

УДК 519.218

М. Г. АВЕТИСЯН

ВЕКТОРНЫЕ ГАУССОВСКИЕ ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

1. В в е д е н и е. Марковские гауссовские случайные поля были рассмотрены еще в работе Розанова [4] (см. также работу Чей [7]). В статье Добрушина [1] был подробно изучен общий класс гиббсовских полей с квадратичным потенциалом, включающий гауссовские гиббсовские поля и в частности марковские гиббсовские поля. Эти исследования были продолжены в статье Кюнша [11]. Во всех цитируемых работах рассматривались случайные поля со скалярными значениями. Цель настоящей статьи — распространить эти результаты на векторный случай. В статье устанавливается, что при некоторых дополнительных условиях стационарное векторное гауссовское случайное поле со значениями в R^n на ν -мерной целочисленной решетке Z^ν с матрицей спектральных плотностей $f(k) = \{f_{jl}(k)\}$ $j, l = 1, \dots, n$ и вектором средних значений $h = (h_1, \dots, h_n)$ можно трактовать как гиббсовское поле с парным квадратичным потенциалом

$$U(x_t, x_s) = (U(t-s) x_t, x_s)^*, \quad x_t, x_s \in R^n, \quad t, s \in Z^\nu, \quad (1.1)$$

где матрицы $U(t)$ — это коэффициенты Фурье матричной функции $f(k)^{-1}$ и линейно-квадратичным одночастичным потенциалом

$$U(x_t) = \frac{1}{2} (U(0) x_t, x_t) + \left(h, \sum_{t \in Z^\nu} U(t) x_t \right), \quad x_t \in R^n, \quad t \in Z^\nu. \quad (1.2)$$

При этом совокупность всех гиббсовских полей с таким потенциалом совпадает с совокупностью сверток однородного векторного гауссовского поля со спектральной плотностью $f(k)$ и средним значением 0 и случайных полей, все реализации которых $a_t, t \in Z^\nu$ удовлетворяют функциональным уравнениям

$$\sum_{t \in Z^\nu} U(t-s) a_t = -h, \quad s \in Z^\nu. \quad (1.3)$$

2. Векторные случайные поля. Пусть $X = (R^n)^{Z^\nu}$ — пространство вектор-функций $x = (x_t = (x_{1,t}, \dots, x_{n,t}))$, $t \in Z^\nu$, определенных на ν -мерной целочисленной решетке Z^ν , со значениями x_t в n -мерном векторном пространстве R^n . При всех $x \in X$ и $V \in \nu^*$, где ν^* — совокупность всех конечных подмножеств множества Z^ν , положим $x_V = (x_t, t \in V) \in (R^n)^V$. Пусть $\Phi \subset X$ — совокупность финитных функций от $t \in Z^\nu$. Положим

* Здесь и далее (b, c) — скалярное произведение векторов $b, c \in R^n$.

$$\xi_{\varphi}(x) = \sum_{t \in Z^*} (\varphi(t), x_t), \quad x \in X, \quad \varphi \in \Phi \quad (2.1)$$

и

$$\begin{aligned} \xi_t(x) &= x_t, \quad t \in Z^*, \quad x \in X, \\ \xi_{i,t}(x) &= x_{i,t}, \quad t \in Z^*, \quad i=1, \dots, n, \quad x \in X. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пусть множество $\widehat{V} \subseteq [1, 2, \dots, n] \times Z^* = \widehat{Z}^*$.

Через $B_{\widehat{V}}$ будем обозначать наименьшую σ -алгебру подмножеств пространства X , относительно которой измеримы все функции $\xi_{i,t}$, $(i, t) \in \widehat{V}$. При $V \subset Z^*$ и $\widehat{V} = \{1, \dots, n\} \times V$, σ -алгебру $B_{\widehat{V}}$ будем обозначать просто через B_V . Положим также $B_{Z^*} = B$.

