ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVIII, № 4, 1983 Математика

УДК 517.53

С. Е. РУКШИН

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КРАТНОСТЯМИ В КОНЕЧНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Результаты работ Л. Карлесона [1], Шапиро и Шилдса [2] об интерполяции значениями аналитических функций классов H^∞ и H^p в круге многократно обобщались в различных направлениях.

Значительные успехи были достигнуты в решении кратных интерполяционных задач. Так, с помощью биортогональных систем М. М. Джрбашяна в работах [3—5] было дано полное и эффективное решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классах H^p в круге и полуплоскости, а Г. М. Айрапетян [6] и В. И. Васюнин [7] показали, что в случае неограниченных кратностей никакая задача интерполяции с идеальным пространством данных неразрешима. Однако, если вместо значений функции и ее производных в качестве данных интерполяции брать ростки аналитических функций, то, как было доказано Н. К. Никольским [8], неограниченные кратности вполне допустимы.

Структура же интерполяционных множеств в многосвязных областях сравнительно мало изучена. Л. Карлесон и П. Бьерлинг [9] сформулировали в терминах функции Грина необходимое и достаточное условие для разрешимости интерполяции с простыми узлами в классе H^∞ в конечносвязной области, а Стаут [10] доказал, что интерполяционная в конечносвязной области последовательность разбивается на несколько интерполяционных последовательностей, сгущающихся к различным граничным компонентам области.

Настоящая работа посвящена обобщению некоторых результатов о кратной интерполяции на случай конечносвязных областей.

Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность Н. А. Широкову за постановку задач и внимание к работе.

2. Пусть D — конечносвязная область комплексной плоскости, ограниченная кривыми $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$; D_m — односвязная область, ограниченная Γ_m и содержащая D; $H^\infty(D)$ — класс Харди ограниченных аналитических в D функций; $S=\{z_p, k_p\}$ — последовательность точек области D, снабженных кратностями $k_p > 1$; $S=S_1 \cup \cdots \cup S_n$ — произвольное разбиение S на подпоследовательности $S_m=\{z_{mp}, k_{mp}\}$, имеющие точки сгущения только на соответствующем контуре Γ_m; $g_D(z, t)$ — функция Грина области D с полюсом в точке t.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Следующие утверждения равносильны:*

1°. *Для любого ограниченного по норме набора функций $\{f_p\}$ из $H^\infty(D)$ существует функция $f \in H^\infty(D)$ такая, что*

$$f^{(k)}(z_p)=f_p^{(k)}(z_p)\ (p>1,\ 0<k<k_p).$$

2°. *Для любой последовательности* $\{\lambda_p\}$ *из* l^∞ *существует функция* $f\in H^\infty(\mathrm{D})$ *такая, что*

$$f(z_p)=\lambda_p,\ f^{(k)}(z_p)=0\ (p>1,\ 1\leqslant k<k_p).$$

3°. *Существует постоянная* $M<+\infty$ *и семейство функций* $\{f_p\}$ *из* $H^\infty(\mathrm{D})$ *такие, что* $\|f_p\|_\infty\leqslant M$,

$$f_p(z_q)=\begin{cases}1, & p=q\\ 0, & p\neq q\end{cases},\ f_p^{(k)}(z_q)=0\ (p,\ q\geqslant 1,\ 1\leqslant k<k_p).$$

4°. *Существует постоянная* $C<+\infty$ *такая, что при любом* $z\in\mathrm{D}$

$$\sum_{p>1}k_p\, g_{\mathrm{D}}(z,\ z_p)\leqslant C+\sup_{p>1}\ k_p\, g_{\mathrm{D}}(z,\ z_p).$$

