ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 3, 1983 Математика

УДК 517.51

П. ОСВАЛЬД

О СКОРОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ СРЕДНИМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ В МЕТРИКЕ $L_p\,(0<p<1)$

Введение

Пусть $L_p \equiv L_p(a, b)$ — класс всех измеримых на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L_p(a,b)} = \left\{\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} < \infty.$$

В интересующем нас случае $0<p<1$ класс L_p является квазибанаховым пространством с квазинормой $\|\cdot\|_p$. А. А. Талалян [1] установил следующий принципиальный результат о возможности представления функций ортогональными рядами в L_p.

Теорема А. *Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k\geq1}$ — полная ортонормированная система. Тогда для любой функции $f(x)\in L_p$, $0<p<1$, существует ряд $\sum\limits_{k\geq1} a_k\varphi_k(x)$, для которого*

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot\varphi_k\right\|_p = o(1),\ n\to\infty. \tag{1}$$

Этот ряд неединственен, ибо существует нетривиальный ряд $\sum\limits_{k\geq1} b_k\varphi_k(x)$, являющийся нуль-рядом в L_p для всех $0<p<1$:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k\right\|_p = o(1),\ n\to\infty\ \left(\sum_{k\geq1} b_k^2>0\right). \tag{2}$$

В [2] для частного случая системы Хаара исследовался вопрос о возможной скорости приближения в (1) в зависимости от гладкости представляемой функции $f(x)$. Сформулируем основной результат работы [2]. Через $\{\chi_k(x)\}_{k\geq1}$ обозначим систему Хаара, а через

$$\omega(t, f)_p = \sup_{0<h<t}\left\{\int\limits_0^{1-h} |f(x)-f(x+h)|^p\,dx\right\}^{1/p},\ 0\leq t\leq1,$$

модуль непрерывности функции $f(x)\in L_p(0,1)$.

Теорема В. *Пусть $f(x)\in L_p(0,1)$, $0<p<1$. Тогда существует ряд $\sum\limits_{k\geq1} a_k\cdot\chi_k(x)$, для которого справедлива оценка*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k \right\|_p \leqslant C_p \cdot n^{-1/p+1} \left\{ \int\limits_{(n+1)^{-1}}^{1} \frac{\omega(t, f)_p^p}{t^{2-p}} dt \right\}^{1/p}, \quad n \geqslant 1. \tag{3}$$

Если дополнительно выполняется условие

$$\int\limits_0^1 \omega(t, f)_p^p \cdot t^{p-2}\, dt < \infty, \tag{4}$$

то функция $f(x) \in L_1(0, 1)$ *и для ее ряда Фурье—Хаара* $\sum\limits_{k \geqslant 1} a_k(f) \times \times \chi_k(x)$ *имеет место более сильная оценка*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cdot \chi_k \right\|_p \leqslant C_p \cdot n^{-1/p+1} \left\{ \int\limits_0^{(n-1)^{-1}} \frac{\omega(t, f)_p^p}{t^{2-p}} dt \right\}^{1/p}, \quad n \geqslant 1. \tag{5}$$

Как показано в [2], оценки (3) и (5) позволяют во многих случаях получить точную информацию о возможной скорости приближения при представлении рядами Хаара в L_p, $0 < p < 1$. Аналогичные вопросы рассматривались также для неортонормированной системы Фабера—Шаудера в L_p, $0 < p < \infty$.

Что касается других конкретных полных ортонормированых систем, то нам неизвестны усиления теоремы А в указанном направлении. В частности, не исследована скорость представления функций из $L_p(0, 2\pi)$, $0 < p < 1$, тригонометрическими рядами (см. замечания в конце работы). В данной работе модификацией подхода из [2] получены некоторые результаты о скорости суммируемости тригонометрических рядов

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l \cdot e^{ilx}, \quad b_{-l} = \bar{b}_l, \quad l \geqslant 0, \tag{6}$$

средними Фейера $\sigma_n(x) = \sum\limits_{l=-n}^{n} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l\, e^{ilx}$ и средними Валле Пуссена $v_n(x) = 2\sigma_{2n}(x) - \sigma_n(x)$, $n \geqslant 1$, к функциям из $L_p(0, 2\pi)$, $\frac{1}{2} < p < 1$. Основным утверждением является следующий аналог теоремы В.

Пусть

$$\omega_m^*(t, f)_p = \sup_{0 < h < t} \left\{ \int\limits_0^{2\pi} |\Delta_h^m f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

— периодический модуль непрерывности порядка $m \geqslant 1$.

Теорема. *Пусть* $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $\frac{1}{2} < p < 1$. *Тогда существует тригонометрический ряд* (6), *который суммируется к* $f(x)$ *методом Валле Пуссена со скоростью*

$$\| f - v_n \|_p \leqslant C_{p, m} \cdot n^{-1/p+1} \left\{ \int\limits_{n^{-1}}^{\pi} \frac{\omega_m^*(t, f)_p^p}{t^{2-p}} dt \right\}^{1/p}, \quad n \geqslant 1. \tag{7}$$

Если же выполнено условие

$$\int_0^{\pi} \overset{*}{\omega}_m (t, f)_p^p \cdot t^{p-2}\, dt < \infty, \tag{8}$$

то, как известно, $f(x) \in L_1 (0, 2\pi)$ *и средние Валле Пуссена* $v_n f(x)$ *ряда Фурье этой функции удовлетворяют оценке*

$$\|f - v_n f\|_p \leqslant C_{p, m} \cdot n^{-1/p+1} \left\{ \int_0^{n^{-1}} \frac{\overset{*}{\omega}_m (t, f)_p}{t^{2-p}}\, dt \right\}^{1/p}, \quad n \geqslant 1. \tag{9}$$

Дальнейший план работы таков. Сначала приводится в основном известный вспомогательный материал из теории приближения в классах L_p, $0<p<1$. Затем доказывается теорема, сформулированная выше, приводится также ряд примыкающих результатов. В замечаниях в конце работы обсуждаются некоторые открытые проблемы.