Распределениями вероятностей (р.в.) случайных полей будем называть вероятностные меры на пространстве (X, B) . Будем называть средним значением поля с (р.в.) P линейный функционал

$$A^P(\varphi) = \int_X \xi_{\varphi}(x) P(dx) = \sum_{t \in Z^*} (A_t^P, \varphi(t)), \quad (2.3)$$

где $\varphi \in \Phi$ и

$$A_t^P = \int_X \xi_t(x) P(dx), \quad t \in Z^*. \quad (2.4)$$

Предполагая, что средние значения существуют, положим

$$\begin{aligned} \zeta_{\varphi}^P(x) &= \xi_{\varphi}(x) - A^P(\varphi), \quad \varphi \in \Phi, \\ \zeta_t^P(x) &= \xi_t(x) - A_t^P, \quad t \in Z^*. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Теперь, предполагая существование вторых моментов, введем ковариационный функционал, положив

$$\begin{aligned} B^P(\varphi_1, \varphi_2) &= \int_X \zeta_{\varphi_1}^P(x) \zeta_{\varphi_2}^P(x) P(dx) = \\ &= \sum_{t, s \in Z^*} (B^P(t, s) \varphi_1(t), \varphi_2(s)), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$B^P(t, s) = [B_{j,l}^P(t, s)]_{j,l=1,\dots,n}$$

и

$$B_{j,l}^P(t, s) = \int_X \zeta_{j,t}^P(x) \zeta_{l,s}^P(x) P(dx), \quad t, s \in Z^*. \quad (2.7)$$

Случайное поле с р.в. P называется ковариационно-стационарным, если оно имеет конечный ковариационный функционал и

$$B^P(\varphi_1, \varphi_2) = B^P(\varphi_1^s, \varphi_2^s), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi, \quad s \in Z^*, \quad (2.8)$$

где $\varphi_j^s(t) = \varphi_j(t-s)$, $s, t \in Z^*$, $j=1, 2$.

Известно, что (см. [3], § 4.3) для ковариационно-стационарного поля

$$B^P(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{(-\pi\pi]^v} (\varphi_1(k) F^P(dk), \varphi_2(k)), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi, \quad (2.9)$$

где $(-\pi\pi]^v = \{k = (k_1, \dots, k_v) \in R^v, -\pi < k_j \leq \pi, j = 1, \dots, v\}$

и

$$\tilde{\varphi}_j(k) = \sum_{t \in Z^v} \varphi(t) e^{i(k, t)}, \quad k \in (-\pi\pi]^v, \quad j = 1, 2,$$

а $F^P(\cdot)$ — это матричная неотрицательно определенная функция множества, определяемая на σ -алгебре $B[(-\pi\pi]^v$ борелевских подмножеств множества $(-\pi\pi]^v$. Функцию $F^P(\cdot)$ называют спектральной мерой поля с р.в. P . Если

$$F^P(A) = \int_A f(k) dk, \quad A \in B[(-\pi\pi]^v, \quad (2.10)$$

то будем говорить, что поле имеет спектральную плотность $f(k)$, $k \in (-\pi\pi]^v$. Любая измеримая функция с неотрицательно определенными значениями такая, что $\int_{(-\pi\pi]^v} Sp f(k) dk < \infty$, где $Sp f(k)$ — это след

матрицы $f(k)$, является спектральной плотностью некоторого поля.

Здесь и далее P — это р.в. с конечным ковариационным функционом. Будем обозначать через $L_2^{(P)}$ — гильбертово пространство вещественных функций на X , квадратично интегрируемых по мере P , и через $L_2^i(P)$ — подпространство пространства $L_2^{(P)}$, являющееся замыканием в $L_2(P)$ системы функций $\zeta_{j,t}^P$, $(j, t) \in \hat{Z}^v$. Обозначим через L пространство $L_2^i(P) \oplus \dots \oplus L_2^i(P)$. Пусть $L_2(F)$ — гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $g(k) = (g_1(k), \dots, g_n(k))$, $k \in (-\pi\pi]^v$ таких, что $g(k) = \overline{g(-k)}$ со скалярным произведением, заданным неотрицательно определенной квадратичной формой

$$(g_1(k), g_2(k)) = \int_{(-\pi\pi]^v} (g_1(k) F^P(dk), g_2(k)) \quad (2.11)$$

с естественной факторизацией по классу функций, на которых эта форма обращается в нуль.

