

УДК 517.43

Р. Г. АЙРАПЕТЯН, И. М. ГЕЛЬФАНД, М. И. ГРАЕВ, Г. Р. ОГАНЕСЯН

ТЕОРЕМА ПЛАНШЕРЕЛЯ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СВЯЗАННОГО С КОМПЛЕКСОМ
 p -МЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В $СР^n$ И $С^n$

В [1, 2] изучалось интегральное преобразование, относящее функции в аффинном пространстве их интегралы по прямым, пересекающим фиксированную кривую. Задача интегральной геометрии состояла в том, чтобы получить для этого преобразования формулу обращения и формулу Планшереля. Комплекс прямых, пересекающих фиксированную кривую, является одним из самых интересных комплексов прямых. Наша цель — определить комплекс K_C p -мерных плоскостей, заменяющий при $p > 1$ комплекс прямых, пересекающих кривую (см. [3, 4, 5]). Для этого обозначим через $G_{p+1, n+1}$ комплексное грасмманово многообразие, т. е. множество $(p+1)$ -мерных подпространств в $С^{n+1}$ или, что то же, множество p -мерных плоскостей в n -мерном проективном пространстве $СР^n$. Зададим p -мерное подмногообразие $C \subset G_{p, n+1}$ (оно заменяет кривую при $p > 1$). Определим комплекс $K_C \subset G_{p+1, n+1}$ как множество всех подпространств $h \in G_{p+1, n+1}$, содержащих хотя бы одно подпространство $l \in C$; очевидно, что $\dim K_C = n$.

В работе [5] было введено интегральное преобразование J_C , относящее каждой функции $f(x)$ на $СР^n$ функцию $\varphi(h)$ на K_C : именно, $\varphi(h)$ равно интегралу f по плоскости $h \in K_C$ (точное определение см. в § 1) и для этого преобразования была получена формула обращения.

В данной работе, при условии, что C — гармоническое многообразие, получена теорема Планшереля. Сформулируем условие гармоничности (см. [5]). Заметим, что если C — p -мерное подмногообразие в $G_{p, n+1}$, то для почти всех $\eta \in (С^{n+1})'$ имеется лишь конечное число $Cr(\eta)$ подпространств $l \in C$, ортогональных η . Мы называем C гармоническим многообразием, если $Cr(\eta) = \text{const} \neq 0$ для почти всех η . Эту константу мы обозначаем через $Cr(C)$ и называем числом Крофтона. Число Крофтона является естественным обобщением понятия порядка алгебраической кривой, так как в случае алгебраической кривой C (т. е. при $p = 1$) оно равно числу точек пересечения кривой C с гиперплоскостью общего положения*.

Примечание. В работе разобран случай комплексного пространства, поскольку он является более простым. Случай вещественного пространства будет разобран в другой работе.

* Краткое изложение результатов см. в [9].

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

1. Введем пространство F C^∞ -функций на $C^{n+1} \setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности:

$$f(\lambda x) = |\lambda|^{-2p-2} f(x), \quad \lambda \in C \setminus 0. \quad (1.1)$$

Определим интегральное преобразование J функций $f \in F$. Обозначим через E многообразие $(p+1)$ -реперов $v = (v_1, \dots, v_{p+1})$ в C^{n+1} ; оно является расслоением над грассмановым многообразием $G_{p+1, n+1}$. Пусть $f \in F$, $v = (v_1, \dots, v_{p+1}) \in E$. Положим

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} t^k dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{k-1} \wedge dt^{k+1} \wedge \dots \wedge dt^{p+1}.$$

Из условия однородности для $f \in F$ следует, что дифференциальная (p, p) -форма $f(v_1 t^1 + \dots + v_{p+1} t^{p+1}) \sigma(t) \wedge \overline{\sigma(t)}$ имеет степень однородности 0, а потому она опускается с $C^{p+1} \setminus 0$ на CP^p . Мы полагаем:

$$(Jf)(v) = \left(\frac{i}{2}\right)^p \int_{CP^p} f(v_1 t^1 + \dots + v_{p+1} t^{p+1}) \sigma(t) \wedge \overline{\sigma(t)}. \quad (1.2)$$

Очевидно, что $\varphi = Jf$ — C^∞ -функция на E , удовлетворяющая следующему условию однородности:

$$\varphi(gv) = |\det g|^{-2} \varphi(v) \text{ для любого } g \in GL(p+1, C). \quad (1.3)$$

В силу этого условия, функция φ фактически зависит только от подпространства $h \in G_{p+1, n+1}$, натянутого на репер $v \in E$.

