ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 4, 1983 Математика

УДК 517.53

В. Х. МУСОЯН

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ

Работа посвящена изучению некоторых экстремальных задач в пространствах полиномов Дирихле и Мюнца.

Пусть $\{e_k\}_1^n$ и $\{\varphi_k\}_1^n$ — биортогональные системы в гильбертовом пространстве H:

$$(e_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

Будем говорить, что они порождают друг друга, если элементы одной системы принадлежат линейной оболочке другой системы. Легко заметить, что для любой линейно независимой системы существует единственная порожденная биортогональная система. Следующая теорема устанавливает связь между аппроксимационными задачами и порожденными биортогональными системами.

Теорема. *Пусть $\{e_k\}_1^n$ и $\{\varphi_k\}_1^n$ — произвольные биортогональные системы в гильбертовом пространстве H.*

Для того, чтобы элемент

$$\sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\, e_k$$

минимизировал функционал

$$\Phi_x(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|$$

при любом фиксированном $x \in H$ необходимо и достаточно, чтобы эти системы порождали друг друга.

Необходимость. Обозначим через E линейную оболочку системы $\{e_k\}_1^n$, а через M — ортогональное дополнение пространства E. Тогда элемент φ_k можно представить в виде

$$\varphi_k = h_k + g_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

где $h_k \in E$, $g_k \in M$.

В качестве элемента x, фигурирующего в формулировке теоремы, возьмем элемент g_p, $p = 1, 2, \cdots, n$. Так как, по условию теоремы, элемент

$$\sum_{k=1}^{n} (g_p, \varphi_k)\, e_k \tag{1}$$

минимизирует функционал

$$\Phi_{g_p}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \left\| g_p - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|,$$

то элемент (1) представляет собой проекцию g_p на подпространство E, и поскольку $g_p \in M$, то

$$\sum_{k=1}^{n} (g_p, \varphi_k) e_k = 0, \; p = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

Отсюда следует, что все коэффициенты в (2) равны нулю, в частности $(g_p, \varphi_p) = 0$. Так как $(g_p, h_p) = 0$, то $(g_p, \varphi_p) = (g_p, g_p)$. Таким образом, мы получаем $(g_p, g_p) = 0$, $p = 1, 2, \cdots, n$, т. е. $g_p = 0$, или, что то же самое, $\varphi_k = h_k$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

Достаточность. Мы должны доказать, что для любого фиксированного элемента $x \in H$ элемент

$$\sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k) e_k$$

минимизирует функционал $\Phi(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Для этого достаточно доказать, что

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k) e_k, e_j \right) = 0, \; j = 0, 1, \cdots, n.$$

Имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k) e_k, e_j \right) = \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)(e_k, e_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x, (e_j, e_k) \varphi_k) = \left(x, \sum_{k=1}^{n} (e_j, e_k) \varphi_k \right). \tag{3}$$

С другой стороны, векторы φ_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, принадлежат линейной оболочке системы $\{e_k\}_1^n$. Кроме того, биортогональные системы линейно независимы. Поэтому элемент e_j, $j = 1, 2, \cdots, n$, представляет собой линейную комбинацию векторов $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$:

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \varphi_k, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{4}$$

Так как системы $\{e_k\}_1^n$ и $\{\varphi_k\}_1^n$ биортогональны, то $\alpha_{kj} = (e_j, e_k)$, Подставляя полученные значения коэффициентов α_{kj} в (4), получим

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} (e_j, e_k) \varphi_k.$$

Учитывая полученное разложение вектора e_j, равенство (3) можно написать в виде

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k) e_k, e_j \right) = (x, e_j).$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

В § 1 строятся в явном виде порожденные биортогональные системы для конечных систем Дирихле и Мюнца. Отметим, что для таких систем биортогональные системы в неявном виде впервые были построены Л. Шварцем [1] в случае простых нулей произведения Бляшке и М. М. Джрбашяном [4, 5] — в случае нулей произвольной кратности.

Исходя из построенных биортогональных систем приводятся интегральные представления ортопроекторов на подпространства, порожденные рассматриваемыми системами. Затем, используя полученное интегральное представление ортопроектора, дается конструктивное доказательство одной теоремы Ньюмана [5], относящейся к скорости приближения дифференцируемых функций полиномами Мюнца в пространстве $L_2(0, 1)$.

В § 2, используя построенный аппарат, доказываются экстремальные оценки для полиномов и производных полиномов по рассмотренным в § 1 системам. Последние оценки представляют собой аналоги классических неравенств Маркова, Бернштейна и Шмидта [2].

§ 1. Построение порожденных биортогональных систем

1.1. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ — конечная последовательность различных между собой комплексных чисел, лежащих в правой полуплоскости. Рассмотрим конечную систему Дирихле

$$\{e^{-\lambda_k x}\}_{k=1}^{n} \tag{1.1}$$

в пространстве $L_2(0, \infty)$ со скалярным произведением

$$(f; g) = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Чтобы построить в явном виде порожденную системой (1.1) биортогональную систему, нам необходимо разложить произведение Бляшке

$$W(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda+\bar{\lambda}_k}$$

на простейшие дроби.