5°. *При любом* m *для произвольного ограниченного по норме набора функций* $\{f_p\}$ *из* $H^\infty(\mathrm{D}_m)$ *существует функция* $f\in H^\infty(\mathrm{D}_m)$ *такая, что*

$$f^{(k)}(z_{mp})=f_p^{(k)}(z_{mp})\ (p>1,\ 0\leqslant k<k_{mp}).$$

6°. *При любом* m *для произвольной последовательности* $\{\lambda_p\}$ *из* l^∞ *существует функция* $f\in H^\infty(\mathrm{D}_m)$ *такая, что*

$$f(z_{mp})=\lambda_p,\ f^{(k)}(z_{mp})=0\ (p>1,\ 1\leqslant k<k_{mp}).$$

7°. *При любом* m *существует постоянная* $C_m<+\infty$, *такая, что при всех* $z\in\mathrm{D}_m$

$$\sum_{p>1}k_{mp}\, g_{\mathrm{D}_m}(z,\ z_{mp})\leqslant C_m+\sup_{p>1}\ k_{mp}\, g_{\mathrm{D}_m}(z,\ z_{mp}).$$

Доказательство. Равносильность условий 5°,6° и 7° следует из результатов В. И. Васюнина [11] и Н. К. Никольского [8] для единичного круга и конформной инвариантности функции Грина. Дальнейшее доказательство проведем по схеме 1° => 2° => 3° => 7° => 4° => => 7° => 1°.

Импликация 1° => 2° очевидна.

2° => 3°. Рассмотрим банахово пространство

$$H_S^\infty(\mathrm{D})=\{f\in H^\infty(\mathrm{D}): f^{(k)}(z_p)=0\ (p\geqslant 1,\ 1\leqslant k<k_p)\}$$

и линейный оператор R, сопоставляющий функции $f\in H_S^\infty(\mathrm{D})$ последовательность $\{f(z_p)\}$. Ясно, что $\|R\|\leqslant 1$ и в силу условия 2° R отображает $H_S^\infty(\mathrm{D})$ на всё l^∞. Тогда R индуцирует ограниченный взаимнооднозначный оператор R', отображающий $H_S^\infty(\mathrm{D})/\mathrm{Ker}\, R$ на l^∞, и по следствию из теоремы об открытом отображении (см. [12]) R' имеет ограниченный обратный. Отсюда следует, что существует постоянная $M<+\infty$ такая, что для любой последовательности $\lambda=\{\lambda_p\}$ из l^∞ существует функция $f\in H_S^\infty(\mathrm{D})$, для которой $f(z_p)=\lambda_p$ при всех $p\geqslant 1$ и $\|f\|_\infty\leqslant M\|\lambda\|_\infty$. В частности, для каждого $p\geqslant 1$ найдется функция $f_p\in H_S^\infty(\mathrm{D})$ такая, что $\|f_p\|_\infty\leqslant M$.

$$f_p(z_q)=\begin{cases}1, & p=q\\ 0, & p\neq q\end{cases}\quad (p,\ q\geqslant 1).$$

$3°\Rightarrow 7°$. При каждом m построим контур γ_m, гомотопный Γ_m, так, чтобы подпоследовательность S_m лежала в двусвязной области K_m, ограниченной γ_m и Γ_m, а подпоследовательность S_l, при $l\neq m$ — вне ее. Рассмотрим конформное отображение φ_m области D_m на единичный круг. Пусть $\zeta_{mp}=\varphi_m(z_{mp})$,

$$b_{mp}(\zeta)=\left(\frac{|\zeta_{mp}|}{\zeta_{mp}}\cdot\frac{\zeta_{mp}-\zeta}{1-\zeta\bar{\zeta}_{mp}}\right)^{k_{mp}},\quad B_{mp}(\zeta)=\prod_{\substack{q\geqslant 1\\ q\neq p}} b_{mq}(\zeta),$$

$$B_m(\zeta)=B_{mp}(\zeta)\,b_{mp}(\zeta),\quad \overset{*}{b}_{mp}(z)=b_{mp}(\varphi_m(z)),$$

$$\overset{*}{B}_{mp}(z)=B_{mp}(\varphi_m(z)),\quad \overset{*}{B}_m(z)=B_m(\varphi_m(z)).$$

Рассмотрим семейство функций $f_{mp}\in H_S^\infty(D)$ таких, что

$$\|f_{mp}\|_\infty\leqslant M,\quad f_{mp}(z_{lq})=\begin{cases}1, & m=l,\ p=q\\ 0, & m\neq l \text{ или } p\neq q.\end{cases}$$

Оно существует, так как выполнено условие 3°.