Пусть теперь $K_C \subset G_{p+1, n+1}$ — комплекс $(p+1)$ -мерных подпространств, построенный по p -мерному подмногообразию $C \subset G_{p, n+1}$. Пусть далее E_C — расслоение реперов над K_C , Φ_C — пространство C^∞ -функций на E_C , удовлетворяющих условию однородности:

$$\varphi(gv) = |\det g|^{-2} \varphi(v) \text{ для любого } g \in GL(p+1, C). \quad (1.4)$$

Определим интегральное преобразование $J_C: F \rightarrow \Phi_C$, полагая

$$J_C f = Jf|_{E_C}.$$

2. Наша цель — получить теорему Планшереля для преобразования J_C . Для этого нужно как в F так и в Φ_C ввести скалярное произведение. В дальнейшем предполагается, что $2p \leq n-1$. Чтобы ввести скалярное произведение в пространстве F , зафиксируем произвольный однородный многочлен $P(\eta)$ от η , $\eta \in (C^{n+1})'$ бистепени (k_1, k_2) , где $k_1 + k_2 = n-1-2p$, и положим

$$\omega(x) = \sum (-1)^{k-1} x^k dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \dots \wedge dx^{n+1}.$$

Пусть $f_1, f_2 \in F$. Тогда из условия однородности для функций f_i ясно, что дифференциальная форма

$$\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_1(x) \right] \overline{\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_2(x) \right]} \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)}$$

имеет степень однородности 0, а поэтому она опускается с $C^{n+1} \setminus 0$ на CP^n . Положим

$$(f_1, f_2) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \int_{CP^n} \left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_1(x) \right] \overline{\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_2(x) \right]} \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)}. \quad (1.5)$$

Обозначим через $\bar{F}$ пополнение пространства F по норме $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. Введем теперь скалярное произведение в пространстве Φ_C , где C — гармоническое многообразие. Пусть $l \in C$, $v = (v_1, \dots, v_p)$ — произвольный базис в l и $x \in C^{n+1} \setminus l$; тогда $(v_1, \dots, v_p, x) \in E_C$. Положим

$$x_v(x) = \frac{1}{(n-p)!} \sum \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_{n+1}) v_1^{i_1} \dots v_p^{i_p} x^{i_{p+1}} dx^{i_{p+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n+1}}$$

(суммирование ведется по всем перестановкам индексов $1, \dots, n+1$),

$$x_x(\varphi) = \sum \frac{\partial^p \varphi(v_1, \dots, v_p, x)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_p}} dv_1^{i_1} \wedge \dots \wedge dv_p^{i_p}.$$

Введем для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_C$ следующую дифференциальную форму:

$$\Omega(\varphi_1, \varphi_2) = \left[x_v(x) \wedge P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) x_x \varphi_1 \right] \wedge \overline{\left[x_v(x) \wedge P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) x_x(\varphi_2) \right]}. \quad (1.6)$$

Пусть сначала v_i и $dv_i (i=1, \dots, p)$ фиксированы и $l \in C$ — подпространство, натянутое на векторы v_i . Тогда $\Omega(\varphi_1, \varphi_2)$ является дифференциальной $(n-p, n-p)$ -формой на $C^{n+1} \setminus l$. Зададим отображение $C^{n+1} \setminus l \rightarrow CP^n/l$, где $CP^n/l \cong CP^{n-p}$ — множество всех подпространств $h \in G_{p+1, n+1}$, содержащих l ; именно, отнесем каждой точке $x \in C^{n+1} \setminus l$ подпространство, натянутое на x и l . Легко проверить, что форма $\Omega(\varphi_1, \varphi_2)$ опускается с $C^{n+1} \setminus l$ на CP^n/l ; таким образом, определен ее интеграл по пространству CP^n/l , являющийся дифференциальной (p, p) -формой на расслоении реперов $\bar{C}$ над C . Легко далее проверить, что полученная (p, p) -форма на $\bar{C}$ опускается с $\bar{C}$ на C . Положим

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{2p} \operatorname{Cr}(C)} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int_C \int_{CP^n/l} \Omega(\varphi_1, \varphi_2). \quad (1.7)$$

Обозначим через $\bar{\Phi}_C$ пополнение пространства Φ_C по норме $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$,

Теорема 1. Пусть $2p \leq n-1$, $C \subset G_{p+1, n+1}$ — гармоническое подмногообразие, J_C — интегральное преобразование, определенное в п. 1. Тогда преобразование J_C изометрично относительно введенных в F и Φ_C скалярных произведений, т. е.

$$(f_1, f_2) = \langle J_C f_1, J_C f_2 \rangle$$

для любых $f_1, f_2 \in F$. Следовательно, оно продолжается до изометрического отображения $\bar{F} \rightarrow \bar{\Phi}_C$.

