ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 3, 1983 Математика

УДК 517.53

Г. В. МИКАЕЛЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ РОСТА ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТИПА БЛЯШКЕ—НЕВАНЛИННЫ МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

Введение

1°. Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|<1)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<+\infty$$

и

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{|z_k|}{z_k}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\quad(|z|<1)$$

—произведение Бляшке с нулями на $\{z_k\}_1^\infty$.

Как известно, функция $B(z)$ удовлетворяет следующему предельному соотношению:

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\log|B(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta=0.$$

А. Зигмундом была поставлена такая задача: какой должна быть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$, чтобы интегралы

$$I(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\log|B(re^{i\vartheta})|]^2\,d\vartheta$$

были ограничены при $r\to 1-0$.

Л. А. Рубел и Г. Р. Маклейн решили эту задачу в работе [1] методом рядов Фурье (см. [2], [3]).

Ими доказано, например, что для ограниченности функции $I(r)$ достаточно, чтобы считающая функция $n(r)$ последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяла условию

$$n(r)=O\left(\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right)\quad\text{при}\quad r\to 1-0,$$

и что это условие также необходимо в специальном случае, когда $\{z_k\}_1^\infty$ лежит на конечном числе лучей, выходящих из начала координат.

В работе автора [5] была решена аналогичная задача для произведений $B_\alpha(z)$ Бляшке — М. М. Джрбашяна (см. [4], гл. IX). Эти произведения равномерно и абсолютно сходятся в круге $\{z: |z|<1\}$ при условии сходимости

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty \quad (-1<\alpha<+\infty)$$

и совпадают с произведением Бляшке $B(z)$ в специальном случае $\alpha=0$.

2°. Пусть теперь последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ лежит в полуплоскости $G^{(+)}=\{z: \operatorname{Im} z>0\}$ и удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} z_k}{|z_k|^2}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{1}{\overline{z}_k}<+\infty.$$

Тогда бесконечное произведение типа Бляшке, введенное Р. Неванлинной

$$\mathrm{B}(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-z/z_k}{1-z/\overline{z}_k} \quad (z\in G^{(+)})$$

сходится в полуплоскости $G^{(+)}$, определяя там аналитическую функцию $\mathrm{B}(z)$ с нулями на последовательности точек $\{z_k\}_1^\infty$, с соответствующими кратностями.

Заметим, что при отображении $w=z^{-1}$ $(w_k=z_k^{-1})$, переводящем верхнюю полуплоскость в нижнюю: $G^{(-)}=\{w: \operatorname{Im} w<0\}$, вместо $\mathrm{B}(z)$ мы должны рассматривать произведение

$$\pi_0(w)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{w-w_k}{w-\overline{w}_k} \quad (w\in G^{(-)}) \tag{1}$$

с нулями $\{w_k\}_1^\infty\subset G^{(-)}$. Для сходимости этого произведения, очевидно, достаточно выполнение условия

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\operatorname{Im} w_k|<+\infty. \tag{2}$$

А. М. Джрбашян в работе [6] построил бесконечное произведение $\pi_\alpha(w)$ типа Бляшке—Р. Неванлинны, которое сходится в нижней полуплоскости $G^{(-)}$, когда последовательность его нулей $\{w_k\}_1^\infty\equiv\{u_k+ + iv_k\}_1^\infty$ $(v_k<0)$ взамен (2) удовлетворяет условию вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}<+\infty \quad (-1<\alpha<+\infty). \tag{3}$$

Функция $\pi_\alpha(w)$ совпадает с $\pi_0(w)$ при $\alpha=0$.

Эти произведения имеют следующий вид:

$$\pi_\alpha(w)=\prod_{k=1}^{\infty}b_\alpha(w; w_k), \tag{4}$$

где

$$b_\alpha(w; w_k)=\exp\left\{-\int_0^{|v_k|}\left\{\frac{1}{[\tau+i(w-w_k)]^{1+\alpha}}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{[i(w-\bar{w}_k)-\tau]^{1+\alpha}}\Big\}\tau^{\alpha}\,d\tau\Big\}\quad(-1<\alpha<+\infty). \tag{5}$$

Ряд важных свойств функции $\pi_\alpha(w)$ описывается посредством оператора интегро-дифференцирования $W^{-\alpha}$ того же порядка α $(-1<\alpha<+\infty)$ в смысле Г. Вейля.