Автору приятно поблагодарить член-корреспондента АН Арм.ССР А. А. Талаляна и его коллег за полезные обсуждения во время его пребывания в г. Ереване.

§ 1. Вспомогательные сведения

Всюду в этой работе через C, $C_p, \cdots$ обозначены положительные постоянные, зависящие только от указанных параметров и, вообще говоря, различные в разных местах изложения. Все функции считаются измеримыми и 2π-периодическими.

Пусть $0<p<1$ и $f(x)$, $g(x) \in L_p$. Без дальнейшего упоминания мы будем пользоваться неравенством

$$\|f + g\|_p^p \leqslant \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$$

и следующими простыми свойствами модулей непрерывности (см. [3], [4] при $m=1$, [5] при $m>1$)

$$\overset{*}{\omega}_m (t, f+g)_p^p \leqslant \overset{*}{\omega}_m (t, f)_p^p + \overset{*}{\omega}_m (t, g)_p^p,$$

$$0 \leqslant \overset{*}{\omega}_m (\tau, f)_p \leqslant \overset{*}{\omega}_m (t, f)_p,$$

$$t^{-m+1-1/p} \cdot \overset{*}{\omega}_m (t, f)_p \leqslant C_{m,p}\, \tau^{-m+1-1/p} \cdot \overset{*}{\omega}_m (\tau, f)_p,$$

где $0<\tau<t\leqslant\pi$. Кроме того, из прямых и обратных теорем для приближения тригонометрическими полиномами [3], [4], [6] вытекает при $1\leqslant k<m$ неравенство типа Маршо

$$\overset{*}{\omega}_k (\tau, f)_p \leqslant C_{m,p} \cdot \tau^{-k} \left\{ \overset{*}{\omega}_m (\pi, f)_p^p + \int_{\tau}^{\pi} t^{-kp-1}\, \overset{*}{\omega}_m (t, f)_p^p\, dt \right\}^{1/p}. \tag{10}$$

Введем классы Липшица

$$\mathrm{Lip}^* (s, p, m) = \{ f(x) \in L_p (0, 2\pi) \colon \overset{*}{\omega}_m (t, f)_p = O(t^{-s}),\ t \to 0 \}.$$

В силу указанных свойств модулей непрерывности естественно рассмотреть только случай $0 < s \leqslant m + 1/p - 1$. Кроме того, при $0 < s < k < m$ имеем $\mathrm{Lip}^*(s, p, k) = \mathrm{Lip}^*(s, p, m)$. В дальнейшем в случае $m = 1$ индекс m в обозначениях опускаем.

Всюду ниже пусть $T_n(x) = \sum_{l=-n}^{n} b_l \cdot e^{ilx}$ — произвольный тригонометрический полином порядка $\leqslant n$ ($b_{-l} = \bar{b}_l$, $l = 0, \cdots, n$, $n \geqslant 0$). Следующее утверждение доказано Э. А. Стороженко [7] и В. И. Ивановым.

Лемма 1. *При $m \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\omega_m^*(t, T_n)_p \leqslant C_p \cdot (nt)^m \cdot \omega_m^*(\pi/n, T_n)_p, \quad 0 < t \leqslant \pi/n, \; n \geqslant 1, \; 0 < p < 1.$$

Приведем набросок доказательства. В [3], лемма 3.1, установлено, что

$$\|\Delta_h^1 T_n\|_p \leqslant C_p \cdot h \|T_n'\|_p, \quad 0 \leqslant h \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

Для получения обратной оценки используем представление

$$T_n'(x) = h^{-1} \cdot \Delta_h^1 T_n(x) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot T_n^{(k)}(x) \cdot h^{k-1}, \quad x \in [0, 2\pi), \; h > 0,$$

вытекающее из разложения Тейлора для $T_n(x+h)$, и применим неравенство типа Бернштейна (см. [3], [4]):

$$\|T_n'\|_p^p \leqslant h^{-p} \|\Delta_h^1 T_n\|_p^p + \left(\sum_{k=2}^{\infty} (k!)^{-p} (C_p n h)^{(k-1)p} \right) \cdot \|T_n'\|_p^p.$$

Следовательно

$$h \|T_n'\|_p \leqslant 2 \cdot \|\Delta_h^1 T_n\|_p, \quad 0 < h \leqslant C_p \cdot n^{-1}$$

и индукцией устанавливается, что

$$C'_{p,m} \cdot h^m \|T_n^{(m)}\|_p < \|\Delta_h^m T_n\|_p \leqslant C_{p,m} h^m \|T_n^{(m)}\|_p, \quad 0 < h \leqslant C_p \cdot n^{-1}.$$

Отсюда уже непосредственно вытекает утверждение леммы.

Ниже часто применяется неравенство типа Никольского

$$\|T_n\|_1 \leqslant C_p \cdot (n+1)^{1/p-1} \cdot \|T_n\|_p, \quad 0 < p < 1, \; n \geqslant 0, \tag{11}$$

которое может быть доказано по схеме, изложенной в [8] для вывода подобных неравенств. Нам понадобится также другое неравенство в разных метриках, вытекающее из результатов Э. А. Стороженко [9] (см. также [10], [2]).