3. Опишем образ пространства $\bar{F}$ при отображении J_C . Пусть $\varphi \in \Phi_C$, $l \in C$, $v = (v_1, \dots, v_p)$ — произвольный базис в l , а $\eta \in (C^{n+1})' \setminus 0$ — вектор, ортогональный l . Введем следующую дифференциальную форму на $C^{n+1} \setminus l$:

$$\varphi(v_1, \dots, v_p, x) \delta^{(n-p-1, n-p-1)}(\langle \eta, x \rangle) \sigma_v(x) \wedge \overline{\sigma_v(x)},$$

где $\delta^{(n-p-1, n-p-1)}(z) = \partial_z^{n-p-1} \bar{\partial}_z^{n-p-1} \delta(z)$, $\delta(z)$ — дельта-функция на C .

Легко показать, что эта форма не зависит от выбора базиса v в подпространстве l и что она опускается на проективное пространство $CP^n/l \cong CP^{n-p}$ при естественном отображении $C^{n+1} \setminus l \rightarrow CP^n/l$. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(l, \eta) = & \left(\frac{i}{2}\right)^{n-p} \int_{CP^n/l} \varphi(v_1, \dots, v_p, x) \times \\ & \times \delta^{(n-p-1, n-p-1)}(\langle \eta, x \rangle) \sigma_v(x) \wedge \overline{\sigma_v(x)}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Скажем, что функция $\varphi \in \Phi_C$ удовлетворяет условию Кавальери, если для почти каждого $\eta \in (C^{n+1})' \setminus 0$ $\tilde{\varphi}(l, \eta)$ не зависит от пространства $l \in C$, ортогонального η , т. е.

$$\tilde{\varphi}(l_1, \eta) = \tilde{\varphi}(l_2, \eta) \quad (1.9)$$

для любых подпространств $l_1, l_2 \in C$, ортогональных η (число этих подпространств конечно и равно $\text{Cr}(C)$).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда образ пространства $\bar{F}$ при отображении $J_C: \bar{F} \rightarrow \bar{\Phi}_C$ есть замыкание пространства функций $\varphi \in \Phi_C$, удовлетворяющих условию Кавальери (1.9).

Примечание. Необходимость условия (1.9) вытекает из следующего факта. Пусть $\varphi = Jf$, $f \in F$, т. е. функция φ задана на многообразии всех $(p+1)$ -реперов в C^{n+1} , тогда интеграл (1.8) определен для любой ортогональной пары $l \in G_{p, n+1}$, $\eta \in (C^{n+1})' \setminus 0$. Легко убедиться, что он равен

$$\int_{CP^n} f(x) \delta^{(n-p-1, n-p-1)}(\langle \eta, x \rangle) \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)},$$

а потому зависит только от η .

4. Введем семейство интегральных преобразований, родственных J_C . Пусть C — p -мерное подмногообразие в $G_{p, n+1}$, k_1, k_2 — любые целые числа такие, что $1 \leq k_1, k_2 \leq n$ и $2p+2 \leq k_1+k_2 \leq n+1$. Обозначим через F^{k_1, k_2} пространство всех C^∞ -функций на $C^{n+1} \setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности:

$$f(\lambda x) = \lambda^{-k_1} \bar{\lambda}^{-k_2} f(x), \quad \lambda \in C^1 \setminus 0. \quad (1.10)$$

Определим интегральное преобразование функций $f \in F^{k_1, k_2}$. Именно, пусть $l \in C$, $v = (v_1, \dots, v_p)$ — произвольный базис в l и $x \in C^{n+1} \setminus l$. Полагаем

$$(J_C^{k_1, k_2} f)(v, x) = \left(\frac{i}{2}\right)^p \int_{C^p} f(vt + x) dt \wedge \bar{dt},$$

где $vt = v_1 t^1 + \dots + v_p t^p$, $dt = dt^1 \wedge \dots \wedge dt^p$.

Из определения следует, что $\varphi = J_C^{k_1, k_2} f$ — C^∞ -функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) при фиксированном v функция $\varphi(v, x)$ зависит только от проекции x на фактор-пространство C^{n+1}/l ;

2) $\varphi(vg, \lambda x) = |\det g|^{-2} \lambda^{p-k_1} \bar{\lambda}^{p-k_2} \varphi(v, x)$ для любых $g \in GL(p, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$. В силу этих условий, φ зависит фактически только от пары пространств (l, h) , где $l \in C$ — подпространство, натянутое на v , а $h \in K_C$ — подпространство, натянутое на l и x . Отметим, что при $k_1 = k_2 = p+1$ функция φ зависит только от h , а преобразование $J_C^{k_1, k_2}$ совпадает с J_C .