Пусть $f(w)\equiv f(u+iv)$ — произвольная функция, определенная почти всюду в области $\{w\colon \operatorname{Im} w<0\}$. Оператор $W^{-\alpha}$ формально определяется таким образом:

$$W^{-\alpha}f(u+iv)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{v}(v-t)^{\alpha-1}f(u+it)\,dt\ (0<\alpha<+\infty), \tag{6}$$

$$W^{0}f(u+iv)=f(u+iv), \tag{7}$$

$$W^{-\alpha}f(u+iv)\equiv W^{-(1+\alpha)}\frac{\partial}{\partial v}f(u+iv)(-1<\alpha<0), \tag{8}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма функция Эйлера.

Нам понадобятся следующие результаты, установленные в работе А. М. Джрбашяна [6] и в его кандидатской диссертация [7].

1. При любом α $(-1<\alpha<+\infty)$ функция $W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(w)|$ непрерывна в полуплоскости с проколами $G^{(-)}\setminus\{w_k\}_1^\infty$.

2. При любых α $(-1<\alpha<+\infty)$ и $w\,\bar{\in}\,[w_k, \bar{w}_k]$ справедливо представление

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\,w_k)|=\operatorname{Re}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-|v_k|}^{|v_k|}\frac{(|v_k|-|\tau|)^{\alpha}}{\tau-i(w-u_k)}\,d\tau. \tag{9}$$

3. При любых α $(0\leqslant\alpha<+\infty)$ и $w\in G^{(-)}$

а) $$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w;\,w_k)|<0, \tag{10}$$

б) $$W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(w)|<0. \tag{11}$$

4. При любых α $(-1<\alpha<+\infty)$ и v $(-\infty<v<0)$

а) $$\lim_{u\to\infty}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv;\,w_k)|=0, \tag{12}$$

б) $$\lim_{u\to\infty}W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(u+iv)|=0. \tag{13}$$

5. При любом α $(-1<\alpha<+\infty)$ справедлива оценка

$$\sup_{-\infty<v<0}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv;\,w_k)||\,du\leqslant\frac{4\pi}{\Gamma(2+\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}|v_k|^{1+\alpha}. \tag{14}$$

6. При любом α $(-1<\alpha<+\infty)$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{v\to -0} \int_{-\infty}^{+\infty} | W^{-\alpha} \log | \pi_\alpha (u + iv)| \, | du = 0. \tag{15}$$

3°. В § 1 настоящей статьи установлены формулы для преобразования Фурье функции $W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha (u + iv)|$ $(-\infty < u < +\infty)$ при любом v $(-\infty < v < 0)$ (теорема 1).

В § 2 решается задача об ограниченности функции

$$I_\alpha (v) = \int_{-\infty}^{+\infty} [W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha (u + iv)|]^2 du$$

при $v \to -0$.

Сначала приводится представление функции $I_\alpha (v)$ через преобразования Фурье функции $W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha (u + iv)|$ $(-\infty < u < +\infty)$ (теорема 2). Затем, в теореме 3 найдено простое достаточное условие ограниченности $I_\alpha (v)$ при $v \to -0$. А в теореме 4 установлено, что это условие также необходимо в специальном случае, когда последовательность $\{w_k\}_1^\infty$ лежит на конечном числе вертикальных полупрямых в нижней полуплоскости.

В заключение выражаю благодарность М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство.

§ 1. Об одном преобразовании Фурье

Положив $w_k = u_k + iv_k$, вычислим значение интеграла Фурье

$$\Omega_k^{(\alpha)} (x, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} W^{-\alpha} \log |b_\alpha (u + iv;\ w_k)| \, du \tag{1.1}$$

$$(-\infty < x < +\infty, \ -\infty < v < 0, \ -1 < \alpha < +\infty).$$

В силу представления (9) имеем

$$\Omega_k^{(\alpha)} (x, v) = \frac{1}{\Gamma (1+\alpha)} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\tau + v) \, e^{-ixu}}{(\tau + v)^2 + (u - u_k)^2} du.$$

Отсюда в силу формулы (см. [8], стр. 323, № 8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixu}}{u^2 + a^2} du = \frac{\pi}{|a|} e^{-|ax|} \quad (a \neq 0),$$

получим

$$\Omega_k^{(\alpha)} (x, v) = \frac{\pi \, e^{-iu_k x}}{\Gamma (1+\alpha)} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|} \operatorname{sign} (\tau + v) \, d\tau. \tag{1.2}$$

Теперь в силу формулы (1.2), оценки (14) и теоремы Фубини справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть последовательность точек* $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha} < +\infty \tag{1.3}$$

при некотором α $(-1 < \alpha < +\infty)$. *Тогда для любого* v $(-\infty < v < 0)$ *преобразование Фурье*

$$\Omega_\alpha(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\, W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha(u + iv)|\, du \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{1.4}$$

существует и определяется по формуле

$$\Omega_\alpha(x, v) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-iu_k x} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|} \operatorname{sign}(\tau + v)\, d\tau. \tag{1.5}$$

Отметим два следствия из этой теоремы.

