ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 4, 1983 Математика

УДК 519.6

Б. Н. ПШЕНИЧНЫЙ, Р. А. ХАЧАТРЯН

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

В этой работе строятся необходимые условия экстремума для задач с негладким ограничением типа равенства. Локальные свойства функций описываются верхней выпуклой аппроксимацвий, определение которой дается ниже. Для данной функции верхняя выпуклая аппроксимация определяется неоднозначно. Но чем полнее описан класс верхних выпуклых аппроксимаций, тем содержательнее оказываются необходимые условия экстремума.

§ 1. Определения и обозначения

Рассмотрение ведется в конечномерном пространстве X, элементы которого обозначаются x, y и т. п. X^* — пространство непрерывных линейных функционалов с элементами x^*, y^* и т. п. $\langle x^*, x\rangle$ — значение функционяла x^* на элементе x. Con M, lin M, dim M, cl M, ri$M$, FrM—соответственно коническая оболочка, несущее подпространство, размерность, замыкание, относительная внутренность, относительная граница выпуклого множества $M\subset X$. Пусть A и B—две точки пространства X. Тогда $\underline{AB}$ — прямая, проходящая через точки A и B $\overline{AB}$ — луч, исходящий из точки A и проходящий через точку B:

$[A; B]$— отрезок, соединяющий точки A и B.

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая может принимать как конечные значения, так и значения $+\infty$, $-\infty$. Множество точек, в которых значение $f(x)$ конечно, обозначается через dom f;

$$\text{dom}\, f=\{x\in X/|f(x)|<+\infty\}.$$

Определение 1. Пусть $x\in \text{dom}\, f$. Тогда для $\bar{x}\neq 0$

$$F(x, \bar{x})=\lim_{\lambda\downarrow 0}\sup_{\bar{y}\to\bar{x}}\frac{f(x+\lambda\bar{y})-f(x)}{\lambda}.$$

Определение 2. Функция f в точке $x\in\text{dom}\, f$ допускает верхнюю выпуклую аппроксимацию (в дальнейшем в.в.а), если

а) $h(x, \bar{x})\geqslant F(x, \bar{x})$,

в) $h(x, \bar{x})$ как функция $\bar{x}$ выпукла, положительно однородна и замкнута.

Определение 3. Если $h(x, \bar{x})$ есть в.в.а. для f в точке x, то множество $\partial h(x, 0)=\{x^*\in X^*/h(x, \bar{x})\geqslant\langle x^*, \bar{x}\rangle,\ \bar{x}\in X\}$ называется субдифференциалом функции f в точке x и обозначается $\partial f(x)$.

Важно отметить, что в.в.а. и субдифференциал определяются неоднозначно. В этом есть свои положительные стороны, которые будут более ясны из дальнейшего изложения. Легко доказываются следующие леммы.

Лемма 1. *Если $h(x, \bar{x})$ есть в.в.а. для f в точке x, то существует функция $r(\bar{x})$ такая, что*

$$f(x+\bar{x}) \leqslant f(x) + h(x, \bar{x}) + r(\bar{x}),$$

$\lim\limits_{\bar{x}\to 0} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} = 0$, *где $\|\cdot\|$ — евклидова норма пространства X.*

Положим $f^+(x) \equiv f(x)$, $f^-(x) \equiv -f(x)$. Величины, относящиеся к f^+ и f^-, будем обозначать соответствующим индексом „+" или „−".

Лемма 2. *Если $h^+(x_0, \bar{x})$, $h^-(x_0, \bar{x})$ — в.в.а. для f^+ и f^- в точке x_0, то*

$$h^+(x_0, \bar{x}) + h^-(x_0, \bar{x}) \geqslant 0, \ \bar{x} \in X.$$

Лемма 3. *Пусть $K = \{\bar{x} / h^+(x_0, \bar{x}) \leqslant 0, \ h^-(x_0, \bar{x}) \leqslant 0\}$. Тогда* $K^* = -\mathrm{cl}\,\{\mathrm{con}\,\partial f^+(x_0) + \mathrm{con}\,\partial f^-(x_0)\}$.