Лемма 2. *Если* $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $0 < p < 1$, *при некотором* $m \geqslant 1$ *удовлетворяет условию* (8), *то* $f(x) \in L_1(0, 2\pi)$ *и справедлива оценка* ($0 < b - a \leqslant 2\pi$)

$$\left(\int_a^b |f(x)|\, dx \right)^p \leqslant C_{m,p} \left\{ (b-a)^{p-1} \int_a^b |f(x)|^p dx + \int_0^{\frac{b-a}{m}} \frac{\int_a^{b-mh} |\Delta_h^m f(x)|^p dx}{h^{2-p}}\, dh \right\}. \tag{12}$$

Лемма 3. *Для любой функции* $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $0 < p < 1$, *имеем*

$$\left\{\int_0^{2\pi} |T_n(x) \cdot f((2n+1)x)|^p \, dx\right\}^{1/p} \leqslant C_p \cdot \|T_n\|_p \cdot \|f\|_p, \quad n > 0.$$

Доказательство. Используем одно неравенство, вытекающее из интегральных представлений для тригонометрических полиномов (см. [11], лемма 2):

$$|T_n(x)| \leqslant C_r \cdot (n+1)^{-2r} \cdot \int_0^{2\pi} |T_n(t)| \cdot |D_n(x-t)|^{2r+1} \, dt, \quad r = 1, 2, \cdots,$$

где $D_n(t) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{t}{2}\right)^{-1}$ — ядро Дирихле. Применяя неравенство типа Никольского (11), получим

$$|T_n(x)|^p \leqslant C_{r,p} (n+1)^{-(2r+1)p+1} \int_0^{2\pi} |T_n(t)|^p \, |D_n(x-t)|^{(2r+1)p} \, dt.$$

Отсюда

$$\|T_n(x) \cdot f((2n+1)x)\|_p^p = \int_0^{2\pi(2n+1)^{-1}} |f((2n+1)x)|^p \cdot \sum_{j=1}^{2n+1} \left| T_n\left(x + \frac{2\pi j}{2n+1}\right)\right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{r,p} \cdot (n+1)^{-(2r+1)p+1} \cdot \int_0^{2\pi(2n+1)^{-1}} |f((2n+1)x)|^p \times$$

$$\times \left(\int_0^{2\pi} |T_n(t)|^p \left\{ \sum_{j=1}^{2n+1} \left| D_n\left(x - t + \frac{2\pi j}{2n+1}\right)\right|^p \right\} dt \right) dx.$$

Если выбрать $r = r(p)$ так, чтобы выполнялось $(2r+1)p > 1$, то в силу свойств ядра $D_n(t)$ имеем

$$\left\{\sum_{j=1}^{2n+1} \cdots \right\} \leqslant C_p \cdot (n+1)^{(2r+1)p} \cdot \sum_{j \geqslant 1} j^{-(2r+1)p} \leqslant C_p (n+1)^{(2r+1)p}, \quad n \geqslant 0.$$

Следовательно

$$\|T_n(x) \cdot f((2n+1)x)\|_p^p \leqslant C_p \cdot (n+1) \int_0^{2\pi(2n+1)^{-1}} |f((2n+1)x)|^p \, dx \cdot \|T_n\|_p^p,$$

что и доказывает утверждение леммы 3.

В дальнейшем через $E_n(f)_p$ обозначим наилучшие приближения и через $T_n^*(x)$ — соответствующие тригонометрические полиномы наилучшего приближения функции $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, т. е.

$$E_n(f)_p = \inf_{T_n(x)} \|f - T_n\|_p = \|f - T_n^*\|_p, \ n \geqslant 0.$$

Справедливо следующее неравенство типа Джексона (см. [3], [4], при $m=1$, [6], при $m>1$).

Лемма 4. *Пусть* $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $0<p<1$, $m \geqslant 1$. *Тогда*

$$E_n(f)_p \leqslant C_{m,p}\, \omega_m^*\left(\frac{1}{n+1}, f\right)_p, \ n \geqslant 0.$$

Отметим, что большинство приведенных фактов является аналогом хорошо известных утверждений для случая $1 \leqslant p < \infty$ (см. [8]).

Остановимся еще на некоторых свойствах средних Фейера. Если $f(x) \in L_1(0, 2\pi)$, то средние Фейера ряда Фурье этой функции обозначим через $\sigma_n f(x)$, $n \geqslant 1$. Как известно

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\cdot K_n(t)\,dt, \ K_n(t) = \frac{1}{2n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\|K_n\|_p \leqslant C_p\cdot n^{1-1/p}, \ n>1, \ \frac{1}{2}<p<1. \tag{13}$$

Справедлива также

Лемма 5. *Пусть* $\frac{1}{2}<p<1$, $n \geqslant 1$. *Тогда*

$$\|\sigma_n T_k\|_p \leqslant C_p\cdot \|T_k\|_p, \ k \leqslant n$$

и для любого (комплексного) полинома $P_k(x) = \sum_{l=0}^{k} b_l\cdot e^{ilx}$ *имеем*

$$\|\sigma_n P_k\|_p \leqslant C_p\cdot\|P_k\|_p, \ k \geqslant 0.$$

Второе неравенство доказано еще Харди и Литтльвудом [12] (для произвольных функций из класса H_p, см. также [13]), а первое можно получить из [11] и [13]:

$$\|\sigma_n T_k\|_p^p \leqslant \pi^{-p}\int_0^{2\pi} \|T_k(x-\cdot)\cdot K_n(\cdot)\|_p^p\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C_p(n+k)^{1-p}\cdot\|T_k\|_p^p\cdot\|K_n\|_p^p \leqslant C_p\cdot\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1-p}\|T_k\|_p^p.$$

§ 2 Доказательство основных утверждений

Установим сначала

Предложение 1. *Пусть задан тригонометрический полином*

$$T_k(x) = \sum_{l=-k}^{k} a_l\, e^{ilx}, \ a_{-l} = \bar{a}_l, \ l=0,\cdots,k, \ k \geqslant 0.$$

Тогда при $\frac{1}{2}<p<1$ *средние Фейера* $\sigma_n(x)$ *ряда* (6), *определяемого соотношением*

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l e^{ilx} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i(2k+1)jx} \cdot T_k(x),$$

удовлетворяют оценке

$$\|\sigma_n\|_p \leqslant C_p (r+1)^{-1/p+1} \|T_k\|_p, \quad r=\left[\frac{n-k}{2k+1}\right], \quad n>k. \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим тригонометрический полином

$$T_{(r)}(x) = \sum_{j=-r}^{r} \left(1-\frac{(2k+1)\cdot|j|+k}{n}\right) e^{i(2k+1)jx} \cdot T_k(x).$$

В силу леммы 3 имеем

$$\|T_{(r)}\|_p \leqslant C_p \cdot \|T_k\|_p \cdot \left\| \sum_{j=-r}^{r} \left(1-\frac{(2k+1)\,|j|+k}{n}\right) e^{ijx} \right\|_p .$$