Следствие 1. *Пусть выполнено условие* (1.3) *при* $\alpha = 0$. *Тогда для любого* v $(-\infty < v < 0)$ *справедливы формулы*

$$\Omega_0(x, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log |\pi_0(u + iv)|\, du =$$

$$= \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{e^{|x| v}}{|x|} \sum_{v_k > v} e^{-iu_k x} \operatorname{sh}(|x| v_k) + \right. \tag{1.6}$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sh}(|x| v)}{|x|} \sum_{v_k < v} e^{-iu_k x + |x| v_k} + \frac{e^{2|x| v} - 1}{2|x|} \sum_{v_k = v} e^{-iu_k x} \right\} (x \neq 0),$$

$$\Omega_0(0, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\pi_0(u + iv)|\, du = \sqrt{2\pi} \left\{ \sum_{v_k > v} v_k + v \sum_{v_k < v} 1 \right\}. \tag{1.7}$$

Формулы (1.6) и (1.7) следуют из формул (1.4) и (1.5), если положить в них $\alpha = 0$.

Следствие 2. *Пусть при некотором* α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *выполнено условие* (1.3). *Тогда для любого* v $(-\infty < v < 0)$

$$\Omega_\alpha(0, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha(u + iv)|\, du =$$

$$= -\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(2+\alpha)} \left\{ \sum_{v_k > v} |v_k|^{1+\alpha} + \sum_{v_k < v} \left[|v_k|^{1+\alpha} - (|v_k| - |v|)^{1+\alpha} \right]. \right. \tag{1.8}$$

Формула (1.8) следует из формул (1.4) и (1.5), если положить в них $x = 0$.

§ 2. О росте произведения $\pi_\alpha(w)$

2.1. Пусть последовательность $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k+iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ удовлетворяет условию (1.3).

Теорема 2.1°. *Если* $-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty$, *то для всех* v $(-\infty<v<0)$

$$W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(u+iv)|\in L_2(-\infty,+\infty),$$

и справедливо равенство

$$I_\alpha(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}[W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(u+iv)|]^2du=\int_{-\infty}^{+\infty}|\Omega_\alpha(x,v)|^2dx. \tag{2.1}$$

2°. *Если* $-1<\alpha\leqslant-\frac{1}{2}$, *то для* $v\overline{\in}\{v_k\}_1^\infty$ $(-\infty<v<0)$

$$W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(u+iv)|\in L_2(-\infty,+\infty)$$

и выполняется равенство (2.1).

Доказательство. Так как ограниченные функции из класса $L_1(-\infty,+\infty)$ принадлежат классу $L_2(-\infty,+\infty)$ и для них справедливо равенство Парсеваля (см. [4], теорема 1.12), то для любого значения параметра α $(-1<\alpha<+\infty)$ при $v\overline{\in}\{v_k\}_1^\infty$ функция $W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(u+iv)|$ $(-\infty<u<+\infty)$ принадлежит классу $L_2(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяет равенству (2.1).

Пусть $-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty$. Тогда, если $v=v_n$ при некотором n, то обозначая через p_n кратность появления точки v_n в последовательности $\{v_k\}_1^\infty$, будем иметь

$$I_\alpha(v_n)\leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{k=1}^{p_n}\int_{-|v_n|}^{|v_n|}\frac{(|v_n|-|\tau|)^\alpha(\tau+v_n)}{(\tau+v_n)^2+(u-u_k)^2}d\tau\right]^2du+$$

$$+2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{v_k\neq v_n}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv_n)|\right|^2du.$$