В дальнейшем при получении необходимых условий экстремума используем следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. Пусть x_0 — точка минимума функции $f(x)$ на множестве M, $K_M(x_0)$ — конус касательных направлений к множеству M в точке x_0. Пусть $h(x_0, x)$ есть в.в.а. для функции f в точке x_0. Тогда, если $\mathrm{ri}\,\mathrm{dom}\,h(x_0, \cdot) \cap K_M(x_0) \neq \varnothing$, то

$$\partial f(x_0) \cap K^*_M(x_0) \neq \varnothing.$$

§ 2. Основная теорема о локальном шатре

Пусть теперь $f(x)$ — некоторая функция, обращающаяся в нуль в точке x_0. Нас будет интересовать построение конуса касательных направлений к множеству $M = \{x / f(x) = f(x_0) = 0\}$ в точке x_0.

Теорема 2. *Пусть h^+ и h^- — в.в.а. для f^+ и f^- в точке x_0 и выполняются следующие условия:*

а) *существует вектор $W \in X$ такой, что*

$$h^+(x_0, W) < 0, \ h^-(x_0, -W) < 0,$$

б) *$h^+(x, W)$ — полунепрерывна сверху по x в точке x_0.*

в) *f — непрерывна в некоторой окрестности точки x_0.*

Тогда выпуклый конус $K = \{\bar{x} / h^+(x_0, \bar{x}) \leqslant 0, \ h^-(x_0, \bar{x}) \leqslant 0\}$ является локальным шатром [1] к множеству M в точке x_0.

Доказательство. Так как предполагается, что X конечномерно, то согласно лемме 2 имеем

$$f^+(x_0 + x) \leqslant h^+(x_0, \bar{x}) + r^+(\bar{x})$$

для некоторой функции $r^+(\bar{x})$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{\bar{x}\to 0} \frac{r^+(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} = 0. \text{ Положим } p^+(\lambda) = \sup\{r^+(\bar{x}) / \|\bar{x}\| \leqslant \lambda\}.$$

Ясно, что $p^+(\lambda)$ монотонно не убывает и $p^+(\lambda)/\lambda \to 0$ при $\lambda \downarrow 0$ и $r^+(\bar{x}) \leqslant p^+(\|\bar{x}\|)$. Поэтому для $\bar{x} \in K$, $\gamma > 0$ получаем

$$f^+(x_0 + \bar{x} + \gamma \|\bar{x}\| W) \leqslant h^+(x_0, \bar{x} + \gamma \|\bar{x}\| W) +$$

$$+ p^+(\|\bar{x}\| + \gamma \|\bar{x}\| \cdot \|W\|) < h^+(x_0, \bar{x}) + \gamma \|\bar{x}\| h^+(x_0, W) +$$

$$+ p^+(\|\bar{x}\|(1 + \gamma \|W\|)) = \|\bar{x}\| \left[\gamma h^+(x_0, W) + \frac{p^+((1 + \gamma \|W\|)\|\bar{x}\|)}{\|\bar{x}\|} \right].$$

Выберем теперь δ_γ^+ настолько малым, чтобы выражение, выделенное в квадратных скобках, было меньше, чем

$$1/2\, \gamma\, h^+(x_0, W) \text{ при } \|\bar{x}\| \leqslant \delta_\gamma^+. \text{ Тогда}$$

$$f^+(x_0 + \bar{x} + \gamma \|\bar{x}\| W) \leqslant 1/2\, \gamma\, h^+(x_0, W) \|\bar{x}\| < 0.$$

Аналогично, нетрудно получить оценку

$$f^-(x_0 + \bar{x} - \gamma \|\bar{x}\| W) \leqslant \|\bar{x}\|\, 1/2\, \gamma h^-(x_0, -W) < 0$$

при $\|\bar{x}\| \leqslant \delta_\gamma^-$.

Из этих двух оценок следует, что

$$f(x_0 + \bar{x} + \gamma \|\bar{x}\| W) < 0,$$

$$f(x_0 + \bar{x} - \gamma \|\bar{x}\| W) > 0$$

при $\|\bar{x}\| < \delta_\gamma = \min\{\delta_\gamma^-, \delta_\gamma^+\}$.