Предложение 2.1. (см. [2]). Существует единственный изоморфизм пространств $L_2(F)$ и $L_2^1(P)$ такой, что элементу $\zeta_{j,t}^P \in L_2^1(P)$ соответствует элемент $\tilde{\varphi} \in L_2(F)$. Образ элемента $g \in L_2(F)$ при этом изоморфизме будем обозначать через Z_g . Через $H_{\tilde{V}} \subseteq L_2^1(P)$, $\hat{V} \subseteq \hat{Z}^v$ будем обозначать замкнутое подпространство, порожденное векторами $\zeta_{j,t}^P$, $(j, t) \in \hat{V}$. Через $d_{j,t}, \tilde{v} \in L_2^1(P)$, где $(j, t) \in \hat{V}$ и $\tilde{V}$ — конечное

подмножество множества $\widehat{Z}$, будем обозначать проекцию вектора $\zeta_{j,t}^P$ на $H_{\widehat{Z}^*} \setminus \widehat{V}$, а если $\widehat{V} = \{1, \dots, n\} \times V$, то положим просто

$$d_{j,t,\widehat{V}} \equiv d_{j,t,V}, \quad V \in V^*, \quad d_{l,V} = \{d_{j,t,V}\}_{j=1, \dots, n}.$$

Положим

$$B_{j,l,V}^P(t,s) = \int_{\widehat{X}} (\zeta_{j,t}^P(x) - d_{j,t,V}(x)) (\zeta_{l,s}^P(x) - d_{l,s,V}(x)) P(dx)$$

и

$$B_V^P(t,s) = \{B_{j,l,V}^P(t,s)\}_{j,l=1, \dots, n}. \quad (2.12)$$

Предложение 2.2 (см. [8], § 2.3, 4.3, 7.12). Пусть P — это р.в. векторного гауссовского случайного поля. Тогда при любом $V \in V^*$ сужение на B^V условного р.в. $P_V(\cdot/x)$ относительно $\mathfrak{F}$ -подалгебры $L_{\widehat{Z}^* \setminus V}$ имеет характеристическую функцию вида

$$\begin{aligned} \chi(\lambda_t, t \in V/x) &= \int_{(R^n)^V} \exp \left(i \sum_{t \in V} (\lambda_t, \xi_t(\widehat{x}_V)) \right) P_V(\widehat{x}_V/x) = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t,s \in V} (B_V^P(t,s) \lambda_t, \lambda_s) + i \sum_{s \in V} (\lambda_s, d_{s,V}(x) + A_s^P) \right\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

т. е. является гауссовским с матрицей ковариации

$B_V^P = \{B_{j,l,V}^P(s,t), s,t \in V, j,l=1, \dots, n\}$ и вектором средних значений $\{d_{l,V} + A_l^P, t \in V\}$.

Векторное случайное поле называется минимальным, если

$$\zeta_{j,t}^P \in H_{\widehat{Z}^* \setminus \{(j,t)\}} \quad (2.14)$$

при всех $(j,t) \in \widehat{Z}^*$.

Предложение 2.3 (см. [2], гл. II). Для того, чтобы векторное ковариационно-стационарное поле со спектральной плотностью $f(k)$ было минимальным необходимо и достаточно, чтобы почти всюду существовала обратная матрица $f^{-1}(k)$ и

$$\int_{(-\pi)^n} Sp f^{-1}(k) dk < \infty, \quad (2.15)$$

где $Sp f^{-1}(k)$ — след матрицы $f^{-1}(k)$.

При этом

$$\sigma_t^2 = B_{\{t\}}^P(t,t) = (2\pi)^{2n} \left[\int_{(-\pi)^n} f_{(k)}^{-1} dk \right]^{-1} \quad (2.16)$$

и

$$d_{l,\{t\}} = Z_e^l(t,k) [f_n - (2\pi)^{-n} \sigma_t^2 f_{(k)}^{-1}]. \quad (2.17)$$

Случайное поле с р.в. P называется линейно регулярным, если

$$\bigcap_{\substack{\widehat{V} \subset \widehat{Z}^*, \\ |\widehat{V}| < \infty}} H_{\widehat{Z}^* \setminus \widehat{V}} = 0, \quad (2.18)$$

где $|\widehat{V}|$ — мощность подмножества $\widehat{V}$ множества $\widehat{Z}^*$.