Но согласно известному тождеству

$$\sum_{j=-r}^{r} a_{|j|} \cdot e^{ijx} = \sum_{m=0}^{r} (m+1)\cdot \Delta^2 a_m \cdot K_{m+1}(x), \quad \Delta^2 a_m = a_m - 2a_{m+1} + a_{m+2},$$

для второго множителя получим (ср. (13) и определение числа r)

$$\left\| \sum_{j=-r}^{r} \left(1-\frac{(2k+1)\cdot|j|+k}{n}\right) e^{ijx} \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant (r+1)^p \left(\frac{2k+1}{n}\right)^p (\|K_r\|_p^p + \|K_{r+1}\|_p^p) \leqslant C_p \cdot (r+1)^{p-1}.$$

Итак

$$\|T_{(r)}\|_p \leqslant C_p \|T_k\|_p \cdot (r+1)^{-1/p+1}, \quad r=\left[\frac{n-k}{2k+1}\right], \quad n>k. \tag{15}$$

Сейчас рассмотрим разность

$$\sum_{l=-n}^{n} \left(1-\frac{|l|}{n}\right) b_l e^{ilx} - T_{(r)}(x) = \sum_{l=-k}^{k} \frac{k-|l|}{n} a_l e^{ilx} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} e^{i(2k+1)jx} \sum_{l=-k}^{k} \frac{k-l}{n} a_l e^{ilx} + \sum_{j=-1}^{-r} e^{i(2k+1)jx} \sum_{l=-k}^{k} \frac{k+l}{n} a_l e^{ilx} +$$

$$+ e^{i(2k+1)(r+1)x} \left(\sum_{l=-k}^{n-(2k+1)(r+1)} \left(1-\frac{(2k+1)(r+1)+l}{n}\right) a_l e^{ilx} \right) +$$

$$+ e^{-i(2k+1)(r+1)x} \left(\sum_{l=(2k+1)(r+1)-n}^{k} \left(1-\frac{(2k+1)(r+1)-l}{n}\right) a_l e^{ilx} \right) =$$

$$= I_0(x) + I_1(x) + I_1^*(x) + I_2(x) + I_2^*(x).$$

Так как $I_0(x)=\frac{k}{n}\sigma_k T_k(x)$, то из леммы 5 следует

$$\|I_0\|_p=\frac{k}{n}\|\sigma_k T_k\|_p\leqslant C_p\cdot(r+1)^{-1}\cdot\|T_k\|_p.$$

Далее, для $I_1(x)$ сначала можно использовать лемму 3, а затем применить лемму 5 для (комплексного) полинома $P_{2k}(x)=\sum\limits_{l=0}^{2k}a_{l-k}e^{ilx}$, что с учетом равенств

$$\sum_{l=-k}^{k}\frac{k-l}{n}a_l e^{ilx}=e^{-ikx}\cdot\frac{2k}{n}\sigma_{2k}P_{2k}(x)\ \text{и}\ \|P_{2k}\|_p=\|T_k\|_p$$

дает

$$\|I_1\|_p\leqslant C_p\cdot\left\|\frac{1-e^{irx}}{1-e^{ix}}e^{ix}\right\|_p\cdot\left\|\sum_{l=-k}^{k}\frac{k-l}{n}a_l e^{ilx}\right\|_p\leqslant$$

$$\leqslant C_p\cdot\frac{k}{n}\cdot\|\sigma_{2k}P_{2k}\|_p\leqslant C_p(r+1)^{-1}\|T_k\|_p.$$

Аналогично оценивается слагаемое $I_1^*(x)$. Наконец, если $k_1\equiv n+k-(2k+1)(r+1)\leqslant 0$, то слагаемого $I_2(x)$ на самом деле нет (т. е. $I_2(x)=0$), а в случае $k_1=1,\cdots,2k-1$ (ср. определение числа r) можно написать

$$I_2(x)=e^{i((2k+1)(r+1)-k)x}\cdot\frac{k_1}{n}\sigma_{k_1}P_{2k}(x),$$

откуда согласно лемме 5 получим $\|I_2\|_p\leqslant C_p(r+1)^{-1}\|T_k\|_p$.

Аналогично рассматривается $I_2^*(x)$. Следовательно, доказано

$$\|\sigma_n-T_{(r)}\|_p\leqslant C_p(r+1)^{-1}\cdot\|T_k\|_p,\ r=\left[\frac{n-k}{2k+1}\right],\ n>k. \tag{16}$$

Соотношения (15), (16), справедливые при $\frac{1}{2}<p<1$, вместе дают искомую оценку (14). Предложение 1 установлено.

Замечание 1. Следует отметить работу В. А. Юдина и В. И. Ивавова [14], в которой доказывается существование последовательности тригонометрических полиномов

$$T_n(x)=\sum_{l=-n}^{n}c_l^{(n)}e^{ilx},\ c_0^{(n)}=1,\ n\geqslant 0,$$

причем

$$\|T_n\|_p=O(n^{-1/p+1}),\ n\to\infty,\ 0<p<1. \tag{17}$$

Оценку (17) нельзя усилить (см. [14]). В самом деле, имеем

$$1=|c_0^{(n)}|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}T_n(x)\,dx\right|\leqslant C_p(n+1)^{-1+1/p}\cdot\|T_n\|_p$$

согласно (11), откуда $n^{-1/p+1} = O(\|T_n\|_p)$, $n \to \infty$, $0 < p < 1$. Неравенство (14) является своего рода модификацией (17) при $\frac{1}{2} < p < 1$ (дополнительно зафиксирована некоторая информация о коэффициентах с номерами l, $|l| \leqslant k$). Из сказанного следует также, что (14) по порядку усилено быть не может.