Лемма 1. *Имеет место разложение*

$$\frac{W(\lambda)}{\lambda-\lambda_k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{W'(\lambda_m)(\lambda_k+\bar{\lambda}_m)(\lambda+\bar{\lambda}_m)}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Рассмотрим рациональную функцию

$$R(\mu) = \frac{1}{W(\mu)(\mu+\bar{\lambda}_k)(\mu+\bar{\lambda})},$$

где λ зафиксировано и отлично от чисел λ_k, $k=1, 2, \cdots, n$. Функция $R(\mu)$ всюду регулярна, кроме точек $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, -\bar{\lambda}$, а в этих точках имеет простой полюс. Кроме того,

$$R(\mu) = O(\mu^{-2}), \quad \text{при} \quad \mu \to \infty.$$

Следовательно, сумма вычетов рациональной функции $R(\mu)$ относительно всех ее конечных особенностей $-\bar{\lambda}, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ равна нулю

$$\frac{1}{W(-\bar{\lambda})(-\bar{\lambda}+\bar{\lambda}_k)}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{W'(\lambda_m)(\lambda_m+\bar{\lambda}_k)(\lambda_m+\bar{\lambda})}=0. \tag{1.3}$$

С другой стороны, заметим, что

$$\frac{1}{W(-\bar{\lambda})}=\overline{W(\lambda)}. \tag{1.4}$$

Переходя в (1.3) к сопряженным и учитывая (1.4), получим разложение (1.2).

Введем теперь обозначение

$$J_k(\lambda)=\frac{W(\lambda)}{W'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}. \tag{1.5}$$

Из леммы 1 следует интегральное представление

$$J_k(\lambda)=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{W'(\lambda_k)}\sum_{m=1}^{n}\frac{e^{-\bar{\lambda}_m x}}{\overline{W'(\lambda_m)}\,(\bar{\lambda}_m+\lambda_k)}\right]e^{-\lambda x}dx. \tag{1.6}$$

Обозначим

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{\overline{W'(\lambda_k)}}\sum_{m=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_m x}}{W'(\lambda_m)(\lambda_m+\bar{\lambda}_k)},\quad k=1,\,2,\cdots,\,n. \tag{1.7}$$

Так как функции $J_k(\lambda)$ обладают интерполяционными свойствами

$$J_k(\lambda_r)=\begin{cases}1, & k=r\\ 0, & k\neq r\end{cases},$$

то из (1.6) следует

Лемма 2. *Системы функций*

$$\{e^{-\lambda_k x}\}_1^n \text{ и } \{\varphi_k(x)\}_1^n$$

биортогональны в пространстве $L_2(0, \infty)$ и порождают друг друга.

1.2. Рассмотрим теперь более общую систему

$$\{e^{-\lambda_k x},\ xe^{-\lambda_k x},\cdots,\ x^{m_k-1}\,e^{-\lambda_k x}\}_{k=1}^{p}, \tag{1.8}$$

где $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ — различные между собой комплексные числа, лежащие в правой полуплоскости, а $m_1, \cdots, m_p$ — произвольные натуральные числа.

Введем обозначения

$$W(\lambda)=\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda+\bar{\lambda}_k}\right)^{m_k}, \tag{1.9}$$

$$K(z,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{-\lambda z}}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{-\zeta t}\,d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar{\lambda})}\right\}}\,d\lambda, \tag{1.10}$$

где Γ — замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий все корни функции $W(\lambda)$. Заметим, что в случае простых корней функции $W(\lambda)$, применяя теорему о вычетах, функцию $K(z, t)$ можно представить в виде двойной суммы

$$K(z, t) = \sum_{m, k=1}^{p} \frac{e^{-\lambda_k z} e^{-\overline{\lambda_m t}}}{W'(\lambda_k) \overline{W'(\lambda_m)} (\lambda_k + \overline{\lambda}_m)}. \qquad (1.10')$$

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться следующим свойством интегралов вида (1.10):

$$\overline{K(z, t)} = K(t, z). \qquad (1.10'')$$

В случае простых корней функции $W(\lambda)$ это свойство непосредственно следует из (1.10′), а случай кратных корней сводится к этому случаю, поскольку функция $K(z, t)$ непрерывно зависит от корней функции $W(\lambda)$, когда они изменяются внутри контура Г.

Лемма 3. *Для любого полинома Дирихле* $P(x)$, *образованного по системе* (1.8), *имеет место интегральное представление*

$$P(z) = \int_0^{\infty} K(z, t) P(t)\, dt \quad (z \in C). \qquad (1.11)$$

Так как рассматриваемый оператор линеен, то достаточно доказать лемму для одночленов вида

$$P(t) = t^s e^{-\lambda_k t}, \; 0 \leqslant s < m_k.$$

Имеем

$$\int_0^{\infty} K(z, t) t^s e^{-\lambda_k t}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda z}}{W(\lambda)} \overline{\left\{ \frac{s!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{W(\zeta)(\zeta + \overline{\lambda})(\zeta + \overline{\lambda}_k)^{s+1}} \right\}}\, d\lambda. \qquad (1.12)$$

Заметим, что при фиксированном $\lambda \in \Gamma$ рациональная функция

$$R(\zeta) = \frac{1}{W(\zeta)(\zeta + \overline{\lambda})(\zeta + \overline{\lambda}_k)^{s+1}},$$

как функция от ζ, вне контура Г имеет единственный и притом простой полюс в точке $\zeta = -\overline{\lambda}$. Кроме того, при $\zeta \to \infty$, $R(\zeta)$ имеет порядок $O(\zeta^{-2})$.