Рассмотрим теперь функцию $q(\omega) = f(x_0 + \bar{x} + \omega \|\bar{x}\| W)$. Имеем $q(\gamma) < 0$, $q(-\gamma) > 0$. Так как $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0, то при достаточно малых $\bar{x}$ непрерывна будет и функция $q(\omega)$. Поскольку $q(\omega)$ на отрезке $[-\gamma, +\gamma]$ меняет знак, то в некоторой точке $\omega(\bar{x}) \in [-\gamma, +\gamma]$ она обращается в нуль. Итак, для некоторого $\gamma > 0$ существует $\delta_\gamma > 0$ такое, что

$$f(x_0 + \bar{x} + \|\bar{x}\| W(\bar{x})\, w) = 0, \ |\omega(\bar{x})| \leqslant \gamma \ \ \|\bar{x}\| \leqslant \delta_\gamma.$$

Заметим теперь, что

$$\limsup_{\Delta \downarrow 0} \frac{q(\omega + \Delta) - q(\omega)}{\Delta} = \limsup_{\Delta \downarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + \bar{x} + (\omega + \Delta)\|\bar{x}\| W)}{\Delta} - \right.$$

$$\left. - \frac{f(x_0 + \bar{x} + \omega \|\bar{x}\| W}{\Delta} \right] \leqslant \|\bar{x}\| h^+(x_0 + \bar{x} + \omega \|\bar{x}\| W, W).$$

Поэтому в силу полунепрерывности сверху функции $h^+(x, W)$ по x в точке x_0 и условия $h^+(x_0, W) < 0$, имеем

$$\limsup_{\Delta \downarrow 0} \frac{q(\omega + \Delta) - q(\omega)}{\Delta} < 0.$$

при достаточно малых $\bar{x}$.

Отсюда следует, что $q(\omega)$ монотонно убывает и, следовательно, на отрезке $[-\gamma, +\gamma]$ имеет единственный корень. Поэтому функция $\omega(\bar{x})$ для достаточно малых $\bar{x}$ определяется однозначно. Из $|\omega(\bar{x})| \leqslant \gamma$ и $\|\bar{x}\| \leqslant \delta_\gamma$ следует, что $\omega(\bar{x}) \to 0$ при $\bar{x} \to 0$. Покажем теперь, что в некоторой окресности нуля $\omega(\bar{x})$ непрерывна. Допустим противное. Так как $\omega(x)$ ограничена в некоторой окрестности нуля, то существует вектор $\bar{x}_0$ и две последовательности $\{\bar{x}_i\}$, $\{\bar{y}_i\}$ такие, что $\omega(\bar{x}_i) \to \bar{\omega}$, $\omega(\bar{y}_i) \to \underline{\omega}$ и $\bar{\omega} \neq \underline{\omega}$. Но из непрерывности $f(x)$ в окрестности точки x_0 и в силу монотонности вытекает

$$f(x_0 + \bar{x}_0 + \bar{\omega}\|\bar{x}_0\| W) = 0,$$

$$f(x_0 + \bar{x}_0 + \underline{\omega}\|\bar{x}_0\| W) = 0,$$

$$|\bar{\omega}| \leqslant \gamma, \ |\underline{\omega}| \leqslant \gamma.$$

Но $\underline{\omega} = \underline{\omega}(x_0)$ в силу однозначности $\omega(\bar{x})$.

Таким образом, показано, что в малой окрестности нуля и при $\bar{x} \in K$ функция непрерывна по $\bar{x}$ и $\omega(\bar{x}) \to 0$,

$$f(x_0 + \bar{x} + \omega(\bar{x})\|\bar{x}\| W) = 0.$$

Пусть $\Pi(\bar{x})$ есть проекция точки $\bar{x} \in X$ на множество K. Так как K замкнуто и $0 \in K$, то $\Pi(\bar{x}) \in K$ и $\|\Pi(\bar{x})\| \leqslant \|\bar{x}\|$,

Положим $\psi(\bar{x}) = \bar{x} + \omega(\Pi(\bar{x}))\|\bar{x}\| W$.