Второй интеграл в полученном неравенстве конечен по предыдущему случаю. Докажем конечность первого интеграла. Обозначим его через $J_1(\alpha)$. По неравенству Шварца

$$J_1(\alpha)\leqslant\frac{p_n}{\Gamma^2(1+\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{p_n}\left[\int_{-|v_n|}^{|v_n|}\frac{(|v_n|-|\tau|)^\alpha(\tau+v_n)}{(\tau+v_n)^2+(u-u_k)^2}d\tau\right]^2du\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2p_n^2}{\Gamma^2(1+\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{|v_n|}\frac{(|v_n|-|\tau|)^{1+\alpha}}{(|v_n|-|\tau|)^2+u^2}d\tau\right]^2du+$$

$$+\frac{2p_n^2}{\Gamma^2(1+\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-|v_n|}^{0}\frac{(|v_n|-|\tau|)^{\alpha}(|v_n|+|\tau|)}{(|v_n|+|\tau|)^2+u^2}\,d\tau\Big]^2 du.$$

Очевидно, что последний интеграл в полученном неравенстве конечен. Теперь конечность $J_1(\alpha)$ для $-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty$ будет доказана, если заметить, что при $-\frac{1}{2}<\beta<\alpha<+\infty$

$$J_2(\alpha)\equiv\int_0^{\infty}\Big[\int_0^{|v_n|}\frac{\tau^{1+\alpha}}{\tau^2+u^2}\,d\tau\Big]^2du\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{\infty}\Big[\int_0^{|v_n|}\tau^{2\beta}\,d\tau\Big]\Big[\int_0^{|v_n|}\frac{\tau^{2(1+\alpha-\beta)}}{(\tau^2+u^2)^2}\,d\tau\Big]du=\frac{\pi\,|v_n|^{2\alpha+1}}{8\,(2\beta+1)(\alpha-\beta)}.$$

Таким обарзом, для любого значения параметра $\alpha\left(-\frac{1}{2}<\alpha<<+\infty\right)$ при любом $v\ (-\infty<v<0)$ функция $W^{-\alpha}\log|\pi_\alpha(u+iv)|$ $(-\infty<u<+\infty)$ принадлежит классам $L_1\,(-\infty,+\infty)$ и $L_2\,(-\infty,+\infty)$. Следовательно, по теореме Планшереля равенство (2.1) справедливо для всех $v\ (-\infty<v<0)$ и $\alpha\left(-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty\right)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Функция* $\log|\pi_0(u+iv)|$ *принадлежит классу* $L_2(-\infty,+\infty)$ *и справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\log|\pi_0(u+iv)|]^2\,du=\int_{-\infty}^{+\infty}|\Omega_0(x,v)|^2\,dx\quad(-\infty<v<0).$$

Замечание. *Функция* $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv_k;\ w_k)|\ (-\infty<u<+\infty)$ *при* $-1<\alpha\leqslant-\frac{1}{2}$ *не принадлежит классу* $L_2(-\infty,+\infty)$.

В самом деле, интеграл $J_2(\alpha)$ и, следовательно, $J_1(\alpha)$ расходится при $-1<\alpha\leqslant-\frac{1}{2}$:

$$J_2(\alpha)=\int_0^{\infty}u^{2\alpha}\Big[\int_0^{\frac{|v_n|}{u}}\frac{\tau^{1+\alpha}}{1+\tau^2}\,d\tau\Big]^2du\geqslant$$

$$\geqslant\Big[\int_0^{|v_n|}\frac{\tau^{1+\alpha}}{1+\tau^2}\,d\tau\Big]^2\int_0^1u^{2\alpha}\,du.$$

2.2. Пусть выполняется условие (1.3). Для $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < v < 0$ и $-1 < \alpha < +\infty$ введем следующие обозначения:

$$K_\alpha(x, v) \equiv -\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{v_k < v} \left\{ e^{-iu_k x} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|} \operatorname{sign}(\tau+v)\, d\tau \right\}, \tag{2.2}$$

$$L_\alpha(x, v) \equiv \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{|x| v}}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{v_k > v} \left\{ e^{-iu_k x} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha e^{|x| \tau}\, d\tau \right\}. \tag{2.3}$$

В силу формулы (1.5) имеем

$$\Omega_\alpha(x, v) \equiv -[K_\alpha(x, v) + L_\alpha(x, v)]. \tag{2.4}$$

Далее, для любого v $(-\infty < v < 0)$ обозначим через $G_v^{(-)} \subset G^{(-)}$ полуплоскость $G_v^{(-)} = \{w\colon \operatorname{Im} w \leqslant v\}$. При условии (1.3) в каждой полуплоскости $G_v^{(-)}$ лежит лишь конечное число — $n(v)$ точек $w_k \in G_v^{(-)}$, причем $n(v) \equiv 0$, когда $v \leqslant v_0 < 0$.

