ում ապացուցված թեորեմը վերջնական բնույթ ունի:

K. S. KAZARIAN. *Multiplicative completion of bounded orthogonal systems to bases in the spaces L^p , $1 < p < \infty$ (summary)*

The problem of multiplicative completion of incomplete orthonormal systems to basis in the spaces L^p , $1 < p < \infty$ was considered in the previous articles of the author ([4], [5], [6]).

It was proved (see [4], [5]), that if a complete bounded orthonormal system satisfies the condition (A), then after deleting any finite number of functions from that system it is impossible to multiplicatively complete the remaining set of functions to a basis in any space L^p , $1 < p < \infty$. The trigonometric system and the Walsh system satisfies to these conditions.

In this work an example of bounded complete orthogonal system is constructed for which it is possible to get a basis in every space L^p [0, 1], $1 < p < \infty$, deleting from it a finite number of functions and multiplying the remaining set by a bounded function. This example shows that in a sense the theorem proved in [4] is final.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. P. Boas, H. Pollard. The multiplicative Completion of sets of functions, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 1948, 518—522.
2. J. J. Price, R. E. Zink. On sets of functions that can be multiplicatively completed, Ann. of Math., (2), 82, 1965, 139—145.
3. Ben-Ami Braun. On the multiplicative completion of certain basic sequences in L^p , $1 < p < \infty$ Trans. Amer. Math. Soc., 176, 1975.
4. К. С. Казарян. О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в L^p , $1 \leq p < \infty$, Annal., Math., 4, № 1, 1978, 37—52.
5. К. С. Казарян. О мультипликативном дополнении некоторых систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 13, № 4, 1978, 315—351.
6. K. S. Kazarian. On bases and unconditional bases in the $L^p(d\mu)$, $1 < p < \infty$ spaces, Studia Math., 71, № 3, 1981, 227—249.

7. С. Качмаж и Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, М., Гостехиздат, 1958.
8. К. С. Казарян. Логарифмический рост средних арифметических от сумм функций Лебега ограниченных биортогональных систем, ДАН Арм.ССР, 69, 1979, 140—145.
9. А. С. Кранцберг. О системах сходимости в C и базисности в L^1 , Мат. заметки, т. 26, № 2, 1979.
10. S. Kwapień, S. J. Szarek. An estimation of the Lebesgue functions of biorthogonal systems with an application to the non-existence of some bases in C and L_∞ , Stud. Math., 66, № 2, 1979, 185—200.
11. У. Гренандер и Г. Тезе. Теплицевы формы и их приложения, М., ИЛ, 1961.
12. А. М. Олевский. Об одной ортонормальной системе и ее приложениях, Мат. сб., 71, 113, № 3, 1966, 297—336.
13. A. M. Olevskii. Fourier series with respect to general orthonormal systems, Springer-Verlag, 1975.
14. П. А. Ульянов. Некоторые вопросы теории ортогональных и биортогональных рядов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 30, 1965, 3—13.
15. С. В. Бочкарев. Метод усреднений в теории ортогональных рядов и некоторые вопросы теории базисов, Тр. МИАН, М., «Наука», 1978, 3—87.
16. К. С. Казарян. О некоторых вопросах теории ортогональных рядов, Мат. сб., 119 (161), № 2 (10), 1982, 278—294.