Предложение 2.4 (см. [4]). При выполнении условия (2.15) поле с р.в. P линейно регулярно. В соответствии с определением (2.12) для линейно регулярного поля

$$B^P(s, t) = \lim_{V \rightarrow \infty} B_V^P(s, t), \quad s, t \in Z^*. \quad (2.19)$$

Говорят, что система векторов $\{\zeta_{j, t}^P, (j, t) \in \widehat{Z}^*\}$ образует слабый базис в пространстве $L_2^1(P)$, если любой вектор $a \in L_2^1(P)$ единственным образом представим в виде

$$a = \sum_{(j, t) \in \widehat{Z}^*} c_j(t) \zeta_{j, t}^P, \quad (2.20)$$

где $c_j(t), (j, t) \in \widehat{Z}^*$ — действительные числа, а ряд в (2.20) сходится в слабом смысле в пространстве $L_2^1(P)$. Известно (см. [2], § 2), что

при выполнении условия (2.15) система векторов $\{\zeta_{j, t}, (j, t) \in \widehat{Z}^*\}$ образует слабый базис в пространстве $L_2^1(P)$, при этом если $a = Z_g$, $g(k) = (g_1(k), \dots, g_n(k))$, то функции $g_j(k)$, $1 \leq j \leq n$ интегрируемы по мере Лебега и при этом

$$c_j(t) = (2\pi)^{-1} \int_{(-\pi)^n} g_j(k) e^{i(k, t)} dk. \quad (2.21)$$

3. Гиббсовские поля. Пусть $h \in R^n$, а $U(t), t \in Z^*$ $n \times n$ — матричная функция такая, что $U(t) = U(-t)$, $t \in Z^*$ и

$$\sum_{t \in Z^*} \|U(t)\| < \infty, \quad (3.1)$$

где норма матрицы $U(t) = \{U_{j, l}(t)\}_{j, l=1 \dots n}$ определяется как $\|U(t)\| = \max_{j, l=1 \dots n} |U_{j, l}(t)|$, $t \in Z^*$. Пусть далее $Y(U) \subset X$ — множество функций $x = (x_t, t \in Z^*)$ таких, что $x_t \in R^n$ и

$$\sum_{t \in Z^*} \|U(t-s)x_t\| < \infty, \quad s \in Z^*, \quad (3.2)$$

где норма вектора $x_t \in R^n$ определяется, как $\|x_t\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_{j, t}|^2}$. Введем энергию взаимодействия

$$H_V^{(h, U)}(x_V/x) = \sum_{\{s, t\} \subset V} (U(t-s)\hat{x}_t, \hat{x}_s) + \frac{1}{2} \sum_{t \in V} (U(0)\hat{x}_t, \hat{x}_t) +$$

$$+ \left(h, \sum_{s \in V} \hat{x}_s \right) + \left(\sum_{s \in V} \hat{x}_s, \sum_{t \in Z^* \setminus V} U(t-s) x_t \right), \quad (3.3)$$

где $\hat{x}_V = (\hat{x}_t, t \in V) \in (R^n)^V$, $x = (x_t, t \in Z^*) \in Y(U)$, $V \in V^*$ и гиббсовскую плотность

$$P_V^{(h, U)}(\hat{x}_V/x) = \frac{\exp \{-H_V^{(h, U)}(\hat{x}_V/x)\}}{Z_V(x)}, \quad (3.4)$$

где

$$Z_V(x) = \int_{(R^n)^V} \exp \{-H_V^{(h, U)}(\hat{x}_V/x)\} d\hat{x}_V. \quad (3.5)$$

Ясно, что $Z_V(x) > 0$ для всех $V \in V^*$ и $x \in Y(U)$ тогда и только тогда, если при всех $V \in V^*$

$$\sum_{t, s \in V} (U(t-s) Z_t, Z_s) > 0, Z_s \neq 0, Z_s \in C^n, s \in V. \quad (3.6)$$

Если положим $q(k) = \sum_{t \in Z^*} U(t) e^{i \langle k, t \rangle}$, то (3.6) можно записать в виде

$$\int_{(-\pi)^n} (p(k) q(k), \bar{p}(k)) dk > 0, \quad (3.7)$$

где $p(k) = \sum_{s \in V} z_s e^{i \langle k, s \rangle}$, $z_s \neq 0$, $s \in V$, $V \in V^*$.