Ясно, что в $H^\infty(K_m)$ $\overset{*}{B}_{mp}$ делит f_{mp}, а $\overset{*}{b}_{mp}$ делит $f_{mp}-1$. Из того, что все нули $\overset{*}{B}_m$ лежат в области K_m, следует, что

$$\varepsilon_m=\inf_{z\in\gamma_m}|\overset{*}{B}_m(z)|>0,$$

откуда

$$|f_{mp}(z)-1|=\frac{|f_{mp}(z)-1|}{|\overset{*}{b}_{mp}(z)|}\,|\overset{*}{b}_{mp}(z)|\leqslant\left\|\frac{f_{mp}-1}{\overset{*}{b}_{mp}}\right\|_{H^\infty(K_m)}\cdot|\overset{*}{b}_{mp}(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M+1}{\varepsilon_m}\,|\overset{*}{b}_{mp}(z)|\ \text{при } z\in K_m.$$

Пусть

$$\Delta_{mp}=\left\{z\in D_m:\ |\overset{*}{b}_{mp}(z)|\leqslant\frac{\varepsilon_m}{2(M+1)}\right\}.$$

Ввиду того, что согласно принципу максимума $|\overset{*}{B}_m|>\varepsilon_m$ внутри γ_m, Δ_{mp} лежит в области K_m. Из предыдущей оценки при $z\in\Delta_{mp}$ получим, что

$$|f_{mp}(z)-1|\leqslant\frac{M+1}{\varepsilon_m}\cdot\frac{\varepsilon_m}{2(M+1)}=\frac{1}{2},$$

откуда $|f_{mp}(z)|\geqslant\frac{1}{2}$ при $z\in\Delta_{mp}$.

Следовательно

$$|\overset{*}{B}_{mp}(z)|=\left|\frac{f_{mp}(z)}{\overset{*}{B}_{mp}(z)}\right|^{-1}\cdot|f_{mp}(z)|\geqslant\frac{1}{2}\left\|\frac{f_{mp}}{\overset{*}{B}_{mp}}\right\|_{H^\infty(K_m)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{M}{\varepsilon_m}\right)^{-1}=\frac{\varepsilon_m}{2M}\ \text{при } z\in\Delta_{mp}.$$

Это неравенство влечет, в частности, что $\Delta_{mp} \cap \Delta_{mq} = \varnothing$ при $p \neq q$. Действительно, если $z \in \Delta_{mp} \cap \Delta_{mq}$, то

$$|B^*_{mp}(z)| < |b^*_{mq}(z)| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{2(M+1)} < \frac{\varepsilon_m}{2M},$$

что противоречит неравенству $|B^*_{mp}(z)| \geqslant \frac{\varepsilon_m}{2M}$.

Из дизъюнктности Δ_{mp} следует, очевидно, что при $z \in \Delta_{mp}$

$$\inf_{q>1} |b^*_{mq}(z)| = |b_{mp}(z)|.$$

Окончательно, при $z \in \Delta_{mp}$ имеем

$$|B^*_m(z)| = |B^*_{mp}(z)| \cdot |b^*_{mp}(z)| > \frac{\varepsilon_m}{2M} \inf_{q>1} |b^*_{mq}(z)|.$$

Вне $\bigcup\limits_{p>1} \Delta_{mp}$ по принципу максимума

$$|B^*_m(z)| > \inf_{\substack{z \in \partial\Delta_{mp} \\ p>1}} |B^*_{mp}(z)\, b^*_{mp}(z)| > \frac{\varepsilon_m^2}{4M(M+1)} > \frac{\varepsilon_m^2}{4M(M+1)} \inf_{q>1} |b^*_{mq}(z)|.$$

Логарифмируя полученное неравенство и учитывая, что

$$k_{mp}\, g_{D_m}(z, z_{mp}) = -\log \frac{4M(M+1)}{\varepsilon_m^2},$$

получим, что S_m удовлетворяет условию 7° с $C_m = \log \frac{4M(M+1)}{\varepsilon_m^2}$.