Тогда $\psi(\bar{x})$ — непрерывная функция, определенная в окрестности нуля и такая, что

$$f(x_0 + \psi(\bar{x})) = 0, \ \bar{x} \in K, \text{ т. е.}$$

$$x_0 + \psi(\bar{x}) \in M, \quad \text{при} \quad \bar{x} \in \varepsilon S_1(0) \cap K \text{ и } \lim_{x \to 0} \frac{\|\psi(\bar{x}) - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} = 0,$$

где ε — достаточно малое положительное число, $S_1(0)$ — единичный шар с центром в начале координат. Это и означает, что K есть локальный шатер к M в точке x_0. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, при соответствующих предположениях, непосредственно следует, что множество $K = \{\bar{x}/h^+(x^0, \bar{x}) \leqslant 0, \ h^-(x_0, \bar{x}) \leqslant 0\}$ является конусом касательных направлений в точке x_0 к множеству $M = \{x/f(x) = 0\}$.

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ — конечная непрерывная выпуклая функция на X. $0 \notin \partial f(x_0)$, $x_0 \in M = \{x|f(x) = 0\}$. Пусть $\mathrm{Fr}^0\, \partial f(x_0)$ — множество таких граничных точек из $\partial f(x_0)$, через которые можно провести опорную гиперплоскость, проходящую через нуль. Тогда для $x^* \in \partial f(x_0)$*

$$K_M(x^*, x_0) = \{\bar{x} \mid f'(x_0, \bar{x}) = 0, \ \langle -x^*, \bar{x} \rangle = 0\} \neq \{0\}$$

только тогда, когда $x^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f(x_0)$.

Из-за простоты доказательство теоремы не приводим. Поскольку любая функция вида $h^-(x_0, \bar{x}) = \langle -x^*, \bar{x} \rangle$, $x^* \in \partial f(x_0)$ есть в.в.а. для вогнутой функции $f^- \equiv -f$ в точке x_0, то из доказанных теорем 2, 3 следует, что для произвольного $x^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f(x_0)$ конус

$$K_M(x_0, x^*) = \{\bar{x} | f'(x_0, \bar{x}) = 0, \langle -x^*, \bar{x} \rangle = 0\}$$

есть локальный шатер к множеству $M = \{x | f(x) = f(x_0) = 0\}$ в точке x_0. Итак, в этом случае касательный конус определен неоднозначно.

Теорема 4. *Пусть* $f(x)$ *выпукла на* X.

$$0 \bar{\in} \partial f(x_0) - x_0 \in X. \text{ Если } \dim \operatorname{con} \partial f(x_0) \geqslant 2,$$

то

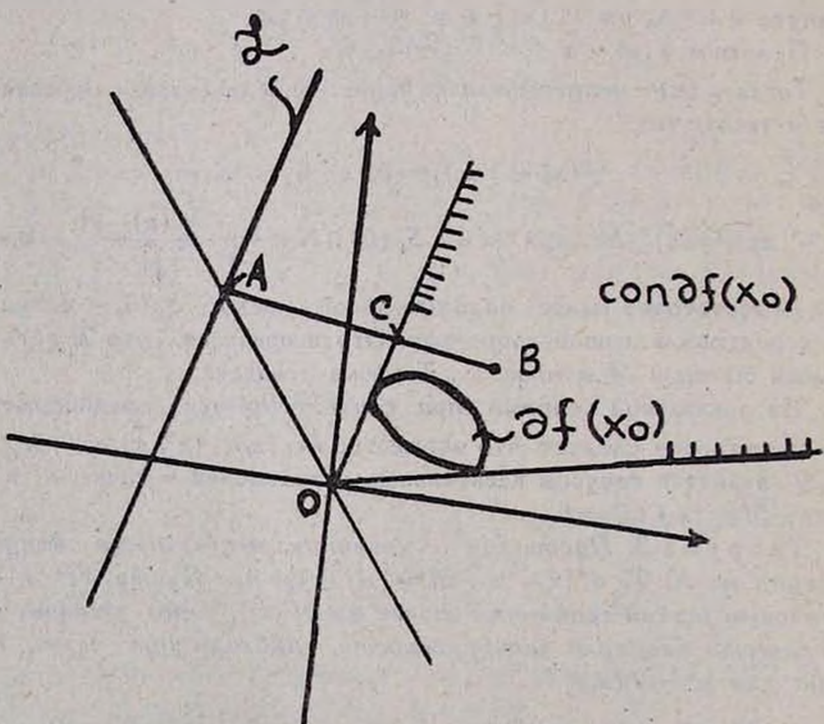
$$\bigcap_{x^* \in \mathrm{Fr}^0 \partial f(x_0)} \mathrm{cl}\,[\operatorname{con} \partial f(x_0) - \operatorname{con} x^*] = \operatorname{con} \partial f(x_0).$$