Обозначим через $\Phi_C^{k_1, k_2}$ пространство всех C^∞ -функций $\varphi(v, x)$, удовлетворяющих условиям 1, 2. Зафиксируем произвольный однородный многочлен $P(\eta)$ от η , $\bar{\eta} \in (C^{n+1})' \setminus 0$ бистепени (l_1, l_2) , где $l_1 + l_2 = n+1-k_1-k_2$, и зададим скалярные произведения в пространствах $F_C^{k_1, k_2}$ и $\Phi_C^{k_1, k_2}$ формулами (1.5), (1.6), (1.7). Определим, далее, функцию $\varphi(l, \eta)$ формулой (1.8), в которой $\delta^{(n-p-1, n-p-1)}$ заменено на $\delta^{(n-k_1, n-k_2)}$. При таком определении скалярных произведений и функции $\varphi(l, \eta)$ теоремы 1 и 2 остаются справедливыми при любых k_1, k_2 .

§ 2. Вспомогательные предложения

Пусть $F_C^{k_1, k_2}$ — пространство C^∞ -функций на $C^{n+1} \setminus 0$, удовлетворяющих условию (1.10). Аналогично определим пространство F'^{k_1, k_2} C^∞ -функций на $(C^{n+1})' \setminus 0$. Будем предполагать, что $1 \leq k_1, k_2 \leq n$, $k_1 + k_2 \leq n+1$.

Пусть $f \in F_C^{k_1, k_2}$ и $\eta \in (C^{n+1})' \setminus 0$. Тогда дифференциальная форма на $C^{n+1} \setminus 0$: $f(x) \delta^{(n-k_1, n-k_2)}(\langle \eta, x \rangle) \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)}$ опускается на $\mathbb{C}P^n$ и мы полагаем

$$(Rf)(\eta) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \int_{\mathbb{C}P^n} f(x) \delta^{(n-k_1, n-k_2)}(\langle \eta, x \rangle) \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)}. \quad (2.1)$$

Назовем функцию $\tilde{f} = Rf$ на $(C^{n+1})' \setminus 0$ обобщенным преобразованием Радона функции f . Очевидно, что $\tilde{f} \in F'^{n+1-k_1, n+1-k_2}$. Таким образом, мы получили отображение

$$R: F_C^{k_1, k_2} \rightarrow F'^{n+1-k_1, n+1-k_2}.$$

Введем скалярные произведения в пространствах $F_C^{k_1, k_2}$ и $F'^{n+1-k_1, n+1-k_2}$. Для этого зафиксируем произвольный однородный ненулевой многочлен $P(\eta)$ от η , $\bar{\eta} \in (C^{n+1})' \setminus 0$ бистепени (l_1, l_2) , где $l_1 + l_2 = n+1-k_1-k_2$. Если $f_1, f_2 \in F_C^{k_1, k_2}$, то дифференциальная форма на $C^{n+1} \setminus 0$:

$$\left[P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f_1(x) \right] \left[\overline{P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f_2(x)} \right] \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)}$$

имеет степень однородности 0, а потому она опускается на $\mathbb{C}P^n$. Положим

$$(f_1, f_2) = \left(\frac{i}{2} \right)^n \int_{\mathbb{C}P^n} \left[P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f_1(x) \right] \left[\overline{P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f_2(x)} \right] \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)}.$$

Аналогично, если $\varphi_1, \varphi_2 \in F'^{n+1-k_1, n+1-k_2}$, то дифференциальная форма на $(\mathbb{C}^{n+1})' \setminus 0: |P(\eta)|^2 \varphi_1(\eta) \overline{\varphi_2(\eta)} \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)}$ опускается на $(\mathbb{C}P^n)'$, и мы полагаем

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \pi^{2(1-n)} \left(\frac{i}{2} \right)^n \int_{(\mathbb{C}P^n)'} |P(\eta)|^2 \varphi_1(\eta) \overline{\varphi_2(\eta)} \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)}.$$

Обозначим через $\overline{F}^{k_1, k_2}, \overline{F}'^{n+1-k_1, n+1-k_2}$ пополнения пространств $F^{k_1, k_2}, F'^{n+1-k_1, n+1-k_2}$ по введенным нормам.

Предложение 1. *Отображение $R: F^{k_1, k_2} \rightarrow F'^{n+1-k_1, n+1-k_2}$ изометрично относительно введенных скалярных произведений, т. е.*

$$(f_1, f_2) = (Rf_1, Rf_2), \quad (2.2)$$

поэтому оно продолжается до изометрического отображения гильбертовых пространств $R: \overline{F}^{k_1, k_2} \rightarrow \overline{F}'^{n+1-k_1, n+1-k_2}$. Полученное отображение является изоморфизмом $\overline{F}^{k_1, k_2}$ и $\overline{F}'^{n+1-k_1, n+1-k_2}$, причем обратное отображение имеет аналогичный вид:

$$(R^{-1}\varphi)(x) = (-1)^{n-1} \pi^{2(1-n)} \left(\frac{i}{2} \right)^n \int_{(\mathbb{C}P^n)'} \varphi(\eta) \times \\ \times \bar{\partial}^{(k_1-1, k_2-1)}(\langle \eta, x \rangle) \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)}. \quad (2.3)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $k_1 + k_2 = n+1$. В этом случае скалярные произведения в $\overline{F}^{k_1, k_2}$ и $\overline{F}'^{n+1-k_1, n+1-k_2}$ задаются, соответственно, формулами

$$(f_1, f_2) = \left(\frac{i}{2} \right)^n \int_{\mathbb{C}P^n} f_1(x) \overline{f_2(x)} \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)}, \\ (\varphi_1, \varphi_2) = \pi^{2(1-n)} \left(\frac{i}{2} \right)^n \int_{(\mathbb{C}P^n)'} \varphi_1(\eta) \overline{\varphi_2(\eta)} \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)}.$$