Следовательно, согласно теореме о вычетах, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\zeta)\, d\zeta = -\operatorname{Res}(R(\zeta), -\overline{\lambda}) = -\frac{1}{W(-\overline{\lambda})(\overline{\lambda}_k - \overline{\lambda})^{s+1}}.$$

Подставляя полученное значение интеграла в (1.12) и учитывая тождество $W(\lambda)\overline{W(-\overline{\lambda})} = 1$, имеем

$$\int_0^{\infty} K(z, t) t^s e^{-\lambda_k t} dt = \frac{-s!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda z}\, d\lambda}{(\lambda_k - \lambda)^{s+1}} = z^s e^{-\lambda_k z}.$$

Лемма доказана.

Приступим теперь к построению порожденной системой (1.8) биортогональной системы. Для этого отметим сперва, что если функции $e_1(x)$, $e_2(x), \cdots$, $e_n(x)$ образуют линейно независимую систему в пространстве $L_2(0, \infty)$, а система $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$, $\varphi_k \in L_2(0, \infty)$ такая, что для функций $e_m(x)$, $m=1, 2, \cdots, n$, имеет место равенство

$$e_m(x) = \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^n e_k(x) \overline{\varphi_k(t)} \right) e_m(t)\, dt, \tag{1.13}$$

то эти системы биортогональны. Поэтому остается представить ядро $K(x, t)$ в виде

$$\sum_{k=1}^n c_k(x) \overline{\varphi_k(t)},$$

где роль системы $\{e_k(x)\}$ выполняет система (1.8). Чтобы найти коэффициенты при $e_k(x)$, функцию $K(x, t)$ представим в виде

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{e^{-\lambda x}}{W(\lambda)} \overline{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{-\zeta t}\, d\zeta}{W(\zeta)(\zeta + \overline{\lambda})} \right\}} d\lambda, \tag{1.14}$$

где c_k — окружность с центром в точке λ_k, не охватывающая корней функции $W(\lambda)$, отличных от λ_k.

Вместо функции $e^{-\lambda x}$, подставив ее разложение

$$e^{-\lambda x} = e^{-\lambda_k x} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} (\lambda - \lambda_k)^j x^j,$$

получим

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{e^{-\lambda_k x}}{W(\lambda)} \sum_{j=0}^{m_k - 1} \frac{(-1)^j}{j!} (\lambda - \lambda_k)^j x^j \overline{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{-\zeta t}}{W(\zeta)(\zeta + \overline{\lambda})} \right\}} d\lambda.$$

Отсюда следует, что коэффициент при $x^s e^{-\lambda_k x}$ будет

$$\overline{\varphi_{ks}(t)} = \frac{(-1)^s}{s!} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s}{W(\lambda)} \overline{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{-\zeta t}\, d\zeta}{W(\zeta)(\zeta + \overline{\lambda})} \right\}} d\lambda. \tag{1.15}$$

Рассуждая так же, как и при выводе формулы (1.15), мы убедимся, что функции $\varphi_{ks}(t)$ принадлежат линейной оболочке системы (1.8).

Таким образом, доказана

Лемма 2*. *Системы функций*

$$\{x^s e^{-\lambda_k x}\} \text{ и } \{\varphi_{ks}(x)\}, \; k = 1, 2, \cdots, p; \; s = 0, 1, \cdots, m_k - 1,$$

биортогональны в пространстве $L_2(0, \infty)$ и порождают друг друга. При этом имеет место равенство

$$\sum_{k, s} x^s e^{-\lambda_k x} \overline{\varphi_{ks}(t)} = K(x, t).$$

Комбинируя эту лемму с доказанной во введении теоремой, получаем следующий результат.

Теорема 1. *В пространстве $L_2(0, \infty)$ ортопроектор P на подпространство, порожденное системой* (1.8), *представляется в виде*

$$(Pf)(x) = \int_0^\infty K(x, t) f(t)\, dt.$$

1.3. Рассмотрим теперь конечную систему Мюнца в пространстве $L_2(0, 1)$:

$$\{x^{\mu_k}\}_{k=1}^n, \quad \operatorname{Re} \mu_k > -\frac{1}{2}, \tag{1.16}$$

где $\mu_1, \cdots, \mu_n$ — различные между собой комплексные числа. Чтобы построить порожденную биортогональную систему, мы воспользуемся следующим фактом:

Взаимно однозначное соответствие между пространствами $L_2(0,1)$ и $L_2(0, \infty)$, задаваемое формулой

$$f(t) = F(e^{-t})\, e^{-t/2}, \tag{1.17}$$

является изоморфизмом этих пространств.