Предложение 2. *Пусть* $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $\frac{1}{2} < p < 1$. *Тогда существует ряд* (6), *для средних Фейера которого выполнено*

$$\|f - \sigma_n\|_p \leqslant C_p \cdot n^{-1/p+1} \left\{ \int_{n^{-1}}^{\pi} \frac{\omega^*(t, f)_p^p}{t^{2-p}}\, dt \right\}^{1/p}, \quad n \geqslant 1. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $T_n^*(x)$, $n \geqslant 0$, — тригонометрические полиномы наилучшего приближения для $f(x)$. К тригонометрическим полиномам $T_{2^k}(x) = T_{2^k}^*(x) - T_{2^{k-1}}^*(x)$, $k \geqslant 0$*, применим предложение 1 и построим соответствующие ряды $\sum b_l^{(k)} e^{ilx}$. Тогда искомым рядом, удовлетворяющим (18), будет

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l\, e^{ilx} \equiv T_0^*(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|l| > 2^k} b_l^{(k)} e^{ilx} \right).$$

В самом деле, пусть $2^{k_0} \leqslant n < 2^{k_0+1}$, тогда

$$f(x) - \sigma_n(x) = f(x) - T_{2^{k_0}}^*(x) + \sum_{k=0}^{k_0} T_{2^k}(x) + \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{2^k < |l| < n} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l^{(k)} e^{ilx} = f(x) - T_{2^{k_0}}^*(x) + \sum_{k=0}^{k_0} \Bigg(T_{2^k}(x) -$$

$$- \sum_{|l| < 2^k} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l^{(k)} e^{ilx} \Bigg) + \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{|l| < n} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l^{(k)} e^{ilx}.$$

По построению имеем $\|f - T_{2^{k_0}}^*\|_p^p = E_{2^{k_0}}(f)_p^p$, а согласно (14)

$$\left\| \sum_{|l| < n} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l^{(k)} e^{ilx} \right\|_p^p < C_p \left(\left[\frac{n - 2^k}{2^{k+1} + 1} \right] + 1 \right)^{p-1} \cdot \|T_{2^k}\|_p^p \leqslant$$

$$\leqslant C_p \cdot 2^{-(k-k_0)(p-1)} \{E_{2^k}(f)_p^p + E_{2^{k-1}}(f)_p^p\} \leqslant C_p\, 2^{-(k-k_0)(p-1)} \cdot E_{2^{k-1}}(f)_p^p,$$

$$k = 0, \cdots, k_0.$$

Кроме того, с помощью леммы 5 получим для $k = 0, \cdots, k_0$

$$\left\| T_{2^k}(x) - \sum_{|l| < 2^k} \left(1 - \frac{|l|}{n}\right) b_l^{(k)} e^{ilx} \right\|_p^p = \left(\frac{2^k}{n} \|T_{2^k} - \sigma_{2^k} T_{2^k}\|_p \right)^p \leqslant$$

$$\leqslant C_p \cdot 2^{(k-k_0)p}\, E_{2^{k-1}}(f)_p^p.$$

---

* Здесь положено $T_{2^{-1}}(x) \equiv T_0^*(x)$, $E_{2^{-1}}(f)_p \equiv E_0(f)_p$.

Собирая вместе все эти соотношения, имеем $(1/2<p<1)$

$$\|f-\sigma_n\|_p^p\leqslant C_p\left\{E_{2^{k_0}}(f)_p^p+2^{-k_0(1-p)}\sum_{k=0}^{k_0}2^{k(1-p)}E_{2^k-1}(f)_p^p\right\},$$

$$2^{k_0}\leqslant n<2^{k_0+1}, \tag{19}$$

откуда с использованием леммы 4 непосредственно вытекает оценка (18). Предложение 2 доказано.

Замечание 2. Если $f(x)\neq\text{const}$, т. е. $\omega^*(t,f)_p\not\equiv 0$, то ряд, удовлетворяющий (18), неединствен (можно, например, добавить любой ряд, построенный в предложении 1). Как видно из доказательства соотношение (18) справедливо также с заменой $\omega^*(t,f)_p$ на модули непрерывности произвольного порядка $m>1$ (хотя это только кажущееся усиление, ср. (10)).

Перейдем к доказательству теоремы, сформулированной во введении. Первая ее часть содержится в предложении 2 (см. также замечание 2). Установим вторую часть. Пусть для $f(x)\in L_p(0,2\pi)$, $1/2<$ $<p<1$ выполнено свойство (8). Тогда в силу леммы 2 $f(x)\in L_1(0,2\pi)$. При фиксированном $n\geqslant 1$ обозначим $\Delta_k=\left(\frac{(k-1)\pi}{n},\frac{k\pi}{n}\right)$, $k=1,\cdots,n$; и оценим

$$|\sigma_n f(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(|f(x+t)|+|f(x-t)|)\,K_n(t)\,dt\leqslant C\cdot\sum_{k=1}^n\frac{n}{k^2}\int_{\Delta_k}(|f(x+t)|+$$

$$+|f(x-t)|)\,dt.$$

В силу неравенства в разных метриках (12) имеем дальше

$$\|\sigma_n f\|_p^p\leqslant C_p\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^n\frac{n^p}{k^{2p}}\left\{\left(\int_{\Delta_k}|f(x+t)|\,dt\right)^p+\left(\int_{\Delta_k}|f(x-t)|\,dt\right)^p\right\}dx\leqslant$$

$$\leqslant C_p\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=1}^n\frac{n}{k^{2p}}\int_{\Delta_k}(|f(x+t)|^p+|f(x-t)|^p)\,dt+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^n\frac{n^p}{k^{2p}}\int_0^{\pi/nm}h^{p-2}\left(\int_{\Delta_k}(|\dot\Delta_h^m f(x+t)|^p+|\dot\Delta_h^m f(x-t)|^p)\,dt\right)dh\right\}dx.$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\|\sigma_n f\|_p^p\leqslant C_p\left\{n\|f\|_p^p\cdot\sum_{k=1}^n k^{-2p}\int_{\Delta_k}dt+\right.$$

$$\left.+n^p\int_0^{\pi/nm}\frac{\dot\omega_m(h,f)_p^p}{h^{2-p}}dh\cdot\sum_{k=1}^n k^{-2p}\int_{\Delta_k}dt\right\}\leqslant$$

$$< C_p\left\{\|f\|_p^p + n^{p-1}\cdot\int\limits_0^{n^{-1}} t^{p-2}\,\omega_m^*(t, f)_p^p\,dt\right\},\ n\geqslant 1,\ \frac{1}{2}<p<1.$$