7° -> 4°. Пусть

$$A = \sup_{\substack{z \in \bigcup \gamma_m \\ n>m>1}} \sum_{n>m>1} \sum_{p>1} k_{mp}\, g_{D_m}(z, z_{mp}).$$

Из неравенств 7° следует, что S_m удовлетворяет условию Бляшке. Отсюда по теореме Гарнака, имеем, что $A < +\infty$.

Если z не принадлежит ни одной из областей K_m, то, согласно принципу максимума, учитывая, что $g_D(z, t) < g_{D_m}(z, t)$, имеем

$$\sum_{p>1} k_p\, g_D(z, z_p) = \sum_{n>m>1} \sum_{p>1} k_{mp}\, g_D(z, z_{mp}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n>m>1} \sum_{p>1} k_{mp}\, g_{D_m}(z, z_{mp}) < A \leqslant A + \sup_{p>1} k_p\, g_D(z, z_p).$$

Пусть теперь $z \in K_{m_0}$ при некотором m_0. Предположим, что $\sup\limits_{p>1} k_{m_0 p}\, g_{D_{m_0}}(z, z_{m_0 p})$ реализуется при некотором p_0. Из неравенства условия 7° следует, что

$$\sum_{\substack{p>1 \\ p \neq p_0}} k_{m_0 p}\, g_{D_{m_0}}(z, z_{m_0 p}) \leqslant C_{m_0}.$$

Тогда

$$\sum_{p>1} k_p\, g_D(z, z_p) = \sum_{n>m>1} \sum_{p>1} k_{mp}\, g_D(z, z_{mp}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{n \geqslant m \geqslant 1 \\ m \neq m_0}} \sum_{p \geqslant 1} k_{mp}\, g_{\mathrm{D}_m}(z, z_{mp}) + \sum_{\substack{p \geqslant 1 \\ p \neq p_0}} k_{m_0 p}\, g_{\mathrm{D}_{m_0}}(z, z_{m_0 p}) + k_{m_0 p_0} g_{\mathrm{D}}(z, z_{m_0 p_0}) \leqslant$$

$$\leqslant A + C_{m_0} + k_{m_0 p_0} g_{\mathrm{D}}(z, z_{m_0 p_0}) \leqslant A + C_{m_0} + \sup_{p \geqslant 1} k_p\, g_{\mathrm{D}}(z, z_p).$$

Отсюда S удовлетворяет условию 4° при $C = A + \max\limits_{1 \leqslant m \leqslant n} C_m$.

4°->7°. Доказательство вполне аналогично предыдущему пункту, если заметить, что есть двусторонняя оценка

$$1 \leqslant \frac{g_{\mathrm{D}_m}(z, z_{mp})}{g_{\mathrm{D}}(z, z_{mp})} \leqslant \lambda < +\infty, \; z \in K_m.$$

В случае, когда D_m есть круг, а K_m — круговое кольцо, оценка следует непосредственно из формул для функции Грина круга и кругового кольца (см., например, [13]). Случай произвольной области легко сводится к рассмотренному случаю с помощью конформного отображения.