Наше утверждение в этом случае можно получить как простое следствие из известных теорем об унитарных представлениях группы $SL(n+1, \mathbb{C})$. Именно, зададим в пространствах $\overline{F}^{k_1, k_2}, \overline{F}'^{n+1-k_1, n+1-k_2}$ представления группы $SL(n+1, \mathbb{C})$ по формулам

$$(T_g f)(x) = f(xg), \quad (T_g \varphi)(\eta) = \varphi(\eta g'^{-1}).$$

Очевидно, что эти представления унитарны, и хорошо известно (см., например, [6]), что они неприводимы и эквивалентны. Очевидно, далее, что R является сплетающим оператором для этих представлений; следовательно, оператор sR при подходящем множителе s задает изоморфизм соответствующих пространств. То, что $s=1$ легко установить, сравнивая (f, f) и (Rf, Rf) для какой-либо функции из F^{k_1, k_2} .

Пусть теперь $k_1 + k_2 < n + 1$ и $f \in F^{k_1, k_2}$. Тогда $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) \in F^{k'_1, k'_2}$, где $k'_1 + k'_2 = n + 1$ и $P(\eta) Rf = (-1)^{k_1 + k_2} R\left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f\right)$. Поэтому при $k_1 + k_2 < n + 1$ равенство (2.2) следует непосредственно из уже доказанного. Очевидно далее, что пространства

$$\left\{ P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f, f \in F^{(k_1, k_2)} \right\}, \{ P(\eta) Rf, f \in F^{k_1, k_2} \}$$

плотны, соответственно, в $\bar{F}^{k'_1, k'_2}$, $\bar{F}'^{n+1-k'_1, n+1-k'_2}$. Отсюда и из уже доказанного для (k'_1, k'_2) следует, что преобразование Радона $R: \bar{F}^{k_1, k_2} \rightarrow \bar{F}'^{n+1-k_1, n+1-k_2}$ является изоморфизмом.

Примечание. Тот же результат можно получить и не опираясь на теорию представлений, а именно, свести преобразование R к преобразованию Радона в аффинном пространстве и воспользоваться теоремой Планшереля для последнего преобразования.

Обозначим через Φ пространство всех C^∞ -функций на множестве реперов $(v_1, \dots, v_{p+1})$ в C^{n+1} , удовлетворяющих условию однородности (1.3). Пусть $l \in G_{p, n+1}$, $v = (v_1, \dots, v_p)$ — фиксированный базис в l . Тогда, если $\varphi \in \Phi$, то в силу условия (1.3), функция $\psi(x) = \varphi(v_1, \dots, v_p, x)$ есть функция на $C^{n+1-p} \setminus 0 \cong C^{n+1}/l \setminus 0$, удовлетворяющая условию однородности $\psi(tx) = |t|^{-2} \psi(x)$. Поэтому к ней можно применить определенное выше обобщенное преобразование Радона; оно задается формулой (1.8):

$$\bar{\varphi}(l, \eta) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-p} \int_{CP^n/l} \varphi(v_1, \dots, v_p, x) \delta^{(n-p-1, n-p-1)}(\langle x, \eta \rangle) \times$$

$$\times \sigma_v(x) \wedge \overline{\sigma_v(x)}, \quad \eta \in (C^{n+1}/l)' = \text{ann } l.$$

Из предложения 1 легко следует

Предложение 2. Для любых функций $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ и любого однородного многочлена Q от η , $\bar{\eta}$ бистепени (m_1, m_2) , где $m_1 + m_2 = n - 1 - p$ имеет место следующее равенство Планшереля:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{i}{2}\right)^{n-p} \int_{CP^n/l} \left[Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_1(v, x) \right] \overline{\left[Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_2(v, x) \right]} \sigma_v(x) \wedge \overline{\sigma_v(x)} = \\ & = \pi^{2(p+1-n)} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-p} \int_{CP^{n-p}} |Q(\eta)|^2 \tilde{\varphi}_1(l, \eta) \overline{\varphi_2(l, \eta)} \mu_v(\eta) \wedge \overline{\mu_v(\eta)}, \quad (2.4) \end{aligned}$$

где $\mu_0(\eta)$ — дифференциальная форма на $C^{n+1}/l' = \text{анн } l$, определяемая равенством

$$\omega(\eta) = \langle v_1, d\eta \rangle \wedge \dots \wedge \langle v_p, d\eta \rangle \wedge \mu_0(\eta).$$

В частности, равенство (2.4), где $l \in C$ справедливо для функций $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_C$.