Благодаря определению средних Валле Пуссена в виде $v_n f(x) = 2\sigma_{2n} f(x) - \sigma_n f(x)$, такая же оценка верна и для $v_n f(x)$, $n\geqslant 1$. Если соответствующее неравенство применить к $f(x) - T_n^*(x)$ вместо $f(x)$, то получим

$$\|f - v_n f\|_p^p \leqslant \|f - T_n^*\|_p^p + \|v_n(f - T_n^*)\|_p^p \leqslant$$

$$\leqslant C_p\left\{E_n(f)_p^p + n^{p-1}\int\limits_0^{n^{-1}} t^{p-2}\,\omega_m^*(t, f - T_n^*)_p^p\,dt\right\}.$$

Дальше используется неравенство $\omega_m^*(t, f - T_n^*)_p^p \leqslant \omega_m^*(t, f)_p^p + \omega_m^*(t, T_n^*)_p^p$, а лемма 1 дает

$$n^{p-1}\int\limits_0^{n^{-1}} t^{p-2}\,\omega_m^*(t, T_n^*)_p^p\,dt \leqslant C_p n^{(m+1)p-1}\,\omega_m^*\left(\frac{1}{n}, T_m^*\right)_p^p t^{(m+1)p-2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_p\,\omega_m^*\left(\frac{1}{n}, T_n^*\right)_p^p \leqslant C_p\left\{E_n(f)_p^p + \omega_m^*\left(\frac{1}{n}, f\right)_p^p\right\}.$$

Если это подставить в полученное выше выражение и учесть лемму 4, то после несложных преобразований придем к искомой оценке (9), что и требовалось доказать.

Следствием доказанной теоремы является

Предложение 3. *Пусть* $\frac{1}{2} < p < 1$, $m\geqslant 1$, $0 < s \leqslant m + 1/p - 1$. *Тогда для любой функции* $f(x)\in \mathrm{Lip}^*(s, p, m)$ *существует ряд* (6), *средние Валле Пуссена которого удовлетворяют*

$$\|f - v_n\|_p = \begin{cases} O(n^{-s}), & s\neq 1/p - 1,\\ O(n^{-s}(\ln n)^{1/p}), & s = 1/p - 1,\end{cases}\quad n\to\infty. \tag{20}$$

В исключительном случае $s = 1/p - 1$ *указанную в* (20) *оценку нельзя заменить на* $o(n^{-s}\ln n)$, $n\to\infty$.

Доказательство. При $s\leqslant 1/p - 1$ (20) следует из (7), при $s > 1/p - 1$ — из (9). Очевидно также, что порядок в (20) при $s\neq 1/p - 1$ улучшен быть не может.

Осталось привести пример функции $f(x)\in\mathrm{Lip}^*(1/p - 1, p, m)$, для которой

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\|f - v_n\|}{n^{-1/p+1}\cdot\ln n} > 0 \tag{21}$$

для любого ряда (6). Примером может служить функция

$$f(x) = \begin{cases} 4^{-k}, & x\in I_k \equiv (4^{-k}, 2\cdot 4^{-k}),\ k\geqslant 1\\ 0, & x\in(-\pi, \pi]\setminus\bigcup\limits_{k\geqslant 1} I_k,\end{cases}$$

использованная в аналогичных целях уже в [2]. Там фактически установлено, что $f(x) \in \mathrm{Lip}^*(1/p-1, p)$. Но в случае $1/2<p<1$ имеем $0<1/p-1<1$ и поэтому $\mathrm{Lip}^*(1/p-1, p)=\mathrm{Lip}^*(1/p-1, p, m)$, $m>1$.

Далее поступаем так. Введем обобщенные ядра Джексона

$$D_{n,r}(t)=\frac{C_{n,r}}{n^{r-1}}\left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^r, \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_{n,r}(t)\,dt=\pi, \; n>1, \; r>1.$$

Тогда

$$T_{n,r}\,g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,D_{n,r}(x-t)\,dt, \; n\geqslant 1, \; g(x)\in L_1(0, 2\pi),$$

является тригонометрическим полиномом порядка $\leqslant n\cdot r$. Используя явный вид ядер $D_{n,r}(t)$, легко убедиться в справедливости оценки

$$|g_\delta(x)-T_{n,r}\,g_\delta(x)|\leqslant C_r\min\{1, (n\,||x|-\delta|)^{1-r}\}, \; x\in(-\pi, \pi], \tag{22}$$

где

$$g_\delta(x)=\begin{cases} 1, & x\in(-\delta, \delta) \\ 0, & x\in(-\pi, -\delta]\cup[\delta, \pi], \; \delta\geqslant\frac{1}{n}, \; n\geqslant 1, \; r>1. \end{cases}$$

Для функции $f_m(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}4^k g_{2\cdot 4^{-k-1}}\left(x-\frac{3}{2}4^{-k}\right)$ (являющейся „усеченной“ функцией $f(x)$), согласно (22) имеем

$$|f_m(x)-T_{4^{m+1},r}f_m(x)|\leqslant C_r\sum_{k=1}^{m}4^k\cdot\min\left\{1, \left(4^m\left||x-\frac{3}{2}4^{-k}|-\frac{1}{2}4^{-k}\right|\right)^{1-r}\right\}$$