Доказательство. Заметим, что если $\dim \operatorname{con} \partial f(x_0) = 1$, то утверждение теоремы не имеет места. В частности, когда $f(x)$ дифференцируема, то утверждение теоремы неверно.

Так как $0 \in \operatorname{con} x^*$, то $\operatorname{con} \partial f(x_0) \subset \operatorname{con} \partial f(x_0) - \operatorname{con} x^*$ для произвольного $x^* \in X^*$. Отсюда

$$\operatorname{con} \partial f(x_0 \subset \bigcap_{x^* \in \mathrm{Fr}^0 \partial f(x_0)} \mathrm{cl}\,[\operatorname{con} \partial f(x_0) - \operatorname{con} x^*].$$

Покажем обратное включение. Пусть $A \bar{\in} \operatorname{con} \partial f(x_0)$. Нужно доказать, что $A \bar{\in} \operatorname{con} \partial f(x_0) - \operatorname{con} x^*$ для некоторого $x^* \in \mathrm{Fr}^0 \partial f(x_0)$. Если $A \bar{\in} \operatorname{lin} \partial f(x_0)$, то $A \bar{\in} \operatorname{con} \partial f(x_0) - \operatorname{con} x^*$ для произвольного $x^* \in \partial f(x_0)$. Остается рассмотреть случай $A \in \operatorname{lin} \partial f(x_0)$. Так как размерность конуса $\operatorname{con} \partial f(x_0)$ не меньше двух, то в относительной внутренности ко-



нуса существует точка B, не лежащая на прямой AO, где O — начало координат (рис.). Отметим, что прямая AO может пересекаться с относительной внутренностью конуса $\operatorname{con} \partial f(x_0)$. Так как луч $\overline{AB}$ целиком не принадлежит конусу (ибо $A \bar{\in} \operatorname{con} \partial f(x_0)$), то он содержит относительную граничную точку C конуса $\mathrm{con}\,\partial f(x_0)$. В силу того, что $\mathrm{con}\,\partial f(x_0)$ замкнут и $A \neq B$, то $A \neq C$ и $C \neq O$. Через точку A проведем прямую L, параллельную OC. Покажем, что прямая L не пересекается с конусом $\mathrm{con}\,\partial f(x_0)$. Действительно, допустим, что на прямой L имеется точка $D \in \mathrm{con}\,\partial f(x_0)$. Все точки O, A, B, C, D лежат в одной двумерной плоскости, причем точки A и B лежат в этой плоскости по разные стороны прямой OC. Так как AD параллельно OC, то A и D лежат по одну сторону прямой OC, следовательно точки D и B лежат по разные стороны прямой, т. е. отрезок $[D; B]$ пересекает прямую OC в некоторой точке E. Так как $D \in \mathrm{con}\,\partial f(x_0)$ и $B \in \mathrm{ricon}\,\partial f(x_0)$, то $E \in \mathrm{ricon}\,\partial f(x_0)$. Значит все точки луча $\overline{OE}$, кроме O, являются относительно внутренними точками конуса $\mathrm{con}\,\partial f(x_0)$. Так как C принадлежит прямой OE и не является внутренней, то она не прииадлежит лучу $\overline{OE}$. Это значит, что она принадлежит противоположному лучу, исходящему из O. Но тогда O есть относительно внутреняя точка конуса $\mathrm{con}\,\partial f(x_0)$. Это — противоречие. Таким образом, доказали, что существует вектор $C \in \mathrm{Fr}\,\mathrm{con}\,\partial f(x_0)$ такой, что

$$A + \lambda C \bar{\in} \mathrm{con}\,\partial f(x_0), \ \forall \lambda \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что существует вектор $x^* \in \mathrm{Fr}^0\,\partial f(x_0)$ такой, что

$$A \bar{\in} \mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\,\partial f(x_0) - \mathrm{con}\,x^*].$$