7° -> 1°. Пусть S_m удовлетворяет условию 7°, а N — натуральное число. Расщепим каждый узел интерполяции z_{mp} кратности k_{mp} в k_{mp} простых узлов $z^{(N)}_{mp1}, \cdots, z^{(N)}_{mpk_{mp}}$ столь близких к z_{mp}, что $|z^{(N)}_{mpr} - z_{mp}| < \dfrac{1}{N}$ при $1 \leqslant r \leqslant k_{mp}$ и для $z \in \mathrm{D}_m$

$$\sum_{p \geqslant 1} \sum_{1 \leqslant r \leqslant k_{mp}} g_{\mathrm{D}_m}(z, z^{(N)}_{mpr}) \leqslant 2C_m + \sup_{p \geqslant 1} \sum_{1 \leqslant r \leqslant k_{mp}} g_{\mathrm{D}_{mp}}(z, z^{(N)}_{mpr}).$$

Положим $\Omega_{mp} = \{z \in \mathrm{D}_m : \sum\limits_{1 \leqslant r \leqslant k_{mp}} g_{\mathrm{D}_m}(z, z^{(N)}_{mpr}) > 2C_m\}$.

Из предыдущего неравенства следует, что $\Omega_{mp} \cap \Omega_{mq} = \varnothing$ при $p \neq q$, и следовательно, применима теорема Карлесона об интерполяции внутри линий уровня, доказанная в работе [4], то есть для любого семейства функций $\omega_p \in H^\infty(\Omega_{mp})$, $p \geqslant 1$, такого что $\delta = \sup\limits_{p \geqslant 1} \|\omega_p\|_{H^\infty(\Omega_{mp})} < +\infty$ найдется функция $\omega \in H^\infty(\mathrm{D}_m)$, удовлетворяющая условиям

$$\omega(z^{(N)}_{mpr}) = \omega_p(z^{(N)}_{mpr}) \quad (p \geqslant 1,\ 1 \leqslant r \leqslant k_{mp})$$

и $\|\omega\|_{H^\infty(\Omega_{mp})} \leqslant \delta L e^{MC_m}$, где L и M — числовые константы.

Заметим, что если S_m удовлетворяет этому условию 7° с константой C_m, то S_m удовлетворяет этому условию с любой константой, большей C_m. Увеличивая, если требуется, C_m, мы можем считать все области Ω_{mp} лежащими в K_m. Тогда все нули функций $B^*_l(z)$, определенных в доказательстве импликации 3° -> 7°, лежат вне K_m при всех $l \neq m$. Отсюда следует, что функция $\omega_{mp}(z) = (\prod\limits_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq m}} B^*_l(z))^{-1}$ принадлежит $H^\infty(K_m)$ и тем более $\omega_{mp} \in H^\infty(\Omega_{mp})$ при всех p.

Применив упомянутую теорему Карлесона к определенным таким образом функциям ω_{mp}, получим функцию $h_{m,N} \in H^\infty(\mathrm{D}_m)$ такую, что

$$h_{m,N}(z^{(N)}_{mpr}) = (\prod_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq m}} B^*_l(z^{(N)}_{mpr}))^{-1}, \quad (p \geqslant 1,\ 1 \leqslant r \leqslant k_{mp}).$$

Тогда функция $G_{m,N}=h_{m,N}\prod_{l\neq m}B_l^{*}$ принимает в точках $z_{mpr}^{(N)}$ значение 1 при всех p и r, а в точках z_{lp} при $l\neq m$ обращается в нуль кратности k_{lp}.

Проделав такую процедуру при всех достаточно больших N, мы получим ограниченное по норме семейство функций $G_{m,N}$. Выберем из него сходящуюся внутри D_m подпоследовательность и обозначим ее предел посредством G_m. Легко проверить, что

$$G_m(z_{mp})=1,\ G_m^{(k)}(z_{mp})=0\ (p\geqslant 1,\ 1\leqslant k<k_{mp}),$$
$$G_m^{(k)}(z_{lp})=0\ (l\neq m,\ p\geqslant 1,\ 0\leqslant k<k_{lp})$$

ввиду того, что дополнительные узлы интерполяции $z_{mpr}^{(N)}$ стягиваются к z_{mp} при $N\to\infty$.