(в силу ограничения $0<|x|\leqslant\pi$ в (22) это неравенство вытекает простым сложением оценок (22) только при $-\pi+1/2\leqslant x\leqslant\pi$, но для остальных $x\in(-\pi, \pi]$ оно тоже справедливо). Непосредственный подсчет суммы в правой части приведет к оценке

$$|f_m(x)-T_{4^{m+1},r}f_m(x)|\leqslant$$

$$\leqslant C_r\begin{cases} \min\{4^m, 4^{m(2-r)}|x|^{1-r}\}, \; x\in(-\pi, 3\cdot 4^{-m}]\cup\left(\frac{3}{4}, \pi\right] \\ 4^{m(2-r)}\cdot 4^{k(r-1)}+4^k\cdot\min\left\{1, \left(4^m\left||x-\frac{3}{2}4^{-k}|-\frac{1}{2}4^{-k}\right|\right)^{1-r}\right\}, \\ \qquad x\in(3\cdot 4^{-k-1}, 3\cdot 4^{-k}], \quad k=1,\cdots, m-1. \end{cases}$$

Фиксируя сейчас $r\geqslant 3$, отсюда извлекаем

$$\|f_m-T_{4^{m+1},r}f_m\|_p^p\leqslant C_p\,4^{m(p-1)}, \; m>1, \; \frac{1}{2}<p\leqslant 1. \tag{23}$$

Пусть, от противного, (21) не выполнено для какого-то ряда (6). Для краткости через $S_0 g=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,dx$ обозначим среднее значение функции $g(x)\in L_1(0, 2\pi)$. Тогда при $4^{-m}\leqslant n\leqslant 4^{-m+1}$ получим

$$\|f-b_0\|_p^p=\|f-S_0 v_n\|_p^p>\|f_m-S_0 f_m\|_p^p-$$
$$-\|f-f_m\|_p^p-\|S_0(f_m-T_{4^m+1,r} f_m)\|_p^p-\|S_0(T_{4^m+1,r} f_m-v_n)\|_p^p.$$

Но по построению имеем $S_0 f_m=(2\pi)^{-1}\cdot m$, следовательно

$$\|f_m-S_0 f_m\|_p^p\geqslant C_p\cdot m^p,\ m>1.$$

Очевидно также, что $\|f-f_m\|_p^p\leqslant C_p\cdot 4^{m(p-1)}$, $m>1$. Далее, согласно (23) при $p=1$ имеем

$$\|S_0(f_m-T_{4^m+1,r} f_m)\|_p^p\leqslant C_p\cdot\|f_m-T_{4^m+1,r} f_m\|_1^p\leqslant C_p,\ m>1$$

и, наконец, из неравенства (11) и из (23) при $\frac{1}{2}<p<1$ выводим

$$\|S_0(T_{4^m+1,r} f_m-v_n)\|_p^p\leqslant C_p\|T_{4^m+1,r} f_m-v_n\|_1^p\leqslant C_p 4^{m(1-p)}\|T_{4^m+1,r} f_m-$$
$$-v_n\|_p^p\leqslant C_p 4^{m(1-p)}\{\|T_{4^m+1,r} f_m-f_m\|_p^p+\|f_m-f\|_p^p+\|f-v_n\|_p^p\}\leqslant$$
$$\leqslant C_p\{1+4^{m(1-p)}\|f-v_n\|_p^p\}.$$

В итоге имеем

$$\infty>\|f-b_0\|_p^p\geqslant C_p m^p-C_p'\cdot(1+4^{m(1-p)}\|f-v_n\|_p^p)\geqslant$$
$$\geqslant C_p(\log n)^p-C_p'(1+n^{1-p}\|f-v_n\|_p^p),\ n\geqslant 1,$$

что противоречит факту невыполнения (21) при $n\to\infty$. Предложение 3 полностью доказано.

Замечание 3. В случае $1\leqslant p<\infty$ ряд Фурье функции $f(x)\in L_p(0, 2\pi)$ удовлетворяет соотношению

$$\|f-v_n f\|_p\leqslant C\cdot E_n(f)_p\leqslant C_m\cdot\omega_m\left(\frac{1}{n}, f\right)_p,\ n\geqslant 1.$$

Указанный пример показывает, что в случае $p<1$ может, вообще говоря, не существовать ни одного ряда (6), для которого средние $v_n(x)$ удовлетворяют аналогичному соотношению.

§ 3. Дальнейшие замечания и открытые проблемы

Замечание 4. Приведенные утверждения дают нам некоторые указания о том, в каком направлении желательно продолжить изучение затронутых вопросов. Например, было бы интересно, найти методы суммирования, для которых верен аналог теоремы B для всех $0<p<1$. Вероятными кандидатами, на наш взгляд, являются обобщенные средние Валле Пуссена

$$v_n^{\varphi}(x)=\sum_{l=-2n}^{2n}\varphi\left(\frac{|l|}{n}\right)b_l e^{ilx},\quad n>1,$$

где $\varphi(t)\in C^{\infty}(0, \infty)$ обладает свойствами $\varphi(t)=1$ при $0\leqslant t\leqslant 1$ и $\varphi(t)=0$ при $2\leqslant t<\infty$. Более тонким вопросом является уточнение уже известных результатов (например, в исключительном случае $s=1/p-1$).

Замечание 5. Насколько нам известно, не найдены оценки скорости сходимости в L_p, $0<p<1$, для тригонометрических рядов, усиливающие теорему А. В частности, до сих пор не указана ни одна конкретная последовательность чисел $\lambda_0>\lambda_1>\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$, для которой существовал бы тригонометрический нуль-ряд (6) $\left(\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}|b_l|^2>0\right)$, удовлетворяющий

$$\|S_n\|_p=O(\lambda_n),\ n\to\infty,\ S_n(x)=\sum_{l=-n}^{n}b_le^{ilx},\ 0<p<1. \tag{24}$$

Здесь заранее можно требовать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2=\infty$. В самом деле, если выполнено (24), то

$$|b_n|\leqslant C_p\cdot\|S_n-S_{n-1}\|_p\leqslant C_p\{\lambda_{n-1}+\lambda_n\}\leqslant C_p\lambda_{n-1},\ n\geqslant1.$$

Но если бы $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2<\infty$, то и $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|^2<\infty$ и ряд был бы рядом Фурье, откуда в силу (24) $b_n=0$, $|n|\geqslant0$. Кроме того, из результатов [14] (см. замечание 1) вытекает с необходимостью $n^{-1/p+1}=O(\lambda_n)$, $n\to\infty$.