Теорема 3. *Если*

$$n(v) = O\left(|v|^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right), \text{ при } v \to -0, \tag{2.5}$$

то функция $I_\alpha(v)$ ограничена при $v \to -0$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

Доказательство. Заметим сначала, что условие (2.5) обеспечивает выполнение условия (1.3). В самом деле, если (2.5) выполнено, то при $v \to -0$

$$\sum_{v_k > v} |v_k|^{1+\alpha} = \int_v^0 (-t)^{1+\alpha}\, dn(t) = -(-v)^{1+\alpha} n(v) +$$

$$+ (1+\alpha) \int_v^0 (-t)^\alpha n(t)\, dt \leqslant c|v|^{1/2},$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от v.

Доказательство теоремы основано на оценках функций $K_\alpha(x, v)$ и $L_\alpha(x, v)$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

Сначала установим оценку для функции $K_\alpha(x, v)$ $(x \neq 0)$.

$$|K_\alpha(x, v)| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{v} \left| \int_t^{-t} (-t - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|} \operatorname{sign}(\tau+v)\, d\tau \right| dn(t) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{v} \left| e^{|x|(v-t)} \int_{v-t}^{-t} \tau^\alpha e^{-|x|\tau}\, d\tau + e^{|x|(v+t)} \int_0^{-t} \tau^\alpha e^{|x|\tau}\, d\tau - \right.$$

$$\left. - e^{|x|(t-v)} \int_0^{v-t} \tau^\alpha e^{|x|\tau}\, d\tau \right| dn(t). \tag{2.6}$$

Выражение, стоящее под знаком модуля, неотрицательно при всех α $(-1<\alpha<+\infty)$. Действительно, в случае $0\leqslant\alpha<+\infty$ это следует из неравенств

$$e^{|x|(v-t)}\int\limits_{v-t}^{-t}\tau^{\alpha}e^{-|x|\tau}\,d\tau+e^{|x|(v+t)}\int\limits_{v-t}^{-t}\tau^{\alpha}e^{|x|\tau}\,d\tau\geqslant$$

$$\geqslant(v-t)^{\alpha}\,\frac{1-e^{2|x|v}}{|x|}\geqslant[e^{|x|(t-v)}-e^{|x|(t+v)}]\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{v-t}\tau^{\alpha}e^{|x|\tau}\,d\tau\ (x\neq 0).$$

А в случае $-1<\alpha<0$ — это следует из того факта, что выражение, стоящее под знаком модуля, монотонно возрастающая функция от t и стремится к нулю, когда $t\to-\infty$.

Далее, из (2.6) получаем

$$|K_{\alpha}(x,v)|\leqslant\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{v}\Bigg[e^{|x|(v-t)}\int\limits_{v-t}^{-t}\tau^{\alpha}e^{-|x|\tau}\,d\tau+$$

$$+e^{|x|(v+t)}\int\limits_{v-t}^{-t}\tau^{\alpha}e^{|x|\tau}\,d\tau\Bigg|\,dn(t).$$

Отсюда в силу следующих неравенств, справедливых для $0\leqslant\alpha<+\infty$

$$\int\limits_{v-t}^{-t}\tau^{\alpha}e^{-|x|\tau}\,d\tau\leqslant(-t)^{\alpha}\,\frac{e^{|x|(t-v)}-e^{|x|t}}{|x|},$$

$$\int\limits_{v-t}^{-t}\tau^{\alpha}e^{|x|\tau}\,d\tau\leqslant(-t)^{\alpha}\frac{e^{-|x|t}-e^{|x|(v-t)}}{|x|},$$

$$(x\neq 0)$$

получим

$$|K_{\alpha}(x,v)|\leqslant\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)}\,\frac{1-e^{2|x|v}}{|x|}\int\limits_{-\infty}^{v}(-t)^{\alpha}\,dn(t)=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)}\,\frac{1-e^{2|x|v}}{|x|}\Bigg[(-v)^{\alpha}n(v)+\alpha\int\limits_{-\infty}^{v}(-t)^{\alpha}n(t)\,dt\Bigg]$$

$$(x\neq 0).$$

Следовательно, в силу условия (2.5) справедлива оценка

$$|K_{\alpha}(x,v)|\leqslant c\,\frac{1-e^{2|x|v}}{|x|\sqrt{|v|}}\ (x\neq 0,\ v_0<v<0),\tag{2.7}$$

где $c>0$ — постоянная, не зависящая от v и x.