Так как с помощью преобразования (1.17) система функций (1.16) переходит в систему

$$\left\{ e^{-\left(\mu_k + \frac{1}{2}\right) t} \right\}_1^n,$$

то согласно лемме 2, для системы (1.16), порожденной биортогональной системой будет система функций

$$\varphi_k(x) = \frac{x^{-1/2}}{W'(\lambda_k)} \sum_{m=1}^n \frac{x^{\lambda_m}}{W'(\lambda_m)(\bar{\lambda}_k + \lambda_m)}, \tag{1.18}$$

где произведение Бляшке $W(\lambda)$ образуется для последовательности $\lambda_k = \mu_k + \frac{1}{2}$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

В случае кратных корней функции $W(\lambda)$ система (1.16) заменяется системой

$$\left\{ x^{\mu_k}, x^{\mu_k}\left(\ln \frac{1}{x}\right), \cdots, x^{\mu_k}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{m_k - 1} \right\}_{k=1}^p. \tag{1.19}$$

С помощью преобразования (1.17) эта система переходит в систему

$$\left\{ e^{-\left(\mu_k + \frac{1}{2}\right) t}, te^{-\left(\mu_k + \frac{1}{2}\right) t}, \cdots, t^{m_k - 1} e^{-\left(\mu_k + \frac{1}{2}\right) t} \right\}_{k=1}^p.$$

Следовательно, согласно лемме 2*, порожденной (1.19) биортогональной системой будет система функций

$$\varphi_{ks}(x) = \frac{(-1)^s}{s!} x^{-1/2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{x^\zeta}{W(\zeta)} \overline{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\lambda - \lambda_k)^s\, d\lambda}{W(\lambda)(\bar{\zeta} + \lambda)} \right\}}\, d\zeta.$$

Перефразируем теорему 1 для системы (1.19).

Теорема 1'. *В пространстве $L_2(0, 1)$ ортопроектор P на подпространство, порожденное системой (1.19), представляется в виде*

$$(PF)(x) = \int_0^1 K_1(x, t) F(t)\, dt, \tag{1.20}$$

где

$$K_1(x, t) = (xt)^{-1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{x^\lambda}{W(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{t^\zeta d\zeta}{W(\zeta)(\zeta + \overline{\lambda})} \right\} d\lambda,$$

$$W(\lambda) = \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{\lambda - \mu_k - \frac{1}{2}}{\lambda + \overline{\mu}_k + \frac{1}{2}} \right)^{m_k},$$

Γ — замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий все корни функции $W(\lambda)$

В качестве приложения теоремы 1' приведем конструктивное доказательство одной теоремы Ньюмана [3].

Нам понадобится следующая

Лемма 4. *Преобразование Меллина разности $\overline{F(x)} - \overline{(PF)(x)}$ можно представить в виде*

$$\int_0^1 \overline{[F(x) - (PF)(x)]}\, x^{\lambda - \frac{1}{2}} dx = \frac{W(\lambda)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\widehat{F}(\zeta)\, d\zeta}{W(\zeta)(\zeta - \lambda)},$$

где

$$\widehat{F}(\zeta) = \int_0^1 \overline{F(x)}\, x^{\zeta - \frac{1}{2}} dx,$$

а λ находится внутри контура Γ.

Доказательство. Подставляя выражение $(PF)(x)$ из (1.20) и изменив порядок интегрирования, получим

$$H(\lambda) = \int_0^1 \overline{(PF)(x)}\, x^{\lambda - \frac{1}{2}} dx = \int_0^1 \overline{F(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{t^{\zeta - \frac{1}{2}} d\zeta}{W(\zeta)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\mu}{W(\mu)(\mu + \overline{\zeta})(\mu + \overline{\lambda})} \right\} dt.$$

Применяя теорему о вычетах, имеем

$$H(\lambda) = \int_0^1 \overline{F(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{t^{\zeta - \frac{1}{2}} d\zeta}{W(\zeta)} \times$$

$$\times \overline{\left\{ -\frac{1}{W(-\overline{\zeta})(-\overline{\zeta} + \overline{\lambda})} - \frac{1}{W(-\overline{\lambda})(-\overline{\lambda} + \overline{\zeta})} \right\}} dt.$$

Изменив в последнем интеграле порядок интегрирования, получим утверждение леммы.

Теорема (Ньюман [3]). *Рассмотрим систему* (1.19) *при условии* $\mu_1=0$. *Если* $F\in L_2(0,\,1)$ *абсолютно непрерывна и* $\|F'\|\leqslant 1$, *то*

$$\|F-PF\|\leqslant \max_{-\infty<y<\infty}\left|\frac{1}{iy+\frac{1}{2}}\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{iy-\mu_k+\frac{1}{2}}{iy+\bar{\mu}_k+\frac{3}{2}}\right)^{m_k}\right|,$$

где PF — *проекция функции* F *на подпространство, порожденное системой* (1.19).