Предложение 3. Пусть $f \in F$, $\varphi = \int_C f$ и $\tilde{f}$ — обобщенное преобразование Радона функции f . Тогда функция $\tilde{\varphi}$, определенная равенством (1.8), удовлетворяет соотношению

$$\tilde{\varphi}(l, \eta) = \tilde{f}(\eta), \quad (2.5)$$

для любого $l \in C$ ($l \subset \text{анн } \eta$).

Доказательство. Мы имеем

$$\varphi(v_1, \dots, v_p, x) = \left(\frac{i}{2}\right)^p \int_{C^p} f(v_1 t^1 + \dots + v_p t^p + x) dt \wedge d\bar{t}.$$

Подставив это выражение в формулу (1.8), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(l, \eta) &= \left(\frac{i}{2}\right)^n \int_{C^{n/2}l} \int_{C^p} f(vt + x) \times \\ &\times \delta^{(n-p-1, n-p-1)}(\langle \eta, x \rangle) dt \wedge d\bar{t} \wedge \sigma_v(x) \wedge \overline{\sigma_v(x)}. \end{aligned}$$

Но так как $\eta \in \text{анн } l$ последний интеграл равен следующему:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n \int_{C^{n/2}} f(x) \delta^{(n-p-1, n-p-1)}(\langle \eta, x \rangle) \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)} = \tilde{f}(\eta).$$

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

Теорема 2 следует непосредственно из предложения 3. Докажем теорему 1.

Из предложения 1 следует, что для функций $f_1, f_2 \in F$ справедливо равенство:

$$(f_1, f_2) = \pi^{2(1-n)} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int_{(C^{n/2})'} |P(\eta)|^2 \tilde{f}_1(\eta) \overline{\tilde{f}_2(\eta)} \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)}. \quad (3.1)$$

Обозначим через A многообразие ортогональных пар (l, η) , где $\eta \in (C^{n/2})'$, $l \in C$ ($l \subset \text{анн } \eta$). Зададим отображения $\pi_1: A \rightarrow (C^{n/2})'$ и $\pi_2: A \rightarrow C$, полагая $\pi_1(l, \eta) = \eta$, $\pi_2(l, \eta) = l$. Для почти каждой точки $\eta \in (C^{n/2})'$ ее прообраз $\pi^{-1}(\eta) \subset A$ состоит из конечного числа точек, равного $\text{Cr}(C)$; иными словами A является N -листным накрытием над $(C^{n/2})'$, где $N = \text{Cr}(C)$.

Поднимем дифференциальную форму

$$\begin{aligned} & \left(\frac{i}{2}\right)^n |P(\eta)|^2 \bar{f}_1(\eta) \overline{\bar{f}_2(\eta)} \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)} = \\ & = \left(\frac{i}{2}\right)^n |P(\eta)|^2 \bar{\varphi}_1(l, \eta) \overline{\bar{\varphi}_2(l, \eta)} \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)} \end{aligned}$$

с $(\mathbb{C}P^n)'$ на A . Так как, в силу условия Кавальери, функции $\bar{\varphi}_1(l, \eta)$, $\bar{\varphi}_2(l, \eta)$ постоянны на каждом слое $\pi_1^{-1}(\eta)$ и равны, соответственно, $\bar{f}_1(\eta)$, $\bar{f}_2(\eta)$, то получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int_{(\mathbb{C}P^n)'} |P(\eta)|^2 \bar{f}_1(\eta) \overline{\bar{f}_2(\eta)} \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)} &= \frac{1}{C_r(C)} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int_A |P(\eta)|^2 \times \\ &\times \bar{\varphi}_1(l, \eta) \cdot \overline{\bar{\varphi}_2(l, \eta)} \omega(\eta) \wedge \overline{\omega(\eta)}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся тем, что $\pi_2: A \rightarrow C$ является векторным расслоением, поэтому интеграл по A можно представить как повторный, где интегрирование ведется сначала по слоям, а затем по базе расслоения $A \rightarrow C$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_r(C)} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int_C \int_{\text{анн } l} |P(\eta)|^2 \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_p} \bar{\varphi}_1(l, \eta) \cdot \overline{\eta_{j_1} \dots \eta_{j_p} \bar{\varphi}_2(l, \eta)} \times \\ \times \mu_\eta(\eta) \wedge \overline{\mu_\eta(\eta)} \wedge dv_{i_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge dv_{i_p}^{i_p} \wedge \overline{dv_{j_1}^{j_1} \wedge \dots \wedge dv_{j_p}^{j_p}}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться предложением 2.