Отсюда следует (см. [5], § 5), что матричная функция $q(k)$ имеет почти всюду строго положительно определенные значения. В дальнейшем будем рассматривать только потенциалы, для которых выполнено условие (3.7). Выражение (3.4) перепишем в виде

$$P_V^{(h, U)}(\hat{x}_V/x) = [(2\pi)^{|V|} \det U_V]^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{t, s \in V} (U(t-s)(x_t - a_t^V(x)), x_s - a_s^V(x)) \right\}, \quad (3.8)$$

где $\det U_V$ — это детерминант матрицы $U_V = \{U_V(t-s), t, s \in V\}$, а $a_t^V(x)$, $t \in V$ определяются из системы линейных уравнений

$$\sum_{t \in V} U(t-s) a_t^V(x) + \sum_{t \in Z^* \setminus V} U(t-s) x_t = -h, s \in V. \quad (3.9)$$

Будем называть векторное случайное поле с р.в. $P(h, U)$ — гиббсовским, если

$$P(Y(U)) = 1, \quad (3.10)$$

при любом $V \in V^*$ существует условная плотность $P_V(\cdot/x)$ и для P почти всех $x \in X$ и $P_V(\cdot/x)$ — почти всех $\hat{x}_V \in (R^n)^V$

$$P_V(\hat{x}_V/x) = p_V^{(h, U)}(\hat{x}_V/x). \quad (3.11)$$

Пусть $A(h, U) \subseteq X$ — множество всех функций $a = (a_i, i \in Z^v) \in X$ таких, что

$$\sum_{i \in Z^v} U(t-s) a_i = h, \quad s \in Z^v. \quad (3.12)$$

Будем называть сверткой $P = P_1 * P_2$ двух р.в. случайных полей р.в.

$$P(A) = \int_A P_1^a(A) P_2(da), \quad A \in \mathcal{B}, \quad (3.13)$$

где $P_1^a(A) = P_1(A - a)$, $A \in \mathcal{B}$.

Положим (см. (3.6))

$$f(k) = (2\pi)^{-v} [q(k)]^{-1}. \quad (3.14)$$

Если

$$\int_{(-\pi\pi)^v} sp [q(k)]^{-1} dk < \infty, \quad (3.15)$$

то существует стационарное гауссовское поле с параметрами $(0, f)$. Его р.в. будем обозначать через P^f .

Теорема. Для того, чтобы совокупность (h, U) -гиббсовских полей была не пуста необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.15) и множество $A(h, U)$ было не пусто. При этом р.в. P будет (h, U) -гиббсовским в том и только том случае, когда

$$P = P^f * P^1, \quad (3.16)$$

где р.в. P^1 такое, что

$$P^1(A(h, U)) = 1. \quad (3.17)$$

Доказательство. Проверим, что при условии (3.15) р.в. P^f является $(0, U)$ -гиббсовским. Из (3.1) следует условие (2.15) и повторно из предположений 2.2 и 2.3 и формулы (2.20) следует, что существует индуцированная состоянием P^f условная плотность

$$P_{i, i_1}^f(\hat{x}_i/x) = [(2\pi)^v \det \sigma^2]^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} ((\sigma^2)^{-1} (\hat{x}_i - d_{i, i_1}), (\hat{x}_i - d_{i, i_1})) \right\}, \quad (3.18)$$