Доказательство. Так как преобразование Меллина

$$\hat{F}(\zeta)=\int_0^1\overline{F(x)}\,x^{\zeta-\frac{1}{2}}\,dx$$

представляет собой изоморфизм пространств $L_2(0,\,1)$ и H_2 в правой полуплоскости (см., например, [6], глава I), то имеем

$$d=\|F-PF\|_{L_2}=\left\|\int_0^1\overline{[F(x)-(PF)(x)]}\,x^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dx\right\|_{H_2}.$$

Применяя лемму 4 и учитывая равенство $|W(\lambda)|=1$, при $\operatorname{Re}\lambda=0$, получим

$$d=\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\hat{F}(\zeta)\,d\zeta}{W(\zeta)(\zeta-\lambda)}\right\|_{H_2}. \tag{1.21}$$

С другой стороны, имеем

$$d^2=\int_0^1F(x)\,\overline{[F(x)-(PF)(x)]}\,dx=\int_0^1F(x)\,d\int_0^x\overline{[F(t)-(PF)(t)]}\,dt=$$

$$=-\int_0^1F'(x)\left\{\int_0^x\overline{[F(t)-(PF)(t)]}\,dt\right\}dx\leqslant\left\|\int_0^x\overline{[F(t)-(PF)(t)]}\,dt\right\|_{L_2}=$$

$$=\left\|\int_0^1x^{\lambda-\frac{1}{2}}\left\{\int_0^x\overline{[F(t)-(PF)(t)]}\,dt\right\}dx\right\|_{H_2}=$$

$$=\left\|\frac{1}{\lambda+\frac{1}{2}}\int_0^1\overline{[F(x)-(PF)(x)]}\,x^{\lambda+\frac{1}{2}}\,dx\right\|_{H_2}.$$

Применяя лемму 4, получим

$$d^2 = \left| \frac{W(\lambda+1)}{2\pi i\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{\Gamma} \frac{\widehat{F}(\zeta)\, d\zeta}{W(\zeta)(\zeta-\lambda-1)} \right|_{H_2} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\lambda=iy} \left| \frac{W(\lambda+1)}{\lambda+\frac{1}{2}} \right| \cdot \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\widehat{F}(\zeta)\, d\zeta}{W(\zeta)(\zeta-\lambda)} \right\|_{H_2}. \tag{1.22}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что если $f \in H_2$, то

$$\|f_x(y)\|_{L_2} = \|f(x+iy)\|_{L_2}, \quad x > 0,$$

— убывающая функция.

Утверждение теоремы следует из (1.21) и (1.22).

§ 2. Экстремальные оценки

В этом параграфе, используя построенный аппарат, мы получим экстремальные оценки для полиномов Дирихле и Мюнца. Сначала докажем вспомогательное предложение.

Лемма 5. *Пусть разложение функции*

$$\frac{1}{W(\lambda)} = \prod_{k=1}^{p} \frac{\lambda+\overline{\lambda}_k}{\lambda-\lambda_k}$$

в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки будет

$$\frac{1}{W(\lambda)} = 1 + \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda^2} + \frac{a_3}{\lambda^3} + \cdots.$$

Тогда

$$a_1 = \sum_{k=1}^{p} (\lambda_k + \overline{\lambda}_k),$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k + \overline{\lambda}_k)\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k^2 - \overline{\lambda}_k^2),$$

$$a_3 = \frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k + \overline{\lambda}_k)\right]^3 + \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k + \overline{\lambda}_k)\right]\left[\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k^2 - \overline{\lambda}_k^2)\right] + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{p} \operatorname{Re} \lambda_k^3.$$

(В этой лемме некоторые из чисел λ_k могут и совпадать).

Для доказательства леммы введем функцию

$$F(\lambda) = \frac{1}{W\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \prod_{k=1}^{p} \frac{1+\overline{\lambda}_k \lambda}{1-\lambda_k \lambda}$$

и найдем первые коэффициенты разложения функции $F(\lambda)$ в ряд Тейлора в окрестности точки нуль.

Имеем

$$F'(\lambda)=F(\lambda)\sum_{k=1}^{p}\frac{1-\lambda\lambda_k}{1+\lambda\bar{\lambda}_k}\cdot\frac{\bar{\lambda}_k(1-\lambda_k\lambda)+\lambda_k(1+\bar{\lambda}_k\lambda)}{(1-\lambda\lambda_k)^2}=$$

$$=F(\lambda)\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k+\bar{\lambda}_k}{(1-\lambda_k\lambda)(1+\bar{\lambda}_k\lambda)}.$$

Введем обозначение

$$S(\lambda)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k+\bar{\lambda}_k}{(1-\lambda_k\lambda)(1+\bar{\lambda}_k\lambda)}.$$

Очевидно, справедливы соотношения

$$F'(\lambda)=F(\lambda)\,S(\lambda),$$

$$F''(\lambda)=F(\lambda)[S^2(\lambda)+S'(\lambda)],$$

$$F'''(\lambda)=F(\lambda)[S^3(\lambda)+3\,S(\lambda)\,S'(\lambda)+S''(\lambda)].$$