Тем более

$$A \bar{\in} \bigcap_{x^* \in \mathrm{Fr}^0\,\partial f(x_0)} \mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\,\partial f(x_0) - \mathrm{con}\,x^*].$$

Таким образом

$$\bigcap_{x^* \in \mathrm{Fr}^0 \in \partial f(x_0)} \mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\,\partial f(x_0) - \mathrm{con}\,x^*] \subset \mathrm{con}\,\partial f(x_0).$$

Теорема доказана.

§ 3. Необходимые условия экстремума

Теорема 5. *Пусть x_0—точка минимума функции $f_0(x)$ при ограничении $f_1(x)=0$, где $f_0(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, а $f_1(x)$— выпукла на X. Пусть $0 \bar{\in} \partial f_1(x_0)$. Тогда, если*

$$\dim \mathrm{con}\,\partial f_1(x_0) = 1, \ \text{то} \ 0 \in f_0'(x_0) + \mathrm{lin}\,\partial f_1(x_0),$$

если $\dim \mathrm{con}\,\partial f_1(x_0) \geqslant 2$, *то* $0 \in f_0'(x_0) + \mathrm{con}\,\partial f_1(x_0)$.

Доказательство. Легко проверить, что выполняются все предположения теоремы 2. Так что для любого $x^* \in \mathrm{Fr}^0\,\partial f_1(x_0)$ множество $K_M(x^*, x_0) = \{\bar{x} \in X / f_1'(x_0, \bar{x}) = 0, \langle -x^*, \bar{x} \rangle = 0\}$ является конусом касательных направлений к множеству $M = \{x \in X / f_1(x) = 0\}$ в точке x_0.

Согласно лемме 3

$$K_M^*(x^*, x_0) = -\mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\,\partial f_1(x_0) - \mathrm{con}\,x^*].$$

Тогда на основании теоремы 1

$$\{f_0'(x_0)\} \cap K_M^*(x^*, x_0) \neq \varnothing, \ \forall x^* \in \mathrm{Fr}^0\,\partial f_1(x_0).$$

Отсюда

$$0 \in f_0(x_0) + \bigcap_{x^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f_1(x_0)} \mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) - \mathrm{con}\, x^*].$$

Если $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) = 1$, то для любого $x^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f_1(x_0)$

$$\mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) - \mathrm{con}\, x^* = \mathrm{lin}\, \partial f_1(x_0).$$

Итак, получено первое утверждение теоремы.

Если $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) > 2$, то согласно теореме 4

$$\bigcap_{x^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f_1(x_0)} \mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) - \mathrm{con}\, x^*] = \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0).$$

Таким образом, выполнено и второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполнены все предположения теоремы 5. Тогда если $f_0(x)$ — выпукла и $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) \geqslant 2$, то точка x_0 будет и точкой минимума функции $f_0(x)$ при ограничении $f_1(x) \leqslant 0$.

Доказательство. Если $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) \geqslant 2$, согласно теореме существует число $\lambda \geqslant 0$ такое, что

$$0 \in f_0(x_0) + \lambda \partial f_1(x_0).$$

Отсюда следует, что выпуклая функция $f_0(x) + \lambda f_1(x)$ принимает свое минимальное значение на X в точке x_0, т. е.

$$f_0(x_0) + \lambda f_1(x_0) \leqslant f_0(x) + \lambda f_1(x), \ \forall x \in X.$$

Отсюда, если x такой, что $f_1(x) \leqslant 0$, то $f_0(x_0) \leqslant f_0(x)$.