где

$$\sigma^2 = (U(0))^{-1} \quad (3.19)$$

и

$$d_{i, i_1}(x) = -\sigma^2 \sum_{s \neq i} U(s-i) \xi_s(x), \quad (3.20)$$

где ряд сходится в слабом смысле в пространстве L . Так как ряды $\sum_{i \neq j} U(t-s) \delta_j e^{i(k, t)}$, где $\delta_j = (0 \dots 1 \dots 0)$, $j = 1, \dots, n$ сходятся в пространстве $L_2(F)$, то ряд в (3.20) сходится в сильном смысле. Далее, среднее значение по мере P^f

$$E_f \left(\sum_{i \in Z^v} \|U(t-s)\| \|\xi_i(x)\| \right) \leq K \sum_{i \in Z^v} \|U(t-s)\| < \infty \quad (3.21)$$

и поэтому верна (3.10) и формула (3.20) верна в смысле сходимости при почти всех по мере P^f значений $x \in X$. Тогда почти всюду

$$p_{\{i\}}^{(0, U)}(\widehat{x}_i/x) = [(2\pi)^n \det \sigma^2]^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left((\sigma^2)^{-1} \widehat{x}_i - d_{i, \{i\}}(x), (\widehat{x}_i - d_{i, \{i\}}(x)) \right) \right\}. \quad (3.22)$$

Тем самым проверено условие (3.11) при $V = \{i\}$, но отсюда следует его выполнение и при всех $V \in V^*$ (ср. [1], предложение 3.2).

Сдвиг $P^{f, a}(\widehat{x}_V/x)$ р.в. P^f при условии (3.15) имеет условные плотности вида

$$P_V^{f, a}(\widehat{x}_V/x) = P_V^f(\widehat{x}_V - a_V/x - a), \quad \widehat{x}_V \in (R^n)^V, V \in V^*. \quad (3.23)$$

Из формулы (3.3) следует, что при условии (3.12) разность $H_V^{(h, U)}(\widehat{x}_V/x) - H_V^{(h, U)}(\widehat{x}_V - a_V/x - a)$ не зависит от $\widehat{x}_V$ и поэтому

$$p_V^{(h, U)}(\widehat{x}_V/x) = p_V^{(h, U)}(\widehat{x}_V - a_V/x - a) \widehat{x}_V \in (R^n)^V, x \in X. \quad (3.24)$$

Выполнение условия (3.10) для $P^{f, a}$ следует из выполнения этого условия для P^f и из того, что ряд в (3.12) сходится абсолютно.

Тогда из формул (3.23) и (3.24) вытекает, что при условии (3.12) поле с р.в. $P^{f, a}$ является (h, U) -гиббсовским. Отсюда следует, что поле с р.в. вида (3.16) это р.в. (h, U) -гиббсовских полей.

Покажем теперь, что условие (3.15) необходимо для существования (h, U) -гиббсовских полей. Пусть потенциал таков, что интеграл в (3.15) расходится. Обозначим через $b_{j, V}(t)$, $t \in V$, $j = 1, \dots, n$ диагональные элементы матрицы, обратной к матрице $\{U(t-s), s, t \in V\}$, т. е. дисперсии случайных величин $\xi_j, t = x_j, t$, задаваемых плотностью р.в. (3.8). Положим

$$q^m(k) = \frac{1}{m} I_n + q(k), \quad k \in (-\pi\pi]^n, m = 1, 2, \dots, \quad (3.25)$$

где I_n — это $n \times n$ -единичная матрица. Обозначим через $p_V^{(h, U^m)}$ плотность р.в., задаваемую формулой (3.8), в которой коэффициенты $U(t-s)$ заменены на $U^m(t-s)$, где $U^m(t)$, $t \in Z^n$ — это коэффициенты Фурье функций $q^m(k)$, $k \in (-\pi\pi]^n$, а через $b_{j, V}^m$ — дисперсии случайных величин x_j, t , задаваемые плотностями р.в. $p_V^{(h, U^m)}$. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_{j, V}^m(t) = b_{j, V}(t), \quad t \in V, V \in V^*, j = 1, \dots, n. \quad (3.26)$$

Из доказанной части теоремы следует, что

$$b_{j, V}^m(t) = B_V^{f, m}(t, t),$$

где $f^m(k) = \frac{1}{2\pi^n} [q^m(k)]^{-1}$, а f_{jj}^m — j -ый диагональный элемент матрицы $f^m(k)$, $k \in (-\pi\pi]^n$.