Следовательно

$$F'(0)=S(0),$$

$$F''(0)=S^2(0)+S'(0),$$

$$F'''(0)=S^3(0)+3\,S(0)\,S'(0)+S''(0). \tag{2.1}$$

Вычислим $S'(0)$ и $S''(0)$. Для этого заметим, что сумму $S(\lambda)$ можно представить в виде

$$S(\lambda)=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{1-\lambda_k\lambda}-\frac{1}{1+\bar{\lambda}_k\lambda}\right]=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left[(\lambda_k\lambda)^j-(-\bar{\lambda}_k\lambda)^j\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{p}[\lambda_k^{j+1}-(-\bar{\lambda}_k)^{j+1}]\right\}\lambda^j.$$

Отсюда получим

$$S(0)=\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k+\bar{\lambda}_k),\ S'(0)=\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k^2-\bar{\lambda}_k^2),$$

$$S''(0)=2\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k^3+\bar{\lambda}_k^3).$$

Подставляя полученные выражения в (2.1), получим утверждение леммы.

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,\infty)$ обобщенные полиномы Дирихле, образованные по системе (1.8)

$$P(x)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}x^s e^{-\lambda_k x}.$$

Семейство этих полиномов будем обозначать через E.

Теорема 2. *Имеют место равенства*

а)
$$\max_{P\in E}\frac{|P(z)|}{\|P\|}=\sqrt{K(z,z)},$$

где z — произвольное комплексное число. При этом равенство достигается для полинома

$$P_z(t)=\overline{K(z,t)}.$$

(в)
$$\max_{P\in E}\frac{\max\limits_{x<t<\infty}|P(t)|}{\|P\|}=\sqrt{K(x,x)},\quad 0\leqslant x<\infty,$$

где равенство достигается для полинома

$$P_x(t)=\overline{K(x,t)},$$

(с)
$$\max_{P\in E}\frac{\max\limits_{0<t<\infty}|P(t)|}{\|P\|}=\sqrt{2\sum_{k=1}^{p}m_k\operatorname{Re}\lambda_k},$$

причем равенство достигается для полинома

$$P_0(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{-\zeta t}}{W(\zeta)}\,d\zeta,$$

где Γ — замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий все корни функции $W(\lambda)$.

Доказательство. По лемме 3 имеем

$$P(z)=\int_0^\infty K(z,t)\,P(t)\,dt, \tag{2.2}$$

причем $\overline{K(z,t)}$ при любом фиксированном z, представляет собой обобщенный полином Дирихле, образованный по системе (1.8). Применяя неравенство Буняковского, получим

$$|P(z)|\leqslant\|K(z,t)\|\cdot\|P\|, \tag{2.3}$$

где при фиксированном z равенство достигается для обобщенного полинома Дирихле $P_z(t)=\overline{K(z,t)}$.

Подставляя этот полином в (2.2), получим

$$\overline{K(z,z)}=\|K(z,t)\|^2,$$

или, что то же самое, $\|K(z,t)\|=\sqrt{K(z,z)}$.

Вводя полученное значение нормы ядра $K(z,t)$ в неравенство (2.3), получим утверждение а).

Для доказательства утверждения в) достаточно заметить, что функция $K(x,x)$ монотонно убывает на вещественной оси. Действительно (см. (1.10))

$$K(x, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\lambda}{W(\lambda)} \overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-(\zeta+\bar{\lambda})x}}{W(\zeta)(\zeta+\bar{\lambda})} d\zeta\right\}},$$

следовательно,

$$(K(x, x))' = -\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-\lambda x}}{W(\lambda)} d\lambda\right|^2 < 0.$$

Для доказательства утверждения с) заметим (см. (1.10″)), что

$$K(0, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\lambda}{W(\lambda)} \overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar{\lambda})}\right\}}, \tag{2.4}$$

$$\overline{K(0, t)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-\zeta t} d\zeta}{W(\zeta)} \overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\lambda}{W(\lambda)(\bar{\zeta}+\lambda)}\right\}}.$$

Из утверждения в) и из (2.4) следует, что для доказательства с) достаточно проверить равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar{\lambda})} = 1 - \overline{W(\lambda)},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\lambda}{W(\lambda)} = 2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k. \tag{2.5}$$

Первое из этих соотношений непосредственно следует из теоремы о вычетах, а второе—из леммы 5 и теоремы о вычетах.

Теорема 3. *Справедливы следующие соотношения:*

а) $$\max_{P\in E} \frac{|P'(z)|}{\|P\|} = \sqrt{\Phi(z)},$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lambda e^{-\lambda z}}{W(\lambda)} \overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\zeta e^{-\zeta z} d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar{\lambda})}\right\}} d\lambda,$$

z — произвольное комплексное число. Причем равенство в точке z достигается для полинома $P(t) = \overline{K'_z(z, t)}$.

в) $$\max_{P\in E} \frac{\max\limits_{x<t<\infty} |P'(t)|}{\|P\|} = \sqrt{\Phi(x)},\ 0 \leqslant x < \infty,$$

где максимум достигается для полинома $P(t) = K'_x(x, t)$.