Теперь, задавшись ограниченным по норме семейством функций f_{mp} из $H^{\infty}(D)$, построим функцию $f\in H^{\infty}(D)$ такую, что

$$f^{(k)}(z_{mp})=f_{mp}^{(k)}(z_{mp})\ (1\leqslant m\leqslant n,\ p\geqslant 1,\ 0\leqslant k<k_{mp}).$$

Для этого, прежде всего, заметим, что вместо ограниченного по норме семейства f_{mp} из $H^{\infty}(D)$ воспользовавшись той же теоремой Карлесона можно рассматривать ограниченное по норме семейство функций $\mathring{f}_{mp}$ из $H^{\infty}(D_m)$ таких, что

$$f_{mp}^{(k)}(z_{mp})=(\mathring{f}_{mp})^{(k)}(z_{mp})\ (1\leqslant m\leqslant n,\ p\geqslant 1,\ 0\leqslant k<k_{mp}).$$

Для него, согласно интерполяционной теореме Н. К. Никольского, найдутся функции $F_m\in H^{\infty}(D_m)$, $1\leqslant m\leqslant n$ такие, что

$$F_m^{(k)}(z_{mp})=(\mathring{f}_{mp})^{(k)}(z_{mp})\ (p\geqslant 1,\ 0\leqslant k<k_{mp}).$$

Как легко проверить непосредственным дифференцированием, функция $f=\sum_{1\leqslant m\leqslant n}F_m G_m$ является искомой.

Теорема доказана полностью.

На самом деле мы доказали даже чуть больше, чем требовалось в условии теоремы: функции f_{mp}, ростки которых мы интерполируем, можно было считать заданными не во всей области D, а лишь в некоторой окрестности Ω_{mp} точки z_{mp}.

3. Аналогичная теорема верна, если ростки одной и той же функции f_p интерполировать не в одной точке z_p кратности k_p, а на серии точек.

Пусть теперь S — последовательность серий σ_p, а каждая серия σ_p состоит из конечного или счетного множества точек $z\in\sigma_p$ кратности $k(z)$. Пусть S_m — последовательность серий $\sigma_{mp}=\sigma_p\cap K_m$, где K_m — область, ограниченная Γ_m и произвольной лежащей в D кривой γ_m, гомотопной Γ_m.

Теорема 2. *Следующие утверждения равносильны:*

1°. *Для произвольного ограниченного по норме набора функций $\{f_p\}$ из $H^{\infty}(D)$ существует функция $f\in H^{\infty}(D)$ такая, что*

$$f^{(k)}(z)=f_p^{(k)}(z),\ z\in\sigma_p\ (p\geqslant 1,\ 0\leqslant k<k(z)).$$

2°. *Для любой последовательности* $\{\lambda_p\}\in l^\infty$ *существует функция* $f\in H^\infty(\mathrm{D})$ *такая, что*

$$f(z)=\lambda_p,\ f^{(k)}(z)=0,\ z\in\sigma_p\ (p\geqslant 1,\ 1\leqslant k<k(z)).$$

3°. *Существует постоянная* $M<+\infty$ *и семейство функций* $\{f_p\}$ *из* $H^\infty(\mathrm{D})$ *такие, что* $\|f_p\|_\infty\leqslant M$,

$$f_p(z)=\begin{cases}1, & z\in\sigma_q\\ 0, & z\in\sigma_q\end{cases}(q\neq p);\ f_p^{(k)}(z)=0,\ z\in\sigma_p\ (p\geqslant 1,\ 1\leqslant k<k(z)).$$

4°. *Существует* $C<+\infty$ *такое, что при любом* $\zeta\in\mathrm{D}$

$$\sum_{p\geqslant 1}\sum_{z\in\sigma_p}k(z)\,g_{\mathrm{D}}(\zeta,z)\leqslant C+\sup_{p\geqslant 1}\sum_{z\in\sigma_p}k(z)\,g_{\mathrm{D}}(\zeta,z).$$