Из (3.25) следует (см. [9], § 4.12), что

$$f_{jj}^m(k) \leq f_{jj}^{m+1}(k), \quad k \in (-\pi, \pi]^n. \quad (3.28)$$

Тогда (см. [1], лемма 4.2) последовательность $b_{j,v}^m(t)$ монотонно возрастает по m и тогда из (3.26) следует, что

$$b_{j,v}(t) \geq b_{j,v}^m(t), \quad t \in V, \quad V \in V^*. \quad (3.29)$$

Для р.в. P^m из предложения 2.4 вытекает, что

$$\lim_{V \rightarrow \infty} b_{j,v}^m(t) = B_{(j,v)}^P \int_{(-\pi\pi)^n} f_{jj}^m(k) dk. \quad (3.30)$$

Тогда из (3.26), (3.29) и из того, что интеграл в (3.15) расходится, следует, что для некоторого j , $j=1, \dots, n$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} b_{j,v}(t) = \infty. \quad (3.31)$$

Пусть теперь P — это некоторое (h, U) -гиббсовское р.в. Тогда из формул (3.11) и (3.8) следует, что при любом $V \in V^*$, $t \in V$ случайная величина

$$\xi_t(x) = a_t^V(x) + J_t^V(x), \quad (3.32)$$

где $J_t^V(x) = \xi_t(x) - a_t^V(x)$ имеет гауссовское р.в. со средним 0 и ковариационной матрицей $b_v(t)$ и слагаемые в (3.32) независимы. Ясно, что

$$P(|\xi_{j,t}| > (b_{j,v}(t))^{1/2}) \geq P(J_{j,t}^V > (b_{j,v}(t))^{1/2}), \quad (3.33)$$

где $\xi_{j,t}$ и $J_{j,t}^V$ — j -ые компоненты соответственно ξ_t и J_t^V и левая часть этого неравенства представляет собой константу, не зависящую от $V \in V^*$. Но это противоречит тому, что $P(|\xi_{j,t}| > c) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$. Это противоречие доказывает необходимость условия (3.15).

Пусть теперь условие (3.15) выполняется.

Предложение 3.1. Любое регулярное (h, U) -гиббсовское поле с р.в. P является гауссовским ковариационно-стационарным полем со спектральной плотностью $f(k)$ и средним значением a_t^P таким, что $(a_t^P, t \in Z^n) \in A(h, U)$.

Доказательство. Пусть $\chi_P(\varphi)$ — характеристический функционал этого поля. Для каждого $V \in V^*$ и каждого $x \in X$ рассмотрим

$$\begin{aligned} \chi_{V,x}(\varphi) &= \int_{(R^n)^V} \exp \left\{ i \sum_{t \in V} (\varphi(t), \hat{x}_t) \right\} P_{V^{(h,U)}}(\hat{x}_V/x) d\hat{x}_V = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{s,t \in V} (b_v(s,t) \varphi(s), \varphi(t)) + i \sum_{t \in V} (\varphi(t), a_t^V(x)) \right\}, \quad \varphi \in \Phi, \\ &\quad x \in X, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где $B_v = \{b_v(t,s), t,s \in V\}$ — матрица обратная к матрице $U_v = \{U(t-s), s,t \in V\}$ и $\{a_t^V(x), t \in V\}$ — решения уравнения (3.9). Из

условия (3.11) (см. [8], 7.4) следует, что при любом $\varphi \in \Phi$ и почти всех по мере P значений $x \in X$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \chi_{V,x}(\varphi) = \chi_P(\varphi). \quad (3.35)$$

Из предложения 2.4 имеем

$$\lim_{V \rightarrow \infty} b_V(s, t) = B^{P'}(s, t), \quad s, t \in Z'. \quad (3.36)$$

Тогда из (3.34) и (3.35) следует, что для почти всех по мере P значений $x \in X$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} a_t^V = a_t^P, \quad t \in Z', \quad (3.37)$$

где a_t^P — некоторые константы.