Теорема 6. *Пусть x_0 — точка максимума функции $f_0(x)$ при ограничении $f_1(x) = 0$, где $f_0(x)$, $f_1(x)$ — выпуклые функции на X. Пусть $0 \notin \partial f_1(x_0)$. Тогда, если $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) = 1$, то*

$$\partial f_0(x_0) \subset \mathrm{lin}\, \partial f_1(x_0),$$

если $\dim \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) > 2$, *то*

$$\partial f_0(x_0) \subset \mathrm{con}\, \partial f_1(x_0).$$

Доказательство. Задача эквивалентна минимизации $-f_0(x)$ при ограничении $f_1(x) = 0$.

Известно, что любая функция вида $h_0(x_0, \bar{x}) = \langle -x^*, \bar{x} \rangle$,

$$x^* \in \partial f_0(x_0)$$

есть в.в.а. для $-f_0(x)$ в точке x_0, а $\{-x^*\}$, $x^* \in \partial f_0(x_0)$ есть субдифференциал f в x_0. С другой стороны, для любого $y^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f_1(x_0)$ конус

$$K_M(y^*, x_0) = \{\bar{x} \in X / f_1'(x_0, \bar{x}) = 0, \langle -y^*, \bar{x} \rangle = 0\}$$

является конусом касательных направлений к множеству $M = \{x \in X / f_1(x) = 0\}$ в точке x_0. Так что, согласно теореме 1

$$\{-x^*\} \cap K_M^*(x_0, y^*) \neq \varnothing,$$

$$\forall x^* \in \partial f_0(x_0), \ \forall y^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f_1(x_0).$$

Фиксируем $x^* \in \partial f_0(x_0)$, тогда

$$x^* \in \bigcap_{y^* \in \mathrm{Fr}^0\, \partial f_1(x_0)} \mathrm{cl}\,[\mathrm{con}\, \partial f_1(x_0) - \mathrm{con}\, y^*].$$

Отсюда, если $\dim \operatorname{con} \partial f_1(x_0) = 1$, то $x^* \in \operatorname{lin} \partial f_1(x_0)$.
Так как x^* — произвольная точка из $\partial f_0(x_0)$, то

$$\partial f_0(x_0) \subset \operatorname{lin} \partial f_1(x_0).$$

Если $\dim \operatorname{con} \partial f_1(x_0) > 2$, то согласно теореме 4

$$\bigcap_{y^* \in \mathrm{Fr}^* \partial f_1(x_0)} \operatorname{cl}\left[\operatorname{con} \partial f_1(x_0) - \operatorname{con} y^*\right] = \operatorname{con} \partial f_1(x_0).$$

Итак, для произвольного $x^* \in \partial f_0(x_0)$, $x^* \in \operatorname{con} \partial f_1(x_0)$. Отсюда $\partial f_0(x_0) \subset$ $\subset \operatorname{con} \partial f_1(x_0)$.

Теорема доказана.

Институт кибернетики
АН Украинской ССР

Поступила 6.X.1981

Բ. Ն. ՊՇԵՆԻՉՆԻ, Ռ. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Ոչ ողորկ ֆունկցիաների համար էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանների մասին (*ամփոփում*)

Այս աշխատանքում ստացվել են էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններ մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրների համար, որոնցում սահմանափակումները տրված են ոչ ողորկ ֆունկցիաներով։

B. N. PSHENICHNY, R. A. KHACHATRIAN. *On necessary conditions of extremum for nonsmooth functions* (summary)

In the paper necessary conditions of extremum for the problems of mathematical programming with nonstraints of equality type are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Н. Пшеничный*. Выпуклый анализ и экстремальные задачи, М., «Наука», 1980.
2. *В. Г. Болтянский*. Метод шатров в теории экстремальных задач, УМН, 33, № 6, 1975, 3—55.
3. *F. H. Clarke*. A new approach to lagrange multipliers, Mathematics of operations research, Vol. 1, № 2, 1976, 165—174.
4. *Р. Рокафеллар*. Выпуклый анализ, М., «Мир», 1973.