Теперь установим оценку для функции $L_\alpha(x, v)$ $(x \neq 0)$:

$$|L_\alpha(x, v)| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{|x| v}}{2\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{a}^{0} \left[\int\limits_{t}^{-t} (-t - |\tau|)^\alpha e^{|x| \tau} d\tau \right] dn(t) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{|x| v}}{2\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{v}^{0} \left[e^{-|x| t} \int\limits_{0}^{-t} \tau^\alpha e^{-|x| \tau} d\tau + e^{|x| t} \int\limits_{0}^{-t} \tau^\alpha e^{|x| \tau} d\tau \right] dn(t).$$

Применив дважды интегрирование по частям в последнем интеграле с учетом условия (2.5), получим

$$|L_\alpha(x, v)| \leqslant c e^{|x| v} \left\{ |v|^{-\frac{1}{2}-\alpha} \left[e^{-|x| v} \int\limits_{0}^{-v} \tau^\alpha e^{-|x| \tau} d\tau + \right.\right.$$

$$\left. + e^{|x| v} \int\limits_{0}^{-v} \tau^\alpha e^{|x| \tau} d\tau \right] + \int\limits_{v}^{0} (-t)^{-\frac{3}{2}-\alpha} \left[e^{-|x| t} \int\limits_{0}^{-t} \tau^\alpha e^{-|x| \tau} d\tau + \right.$$

$$\left.\left. + e^{|x| t} \int\limits_{0}^{-t} \tau^\alpha e^{|x| \tau} d\tau \right] \right\} (v_0 < v < 0), \qquad (2.8)$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от v и x.

Используя очевидные неравенства

$$\int\limits_{0}^{-y} \tau^\alpha e^{-|x| \tau} d\tau < (-y)^\alpha \frac{1 - e^{|x| y}}{|x|},$$

$$\int\limits_{0}^{-y} \tau^\alpha e^{|x| \tau} d\tau < (-y)^\alpha \frac{e^{-|x| y} - 1}{|x|}$$

$$(0 \leqslant \alpha < +\infty, \ -\infty < y < 0, \ x \neq 0),$$

из (2.8) будем иметь

$$|L_\alpha(x, v)| < c\, \frac{1 - e^{2|x| v}}{|x| \sqrt{|v|}} +$$

$$+ \frac{c}{2} \frac{e^{|x| v}}{|x|} \int\limits_{v}^{0} \frac{e^{-|x| t} - e^{|x| t}}{(-t)^{3/2}} dt \ (x \neq 0, \ v_0 < v < 0). \qquad (2.9)$$

Так как дробь $\dfrac{\operatorname{sh}(-y)}{-y}$ $(-\infty < y < 0)$ является убывающей функцией от y, то

$$\frac{e^{|x| v}}{|x|} \int\limits_{v}^{0} \frac{e^{-|x| t} - e^{|x| t}}{(-t)^{3/2}} dt =$$

$$=2e^{|x|v}\int\limits_{v}^{0}\frac{\operatorname{sh}(-|x|t)}{(-|x|t)}(-t)^{-\frac{1}{2}}dt\leqslant$$

$$\leqslant 2e^{|x|v}\frac{\operatorname{sh}(-|x|v)}{|x||v|}\int\limits_{v}^{0}(-t)^{-\frac{1}{2}}dt=2\,\frac{1-e^{2|x|v}}{|x|\sqrt{|v|}}\quad (x\neq 0).$$

Отсюда и из (2.9) следует оценка

$$|L_\alpha(x,v)|\leqslant 2c\,\frac{1-e^{2|x|v}}{|x|\sqrt{|v|}}\quad (v_0<v<0). \tag{2.10}$$

Теперь в силу (2.7) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|K_\alpha(x,v)|^2\,dx\leqslant 2c^2|v|^{-1}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{1-e^{2xv}}{x}\right)^2dx= \tag{2.11}$$

$$=2c^2\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{1-e^{-2x}}{x}\right)^2dx=8\,c^2\log 2\ (v_0<v<0,\ 0\leqslant\alpha<+\infty)$$

(по поводу последнего интеграла см., например, [8], стр. 348, № 17, с $p\to+0$).

Наконец в силу (2.10) будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|L_\alpha(x,v)|^2\,dx\leqslant 32\,c^2\log 2\ (v_0<v<0,\ 0\leqslant\alpha<+\infty). \tag{2.12}$$

Из нераванства

$$I_\alpha(v)\leqslant 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|K_\alpha(x,v)|^2\,dx+2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|L_\alpha(x,v)|^2\,dx, \tag{2.13}$$

по (2.11) и (2.12) следует утверждение теоремы.