с) $$\max_{P\in E} \frac{\max\limits_{0<t<\infty} |P'(t)|}{\|P\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right)^3 - 2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k^3\right\}^{1/2}.$$

При этом максимум достигается для полинома

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(S-\zeta)\, e^{-\zeta t}}{W(\zeta)} d\zeta,$$

где

$$S=2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k.$$

d) $$\left\{\frac{4}{3}\left(\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right)^2-\frac{\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k^3}{3\sum m_k \operatorname{Re}\lambda_k}\right\}^{1/2}\leqslant \max_{P\in E}\frac{\|P'\|}{\|P\|}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{2\left(\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right)^2-\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k^2\right\}^{1/2}.$$

(Оценку, подобную оценке d), в случае $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\dfrac{1}{2}$ установил Шмидт [2]).

Доказательство. В интегральном представлении (1.11) дифференцированием под знаком интеграла получим

$$P'(z)=\int_0^\infty K_z'(z,t)\ P(t)\,dt, \tag{2.6}$$

причем $\overline{K_z'(z,t)}$ при любом фиксированном z представляет собой обобщенный полином Дирихле, образованный по системе (1.8). Применяя неравенство Буняковского, получим

$$|P'(z)|\leqslant\|K_z'(z,t)\|\cdot\|P\|, \tag{2.7}$$

где при фиксированном z равенство достигается для обобщенного полинома Дирихле $P_z(t)=\overline{K_z'(z,t)}$.

Подставляя этот полином в (2.6), получим

$$\Phi(z)=\|K_z'(z,t)\|^2.$$

Подставляя полученное значение нормы в (2.7), получим утверждение a).

Утверждение в) следует из того, что

$$\Phi'(x)=-\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{W(\lambda)}d\lambda\right|<0.$$

Для доказательства утверждения c) нам нужно проверить равенства

$$\Phi(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\zeta d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar\lambda)}\right\}}=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right)^3-2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k^3\right\}, \tag{2.8}$$

$$\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)(\lambda+\bar\zeta)}}=S-\zeta+\frac{\zeta}{W(-\zeta)}. \tag{2.9}$$

Из леммы 5 следует, что в окрестности бесконечно удаленной точки имеет место разложение

$$\frac{\lambda}{W(\lambda)(\lambda+\overline{\zeta})}=1+\frac{a_1-\overline{\zeta}}{\lambda}+\cdots,$$

где $a_1=S=2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k$. Равенство (2.9) непосредственно следует из этого разложения и из теоремы о вычетах. Подставляя значение интеграла (2.9) в (2.8) и еще раз применяя лемму 5, получим требуемый результат.

В утверждении d) оценка снизу достигается для полинома

$$P(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{-\zeta t}\,d\zeta}{W(\zeta)}.$$

Действительно, имеем

$$\|P\|^2=\int_0^{\infty}P(t)\,\overline{P(t)}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\zeta}{W(\zeta)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\lambda}{W(\lambda)(\lambda+\overline{\zeta})}\right\}}.$$

Согласно (2.5), получим

$$\|P\|^2=2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k. \tag{2.10}$$

Для производной имеем

$$\|P'\|^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\zeta d\zeta}{W(\zeta)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)(\lambda+\overline{\zeta})}\right\}}.$$

Согласно (2.8)

$$\|P'\|^2=\frac{1}{3}\left\{\left(2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k\right)^3-2\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re}\lambda_k^3\right\}.$$

Разделив полученное выражение на $\|P\|^2$ и учитывая (2.10), получим требуемый результат.

Чтобы установить оценку сверху в утверждении d), перепишем утверждение a) в виде

$$|P'(x)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\lambda e^{-\lambda x}\,d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\lambda e^{-\zeta x}\,d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\overline{\lambda})}\right\}}\|P\|^2.$$

Интегрируя написанное неравенство в промежутке $(0,\infty)$ и изменяя порядок интегрирования, получим

$$\|P'\|^2\leqslant J\|P\|^2, \tag{2.10'}$$

где

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\zeta d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\overline{\lambda})^2}\right\}}.$$

2—496

Применяя теорему о вычетах, получим

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{-\operatorname{Res}\left(\frac{\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\bar\lambda)},-\bar\lambda\right)-\operatorname{Res}(\cdot\ ,\infty)\right\}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{-\left(\frac{\zeta}{W(\zeta)}\right)_{\zeta=-\bar\lambda}+1\right\}}.$$

Учитывая тождество

$$\frac{1}{W(\zeta)}=\overline{W(-\bar\zeta)},$$

имеем

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)}\overline{(\zeta\,\overline{W(-\bar\zeta)})'_{\zeta=-\bar\lambda}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda d\lambda}{W(\lambda)}\lambda W'(\lambda).$$

Применяя лемму 5, имеем

$$J=a_2-\sum_{k=1}^{p}m_k\lambda_k^2=2\left(\sum_{k=1}^{p}m_k\operatorname{Re}\lambda_k\right)^2-\sum_{k=1}^{p}m_k\operatorname{Re}\lambda_k^2.$$

Подставляя полученное значение интеграла в (2.10′), придем к оценке сверху в утверждении d).

Соответствующие теоремы для систем Мюнца доказываются совершенно аналогично, поэтому мы их приведем без доказательства. В этом случае роль леммы 3 выполняет теорема 1′, так что мы будем пользоваться обозначениями (1.20).