Покажем, что $(a_t^P, t \in Z') \in A(h, U)$. Из условия (3.10) следует, что ряд в (3.2) сходится с вероятностью 1 относительно меры P и так как из такой сходимости гауссовских величин вытекает их сходимость в среднем, то ряды в (3.2) сходятся в среднем по мере P . Из формулы (2.1) видно, что ряды в (3.12) сходятся. Из сходимости ряда (3.2), условия (3.1) и ковариационно-стационарности поля следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{t \in Z'} \|U(t-s)\| \int_X \|K_t(x)\| P(dx) &\leq \sum_{t \in Z'} \|U(t-s)\| \|a_t^P\| + \\ &+ \sum_{t \in Z'} \|U(t-s)\| \int_X \|K_t^P(x)\| P(dx) < \infty. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Формула (3.8) и условие (3.11) позволяют писать для почти всех $x \in X$

$$a_t^V(x) = E_P(\xi_t / B_{Z' \setminus V}), \quad t \in V, \quad V \in V'. \quad (3.39)$$

Тогда (см. [12], разд. 2)

$$\int_X \|a_t^V(x)\| P(dx) \leq \int_X \|K_t(x)\| P(dx), \quad t \in V, \quad V \in V'. \quad (3.40)$$

и из (3.38) следует, что каждый из рядов

$$\sum_{s \in Z'} U(t-s) \hat{a}_s^V(x), \quad s \in Z',$$

где $\hat{a}_t^V = a_t^V$, $t \in V$ и $\hat{a}_t^V = x_t$, $t \in Z' \setminus V$, сходятся в среднем по мере P равномерно относительно $V \rightarrow \infty$ в смысле сходимости по мере P , при условии (3.37), откуда получим (3.12). Предложение 3.1 доказано.

К завершению доказательства теоремы остается добавить, что любое (h, U) -гиббсовское поле может быть получено как взвешенное интегральное среднее регулярных (h, U) -гиббсовских полей (см. [10], § 2).

Մ. Հ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Վեկտորական գաուսյան զիբրյան պատահական դաշտեր (ամփոփում)

Դորբրուշինի հոդվածում [1] տրված է սկալյար գաուսյան պատահական դաշտերի նկարագրությունը զիբրյան պոտենցիալների տերմիններով: Այս հոդվածում ընդհանրացվում են այդ արդյունքները վեկտորական գաուսյան դաշտերի համար:

M. H. AVETISYAN. *Vector gaussian gibbsian random fields* (summary)

In the Dobrushin's paper [1] a description of gaussian random fields in terms of gibbsian potentials was given for scalar fields. Here we generalise these results to the case of vector gaussian random fields.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. L. Dobrushin. Gaussian random Fields—Gibbsian point of view, Multicomponent random systems, Advance in Probab. and relat. topics, vol. 6, Marcel. Bekker Inc. N. Y., Basel, 1980.
2. Ю. А. Розанов. Стационарные случайные процессы, Физматгиз, 1963.
3. И. И. Гухман. А. В. Скороход. Теория случайных процессов, «Наука», 1971.
4. Ю. А. Розанов. О гауссовских полях с заданными условными распределениями. Теория вер. и её примен., XII, 3, 1967, 165—202.
5. H. Helson, D. Loundenslager. Prediction theory and Fourier series in several variables, Acta Math., 99, 3—4, 1958.
6. А. М. Ялом. Введение в теорию стационарных случайных функций, УМН, 7 (5), 1952, 3—168.
7. S. C. Chay. H. On Qausi-Markov random Fields, J. of Multiv. Anal., 2, № 1, 1972, 14—76.
8. Дж. Л. Дуб. Вероятностные процессы, ИИЛ, 1956.
9. Р. Беллман. Введение в теорию матриц, «Наука», 1976.
10. C. Preston. Random fields, Lect. Notes Math., № 534. Springer, Berlin, 1976.
11. H. Kunsch. Thermodynamics and statistical analysis of Gaussian random fields (препринт).
12. П. А. Майер. Вероятность и потенциалы, «Мир», 1973.
13. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, «Мир», 1965.
14. М. Г. Аветисян, Р. Л. Добрушин. Условие линейной регулярности векторных случайных полей (препринт).