2.3. Убедимся теперь, что при особом расположении точек w_k в нижней полуплоскости, условие (2.5) необходимо для ограниченности функции $I_\alpha(v)\left(-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty\right)$ при $v\to-0$. А именно, справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть последовательность* $\{w_k\}_1^\infty\equiv\{u_k+iv_k\}_1^\infty\subset$ $\subset G^{(-)}$ *удовлетворяет условию* (1.3) *и функция* $I_\alpha(v)\left(-\frac{1}{2}<\alpha<\right.$ $\left.<+\infty\right)$ *при* $v\to-0$ *ограничена. Тогда*

1°. *При* $0\leqslant\alpha<+\infty$, *если последовательность* $\{w_k\}_1^\infty$ *лежит на конечном числе полупрямых* — $\{w_k\}_1^\infty\subset\bigcup\limits_{m=1}^{N}\{w=u_m+ih\colon -\infty<h<0\}$, *то выполняется условие* (2.5).

2°. *При* $-\frac{1}{2}<\alpha<0$, *если последовательность* $\{w_k\}_1^\infty$ *лежит на одной полупрямой* — $\{w_k\}_1^\infty\subset\{w=u_0+ih\colon -\infty<h<0\}$, *то выполняется условие* (2.5).

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Без ограничения общности можно считать, что точки w_k лежат лишь на одной полупрямой, так как в силу (10) при $0\leqslant\alpha<+\infty$

$$I_\alpha(v)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Bigl[\sum_{m=1}^{N}\sum_{u_k=u'_m}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv;\ w_k)|\Bigr]^2du\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Bigl[\sum_{u_k=u'_m}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv;\ w_k)|\Bigr]^2du,$$

и

$$n(v)=n_1(v)+\cdots+n_N(v)\quad(-\infty<v<0),$$

где $n_m(v)$ $(m=1,2,\cdots,N)$ означает число точек w_k на полупрямой $\{w=u'_m+ih\colon -\infty<h<v\}$.

Далее заметив, что в силу формул (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) и неотрицательности функций $K_\alpha(x,v)$ и $L_\alpha(x,v)$ при $u_k=0$, $k=1,2,\cdots$

$$I_\alpha(v)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Bigl[\ |K_\alpha(x,v)|+|L_\alpha(x,v)|\ \Bigr]^2dx,\tag{2.14}$$

оценим снизу функцию $L_\alpha(x,v)$ $\left(-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty\right)$.

Справедливы соотношения

$$|L_\alpha(x,v)|=\frac{\sqrt{2\pi}\,e^{|x|v}}{2\Gamma(1+\alpha)}\sum_{v_k>v}\Bigl[e^{-|x|v_k}\int\limits_0^{-v_k}\tau^\alpha e^{-|x|\tau}d\tau+$$

$$+e^{|x|v_k}\int\limits_0^{-v_k}\tau^\alpha e^{|x|\tau}d\tau\Bigr]\geqslant\frac{\sqrt{2\pi}\,e^{|x|v}}{2\Gamma(2+\alpha)}\sum_{v_k>v}(-v_k)^{1+\alpha}.$$

Следовательно, ввиду равенства (2.14)

$$I_\alpha(v)\geqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|L_\alpha(x,v)|^2dx\geqslant\frac{\pi|v|^{-1}}{2\Gamma^2(2+\alpha)}\Bigl[\sum_{v_k>v}(-v_k)^{1+\alpha}\Bigr]^2.$$

Таким образом, при $v\to-0$ имеем

$$\int\limits_v^0(-t)^{1+\alpha}dn(t)<c\sqrt{|v|}\left(-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty\right).\tag{2.15}$$

Отсюда вытекает, что при $v_0<v<v'<0$

$$c\sqrt{|v|} > \int\limits_{v}^{v'} (-t)^{1+\alpha}\, dn(t) = (-v')^{1+\alpha} n(v') -$$

$$- (-v)^{1+\alpha} n(v) + (1+\alpha) \int\limits_{v}^{v'} (-t)^{\alpha} n(t)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant (-v')^{1+\alpha} [n(v') - n(v)]. \tag{2.16}$$

Вводя обозначение $\varphi(v) = n(v)|v|^{1/2+\alpha}$ и положив $v' = \dfrac{v}{2}$, из (2.16) будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{1}{2^{1+\alpha}} \varphi(v) < c \quad (v_0 < v < 0). \tag{2.17}$$