Рассмотрим в пространстве $L_2(0, 1)$ обобщенные полиномы Мюнца, образованные по системе (1.19):

$$P(x)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}\,x^{\mu_k}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^s.$$

Семейство этих полиномов обозначим через E_1.

Теорема 2′. *Имеют место равенства*

a) $$\max_{P\in E_1}\frac{|P(z)|}{\|P\|}=\sqrt{K_1(z,z)},$$

где z — произвольная точка на римановой поверхности логарифмической функции.

в) $$\max_{P\in E_1}\frac{\max\limits_{0<t<x}\sqrt{t}\,|P(t)|}{\|P\|}=\sqrt{x\,K_1(x,x)},\quad 0<x\leqslant 1.$$

c) $$\max_{P\in E_1}\frac{\max\limits_{0<t<1}\sqrt{t}\,|P(t)|}{\|P\|}=\left\{2\sum_{k=1}^{p}m_k\operatorname{Re}\left(\mu_k+\frac{1}{2}\right)\right\}^{1/2}.$$

Теорема 3′. *Справедливы следующие соотношения:*

a) $$\max_{P \in E_1} \frac{|P'(z)|}{\|P\|} = \sqrt{\Phi_1(z)},$$

где

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z^{\lambda - 3/2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)}{W(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z^{\zeta - 3/2}\left(\zeta - \frac{1}{2}\right) d\zeta}{W(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})} \right\} d\lambda,$$

z — произвольная точка на римановой поверхности логарифмической функции.

в) $$\max_{P \in E_1} \frac{\max\limits_{0<t<x} t^{3/2} |P'(t)|}{\|P\|} = \sqrt{x^3 \Phi_1(x)}, \; 0<x<1.$$

c) $$\max_{P \in E_1} \frac{\max\limits_{0<t<1} t^{3/2} |P'(t)|}{\|P\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re} \lambda_k \right)^3 - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re} \lambda_k^3 - \frac{1}{2} S \left(S - \frac{1}{2} \right) \right\}^{1/2},$$

$$\lambda_k = \mu_k + \frac{1}{2}; \; S = 2 \sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re} \lambda_k.$$

d) $$\left| \frac{4}{3} \left(\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re} \lambda_k \right)^2 - \frac{1}{3} \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re} \lambda_k^3}{\sum\limits_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re} \lambda_k} - \sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re} \lambda_k \right|^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{P \in E_1} \frac{\|t P'(t)\|}{\|P\|} \leqslant \left\{ 2 \left(\sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re} \lambda_k \right)^2 - \sum_{k=1}^{p} m_k \operatorname{Re} \lambda_k^2 - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{p} m_k \left(\operatorname{Re} \lambda_k - \frac{1}{4} \right) \right\}^{1/2},$$

где оценка снизу имеет место для полинома

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{t^{\zeta - 1/2}}{W(\zeta)} d\zeta.$$

Отметим, что и в последних теоремах можно указать экстремальные полиномы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 19.III.1982

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ. Դիրիխլեի բազմանդամների էքստրեմալ հատկությունները (*ամփոփում*)

Դիրիխլեի և Մյունցի համակարգերի համար կառուցվում են ձևված երկօրթոգոնալ համակարգեր։ Բացահայտվում է նշված համակարգերի կապը մոտարկման խնդիրների հետ։ Բեր-

վում է դիֆերենցելի ֆունկցիաները Մյունցի բազմանդամներով մոտարկման վերաբերյալ Նյումանի թեորեմի մի նոր կոնստրուկտիվ ապացույց։

Այնուհետև, օգտագործելով կառուցված ապարատը ապացուցվում են զանազան գնահատականներ Դիրիխլեի և Մյունցի բազմանդամների ու նրանց ածանցյալների վերաբերյալ։ Վերջինները հանդիսանում են Մարկովի, Բեռնշտայնի և Շմիդտի դասական գնահատականների անալոգները։

V. Kch. MUSOIAN. *Extremal properties of Dirichlet polynomials* (summary)

For finite systems of Dirichlet and Muntz the biorthogonal generated systems are constructed and the connection of mentioned systems with approximation problems is revealed. A constructive proof of Newman's theorem on approximation of differentiable functions by Muntz polynomials is given.

Then, using the constructed apparatus various estimates concerning the Dirichlet and Muntz polynomials and their derivatives are proved. These are the analogues of the classical estimates of Markov, Bernstein and Schmidt.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Schwartz.* Etude des sommes d'exponentielles.— 2[e] ed., Actual. scient. et industr., № 959, Paris, Hermann, 1959.
2. *E. Schmidt.* Math. Annal 119, 1944, 165—209.
3. *T. Ganelius and D. Newman.* Müntz—Jackson theorems in all L^p spaces with unrestricted exponents, American journal of Math., 98, 1976, 295—309.
4. *М. М. Джрбашян.* Примыкание и единственность рядов типа Дирихле на вещественной оси, Изв. АН Арм. ССР, Математика, 7, № 4, 1972, 258—274.
5. *М. М. Джрбашян.* Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций, Мат. сб. 114 (156), № 1, 1981, 3—84.
6. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.