Аналогичный вопрос не рассматривался также в случае системы Уолша.

Замечание 6. Применяя метод доказательства второй части теоремы, можно получить такое утверждение:

Пусть для $f(x)\in L_p(0,2\pi)$, $0<p<1$, выполнено (8) *при некотором $m\geqslant1$. Тогда $f(x)\in L_1(0,2\pi)$ и для частичных сумм $S_nf(x)$ ее ряда Фурье справедливо*

$$\|f-S_nf\|_p\leqslant C_p\left\{\int\limits_0^{(n+1)^{-1}}t^{p-2}\cdot\omega_m^*(t,f)_p^p\,dt\right\}^{1/p},\ n\geqslant0.$$

Отметим неусиливаемое следствие для классов Липшица: *если*

$$0<p<1,\ 1/p-1<s\leqslant1/p \text{ и } f(x)\in\mathrm{Lip}^*(s,p), \text{ то}$$
$$\|f-S_nf\|_p=O(n^{-s+1/p-1}),\ n\to\infty,$$

причем ни при одном значении параметров нельзя заменить O на o одновременно для всего класса.

Замечание 7. В связи с теоремой B возникает такая задача. Как известно [2], если для $f(x)\in L_p(0,1)$, $0<p<1$, существует ряд Хаара $\sum\limits_{k\geqslant1}a_k\chi_k(x)$, удовлетворяющий

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_k\right\|_p=o(n^{-1/p+1}),\ n\to\infty, \tag{25}$$

то этот ряд единствен. Спрашивается, каковы свойства функций $f(x)$, для которых выполнено (25), и как устроен соответствующий ряд?. Вторая часть теоремы В дает достаточное условие выполнения (25). Правдоподобно, что для $f(x) \in L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, наличие свойства (25) влечет за собой, во-первых, $f(x) \in L_1(0, 1)$ и, во-вторых, совпадение соответствующего ряда с рядом Фурье—Хаара этой функции. Заметим, что первая часть этой гипотезы представляет собой нетривиальную теорему вложения из L_p, $0 < p < 1$, в L_1.

Аналогичные вопросы можно рассмотреть для других систем, в частности, в связи с вышедоказанной теоремой.

Технический университет
г. Дрезден, ГДР

Поступила 21.VI.1982

Պ. ՕՍՎԱԼԴ. Եռանկյունաչափական շարքերի Վալլե-Պուսսենի միջիններով L_p($0<p<1$) մետրիկայով մոտարկման արագության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են L_p, $0<0<1$ դասի ֆունկցիաների եռանկյունաչափական բազմանդամներով մոտարկման հնարավոր արագությունների գնահատականները։ Դիտարկվող հարցերը սերտորեն կապված են Ա. Ա. Թալալյանի՝ $L_p(0<p<1)$ դասի ֆունկցիաների շարքերով ներկայացման մասին աշխատանքի հետ։ Մասնավորապես, մենք ստանում ենք $1/2<p<1$ դեպքում Վալլե-Պուսենի (և Ֆեյերի) միջիններով մոտարկման գնահատականներ, որոնք մոտ են հնարավոր լավագույն գնահատականներին։ Դրված են որոշ բաց հարցեր։

P. OSWALD. *On the degree of approximation by Vallee Poussin means of trigonometric series in the L_p-metric* ($0 < p < 1$) (summary)

The paper deals with estimates for the possible rate of approximation by trigonometric series representing functions in the L_p-metric, where $p < 1$. The questions considered are closely related to earlier work of A. A. Talaljan on the representation of functions belonging to L_p ($0<p<1$)by series. In particular, we obtain stimates tor the approximation by Vallee Poussin (and Fejer) means of trigonometric series in the case $1/2 < p < 1$, which are near to the best possible ones. Some open problems are stated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Талалян*. Представление функций классов L_p, $0 < p < 1$, ортогональными рядами, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 21, 1970, 1—9.
2. *P. Oswald*. L_p-approximation durch Reihen nach Haar—Orthogonalsystem und dem Faber—Schauder—System, Journ. Approx. Theory, 33, 1, 1981, 1—27.
3. *Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд*. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$, Мат. сборник 98 (142), 3, 1975 395—415.
4. *В. И. Иванов*. Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L^p, для $0 < p < 1$, Мат. заметки, 18, 5, 1975, 641—658.
5. *T. V. Radoslavova*. Decrease orders of the L^p — moduli of continuity ($0 < p < \infty$) Analysis Math., 5, 3, 1979, 219—234.
6. *Э. А. Стороженко, П. Освальд*. Теорема Джексона в пространствах $L^p(R^k)$, $0 < p < 1$, Сиб. мат. журнал, 19, 4, 1978, 888—901.
7. *Э. А. Стороженко*. Приближение функций и теоремы вложения в пространствах H^p и L^p, Докт. диссерт., Тбилиси, 1979.
8. *А. Ф. Тиман*. Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
9. *Э. А. Стороженко*. Теоремы вложения и наилучшие приближения, Мат. сборник 97 (139), 2, 1975, 230—241.

10. *П. Освальд.* Приближение сплайнами в метрике L_p, $0 < p < 1$, Math. Nachrichten, 94, 1980, 68—96.
11. *П. Освальд.* Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов в метрике L_p, $0 < p < 1$, Изв. вузов, Математика, 7, 1976, 65—75.
12. *G. H. Hardy, J. E. Littlewood.* Theorems concerning Cesaro means of power series, Proc. Lond. Math. Soc., 36, 7, 1934, 516—531.
13. *Э. А. Стороженко.* Приближение функций класса H^p, $0 < p \leqslant 1$, Мат. сборник 105 (149), 4, 1978, 601—621.
14. *В. И. Иванов, В. А. Юдин.* О тригонометрической системе в L_p, $0 < p < 1$, Мат. заметки, 28, 6, 1980, 859—868.