5°. *При любом* m *для произвольного ограниченного по норме набора функций* $\{f_p\}$ *из* $H^\infty(\mathrm{D}_m)$ *существует* $f\in H^\infty(\mathrm{D}_m)$ *такая, что*

$$f^{(k)}(z)=f_p^{(k)}(z),\ z\in\sigma_{mp}\ (p\geqslant 1,\ 0\leqslant k<k(z)).$$

6°. *При любом* m *для произвольной последовательности* $\{\lambda_p\}\in l^\infty$ *существует* $f\in H^\infty(\mathrm{D}_m)$ *такая, что*

$$f(z)=\lambda_p,\ f^{(k)}(z)=0,\ z\in\sigma_p\ (p\geqslant 1,\ 1\leqslant k<k(z)).$$

7°. *При любом* m *существует* $C_m<+\infty$ *такая, что при всех* $\zeta\in\mathrm{D}_m$

$$\sum_{p\geqslant 1}\sum_{z\in\sigma_{mp}}k(z)\,g_{\mathrm{D}_m}(\zeta,z)\leqslant C_m+\sup_{p\geqslant 1}\sum_{z\in\sigma_{mp}}k(z)\,g_{\mathrm{D}_m}(\zeta,z).$$

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Наконец, стоит отметить, что используя тот же метод, можно перенести на случай конечносвязных областей интерполяционные теоремы с ограниченными кратностями, используя классическое условие Карлесона $\sup_{p\geqslant 1}\sum_{q\neq p}g_{\mathrm{D}}(z_p,z_q)<+\infty$.

Соответственно переносятся на случай конечносвязных областей и теоремы об интерполяции в классах H^p.

Ленинградский государственный
педагогический институт
им. А. И. Герцена

Поступила 24.VII.1981

Ս. Ե. ՌՈՒԿՇԻՆ. Անսահմանափակ պատիկություններով ինտերպոլյացիան կոմպլեքս հարթության վերջավոր կապանի տիրույթներում *(ամփոփում)*

Հոդվածում ստացված են արդյունքներ կոմպլեքս հարթության վերջավորկապանի տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիաների ծիլերի բազմապատիկ ինտերպոլյացիայի վերաբերյալ, ուսումնասիրված է ինտերպոլյացիոն բազմությունների կառուցվածքը։

S. E. ROOKSHIN. *Interpolation with unbounded multiplicities in finitely connected domains of complex plane* (summary)

Some results on the multiple interpolations of germs of analytic functions in finitely connected domains are stated. The structure of the interpolating sequence is analyzed in detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Carleson*. An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 80, № 4, 1958, 921—930.
2. *H. Shapiro, A. Shields*. On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, № 3, 1961, 513—532.
3. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
4. *Г. М. Айрапетян*. Кратная интерполяция и базисность некоторых биорготогональных систем рациональных функций в классах H_p Харди, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 262—277.
5. *М. М. Джрбашян*. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости, Изв. АН СССР, сер. матем., 43, № 6, 1978, 1322—1384.
6. *Г. М. Айрапетян*. О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., X, № 2, 1975, 133—152.
7. *В. И. Васюнин*. Базисы из рациональных функций и кратная интерполяция, Зап. научн. семин. ЛОМИ, 56, 1976, 174—176.
8. *Н. К. Никольский*. Базисы из инвариантных подпространств и операторная интерполяция, Труды МИАН, CXXX, 1978, 50—123.
9. *L. Carleson, P. Beurling*. Research on interpolation problems, Uppsala Univ., 1962.
10. *E. L. Stout*. Two theorems concerning functions holomorphic on multiply connected domains, Bull. Amer. Math. Soc., 69, № 4, 1963, 527—530.
11. *В. И. Васюнин*. Безусловно сходящиеся спектральные разложения и задачи интерполяции, Труды МИАН, CXXX, 1978, 5—49.
12. *У. Рудин*. Функциональный анализ, «Мир», М., 1975.
13. *Н. И. Ахиезер*. Элементы теории эллиптических функций, «Наука», М., 1970.
14. *L. Carleson*. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem, Ann. Math., 76, № 3, 1962, 547—559.