§ 4. Замечания о преобразовании J в аффинном пространстве

1. Теоремы 1 и 2 нетрудно переформулировать в терминах аффинного пространства. Для этого достаточно заменить функции $f \in F$ их ограничениями на гиперплоскость $x_{n+1} = 1$; тем самым, F реализуется как пространство функций на $\mathbb{C}^n$, а J сводится к преобразованию J_a , относящему функциям на $\mathbb{C}^n$ их интегралы по p -плоскостям в $\mathbb{C}^n$:

$$(J_a f)(v_0, v) = \left(\frac{i}{2}\right)^p \int_{\mathbb{C}^p} f(v_0 + vt) dt \wedge d\bar{t}, \quad (4.1)$$

где $v_0 \in \mathbb{C}^n$, $v = (v_1, \dots, v_p)$ — p -репер в $\mathbb{C}^n$, $vt = v_1 t^1 + \dots + v_p t^p$, $dt = dt^1 \wedge \dots \wedge dt^p$.

Комплекс K_C в аффинном пространстве задается p -мерным многообразием $(p-1)$ -мерных плоскостей в $\mathbb{C}^n$; он состоит из всех p -мерных плоскостей, содержащих хотя бы одну плоскость из C . Теоремы 1, 2 нетрудно переформулировать в терминах функций f и Jf .

Рассмотрим пример, разобранный ранее в [1] — комплекс прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих гиперболу $x^1 x^3 = 1$, $x^2 = 0$. Этот комплекс возникает в гармоническом анализе на группе $SL(2, \mathbb{C})$. Связанное с K интегральное преобразование J задается формулой

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \frac{i}{2} \int f(\lambda^{-1} + tz_2, t, \lambda - tz_1) dt \wedge d\bar{t}. \quad (4.2)$$

Условие на образ J , полученное в [1] и условие данной работы (условие Кавальери) задаются по разному. Именно, условие из [1] таково:

$$\Phi(\omega_1, \omega_2; \lambda) = \Phi\left(\omega_1, \omega_2, -\frac{\bar{\omega}_2}{\lambda \omega_1}\right), \quad (4.3)$$

где Φ — преобразование Фурье функции φ по переменным z_1, z_2 , т. е.

$$\Phi(\omega_1, \omega_2; \lambda) = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int \varphi_1(z_1, z_2; \lambda) e^{i \operatorname{Re}(z_1 \bar{\omega}_1 + z_2 \bar{\omega}_2)} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2. \quad (4.4)$$

Условие же Кавальери имеет вид: для любых $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}^3 \setminus 0$, $s \in \mathbb{C}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \int \varphi(z_1, z_2; \lambda_1) \delta^{(1,1)}(\eta_1 z_1 - \eta_2 z_1 + s) dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 = \\ & = \int \varphi(z_1, z_2; \lambda_2) \delta^{(1,1)}(\eta_1 z_2 - \eta_2 z_1 + s) dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

при условии, что $\eta_1 \lambda_1^{-1} + \eta_2 \lambda_1 = \eta_1 \lambda_2^{-1} + \eta_2 \lambda_2$.

Убедимся непосредственно, что условия (4.3) и (4.5) эквивалентны. Мы имеем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{C}^1} \varphi(z_1, z_2; \lambda) \delta^{(1,1)}(\eta_1 z_2 - \eta_2 z_1 + s) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 = \\ & = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int_{\mathbb{C}^3} \varphi(z_1, z_2; \lambda) |t|^2 e^{i \operatorname{Re} t (\eta_1 z_2 - \eta_2 z_1 + s)} dt \wedge d\bar{t} \wedge dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 = \\ & = \left(\frac{i}{2}\right) \int_{\mathbb{C}} \Phi(-\overline{t\eta_2}, \overline{t\eta_1}; \lambda) e^{i \operatorname{Re}(ts)} |t|^2 dt \wedge d\bar{t}. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (4.5) эквивалентно условию

$$\int \Phi(-\overline{t\eta_2}, \overline{t\eta_1}; \lambda_1) |t|^2 e^{i \operatorname{Re}(ts)} dt \wedge d\bar{t} = \int \Phi(-\overline{t\eta_2}, \overline{t\eta_1}; \lambda_2) |t|^2 e^{i \operatorname{Re}(ts)} dt \wedge d\bar{t}, \quad (4.6)$$

где $\eta_1 \lambda_1^{-1} + \eta_2 \lambda_1 = \eta_1 \lambda_2^{-1} + \eta_2 \lambda_2$. В свою очередь, ввиду произвольности s , условие (4.6) эквивалентно условию

$$\Phi(-\overline{t\eta_2}, \overline{t\eta_1}; \lambda_1) = \Phi(-\overline{t\eta_2}, \overline{t\eta_1}; \lambda_2), \quad (4.7)$$

где $\eta_1 \lambda_1^{-1} + \eta_2 \lambda_1 = \eta_1 \lambda_2^{-1} + \eta_2 \lambda_2$. Очевидно, что полученное условие эквивалентно условию (4.3). В самом деле, достаточно заметить, что ра-

венство $\gamma_1 \lambda_1^{-1} + \gamma_2 \lambda_1 = \gamma_1 \lambda_2^{-1} + \gamma_2 \lambda_2$ равносильно соотношению $\lambda_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 \lambda_1}$.