Убедимся, что $\limsup\limits_{v \to -0} \varphi(v) < +\infty$. Действительно, в противном случае для некоторой последовательности чисел v_n, $v_n \to -0$, $\varphi(v_n) \geqslant \varphi(v)$ при всех $v \leqslant v_n$ и $\varphi(v_n) \to +\infty$. Но это приводит нас к противоречию, так как в силу (2.17)

$$c > \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2^{1+\alpha}}\right) \varphi(v_n) + \frac{1}{2^{1+\alpha}} [\varphi(v_n) - \varphi(2v_n)] >$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2^{1+\alpha}}\right) \varphi(v_n).$$

Этим доказаны утверждения 1° и 2° теоремы.

Следствие. *Для любого значения параметра* α $\left(-\dfrac{1}{2} < \alpha < +\infty\right)$ *существуют сходящиеся произведения* (4), *для которых функция* $I_\alpha(v)$ $(-\infty < v < 0)$ *при* $v \to -0$ *не ограничена.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 14.IV.1982
и 15.XI.1982

Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Բլյաշկե-Նևանլիննի տիպի արտադրյալների աճի հետազոտումը Ֆուրյեի ձևափոխությունների միջոցով (*ամփոփում*)

Ենթադրենք $\{w_k\}_1^\infty$ $(\mathrm{Im}\, w_k < 0)$ *հաջորդականությունը բավարարում է*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha} < +\infty$$

պայմանին α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *պարամետրի տվյալ արժեքի համար։*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է հետևյալ ֆունկցիաների

$$I_\alpha(v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha(u+iv)| \right]^2 du \quad (-\infty < v < 0)$$

վարքը, երբ $v \to -0$, *որտեղ* $\pi_\alpha(w)$-*ն Բլյաշկե-Նեվանլիննի տիպի արտադրյալ է վերին կիսահարթության համար* $\{w_k\}_1^\infty$ *զրոներով, որը մտցված է Ա. Մ. Ջրբաշյանի կողմից նրա [6] աշխատանքում, իսկ* $W^{-\alpha}$-*ն Վեյլի օպերատորն է։*

Բերվում են արդյունքներ $I_\alpha(v)$ *ֆունկցիայի սահմանափակության մասին, երբ* $v \to -0$, *որոնցից, մասնավորապես, հետևում է այնպիսի* $\pi_\alpha(w)$ *ֆունկցիաների գոյությունը, որոնց համար* $I_\alpha(v)$-*ն սահմանափակ չէ, երբ* $v \to -0$.

G. V. MIKAELIAN. *Investigation of growth of Blaschke—Nevanlinna type products by the method of Fourier transforms* (summary)

Let $\{w_k\}_1^\infty$ ($\operatorname{Im} w_k < 0$) be a sequence of complex numbers such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty,$$

where $\alpha \in (-1, +\infty)$ is a given number. We investigate (as $v \to 0$) the behaviour of the functions

$$I_\alpha(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| W^{-\alpha} \log |\pi_\alpha(u+iv)| \right|^2 du \quad (-\infty < v < 0).$$

Here $\pi_\alpha(w)$ is a Blaschke—Nevanlinna type product introduced by A. M. Jrbashian in [6] for the upper half-plane with zeros in $\{w_k\}_1^\infty$, and $W^{-\alpha}$ is the Weyl operator. In the case $v \to -0$ some results on the boundedness of the function $I_\alpha(v)$ are given, yielding the existence of functions $\pi_\alpha(w)$ with unbounded $I_\alpha(v)$ when $v \to -0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. R. Maclane*, B. *A. Rubel*. On the growth of Blaschke product, Canadian J. of Math., XXI, № 3, 1969, 595—601.
2. *L. A. Rubel*. A Fourier series method for entire functions, Duke Math. J. 30, 1963, 437—442.
3. *L. A. Rubel*, *B. A. Taylor*. A Fourier series method for meromorphic and entire functions, Bull. Soc. Math. France, 96, 1968, 53—96.
4. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
5. *Г. В. Микаелян*. О росте произведений Бляшке—Джрбашяна, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVI, № 6, 1981, 478—497.
6. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 245, № 6, 1979, 1295—1298.
7. *А. М. Джрбашян*. Факторизация, параметрические представления и граничные свойства некоторых общих классов мероморфных в полуплоскости функций, канд. дисс., Харьков, 1983.
8. *А. П. Прудников*, *Ю. А. Брычков*, *О. И. Маричев*. Интегралы и ряды, М., «Наука», 1981.