Повтому, полагая в (4.7) — $\overline{t\gamma_2} = \omega_1$, $\overline{t\gamma_1} = \omega_2$, $\lambda_1 = \lambda$, получаем равенство (4.3).

Институт прикладной математики
АН СССР.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 31.I.1983

Ռ. Գ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ի. Մ. ԳԵԼՖԱՆԴ, Մ. Ի. ԳՐԱԵՎ, Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Պլանշերելի բերանը $\mathbb{C}P^n$ և $\mathbb{C}^n$ տառածություններում p -շափանի հարությունների կոմպլեքսի հետ կապված ինտեգրալ ձևափոխության համար (սամպոնում)

Հոդվածում դիտարկվում է ինտեգրալ ձևափոխություն, որը կապված է $\mathbb{C}P^n$ տարածությունում p -շափանի հարթությունների կոմպլեքսի հետ կոմպլեքս գրասմանի $G_{p, n+1}$ բազմաձևությունում տրված p -շափանի C ենթաբազմության օգնությամբ որոշված է K_C կոմպլեքսը, որը կազմված է այն $h \in G_{p+1, n+1}$ ենթատարածություններից, որոնք պարունակում են զանգվածային ենթատարածություն $l \in C$:

Դիցուք J_C — ինտեգրալ ձևափոխություն է, որը ամեն մի f ֆունկցիային $\mathbb{C}P^n$ -ի վրա համապատասխանեցնում է $\varphi(h)$ ֆունկցիան K_C -ի վրա, այսինքն՝ $\varphi(h)$ համասար է f -ի ինտեգրալին $h \in K_C$ հարթությամբ:

Այդ ձևափոխության համար ստացված է Պլանշերելի թեորեմը և պատկերի նկարագրումը:

R. G. AJRAPETIAN, I. M. GELFAND, M. I. GRAEV, G. R. HOVHANNISIAN.
Plancherel theorem for the integral transformation, connected with complexes of p -planes in $\mathbb{C}P^n$ and $\mathbb{C}^n$ (summary)

In the paper integral transformations connected with complexes of p -planes in $\mathbb{C}P^n$ is considered. For a given p -dimensional submanifold $C \subset G_{p, n+1}$ the complex K_C is defined as a submanifold of complex grassman manifold $G_{p+1, n+1}$. K_C consists of the subspaces $h \in G_{p+1, n+1}$ containing no less than one subspace $l \in C$. Let J_C be an integral transformation mapping every function on $\mathbb{C}P^n$ to a function $\varphi(h)$ on K_C : $\varphi(h)$ is the integral of the function f over the plane $h \in K_C$. The Plancherel theorem for this transformation is proved and the image of this transformation is described in the case when C is harmonic manifold.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., «Физматгиз», 1962.
2. А. А. Кириллов. Об одной задаче И. М. Гельфанда, ДАН СССР, 137, № 2, 1961, 276—277.
3. С. Г. Гиндикин. Унитарные представления групп автоморфизмов римановых симметрических пространств нулевой кривизны, Функц. анализ и его прилож., 1, № 1, 1967, 32—37.
4. И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин. Нелокальные формулы обращения в вещественной интегральной геометрии, Функц. анализ и его прилож., 11, № 3, 1977, 12—19.
5. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Р. Рошу. Нелокальные формулы обращения в задаче интегральной геометрии, связанной с p -мерными плоскостями в вещественном проективном пространстве, Функц. анализ и его прилож., 16, № 3, 1982, 49—51.
6. И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк. Унитарные представления классических групп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 36, 1950.
7. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Э. Я. Шапиро. Интегральная геометрия на k -мерных плоскостях, Функц. анализ и его прилож., 1, № 1, 1967, 15—31.

8. Р. Г. Айрапетян, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Г. Р. Оганесян. Формула Планшере-ля для интегрального преобразования, связанного с комплексом прямых, пересекающих алгебраическую кривую в S^3 и CP^3 . ДАН Арм. ССР, 75, № 1, 1982, 9—15.
9. Р. Г. Айрапетян, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Г. Р. Оганесян. Формула Планшере-ля для интегрального преобразования, связанного с комплексом p -мерных плоскостей в CP^n . ДАН СССР, 268, № 2, 1983, 265—268.