ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVIII, № 3, 1983 Математика

УДК 519.218.5

Р.В. АМБАРЦУМЯН, Г. С. СУКИАСЯН

О ВНУТРЕННЕМ ОПИСАНИИ ПРОЦЕССОВ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ, НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ШАРОВ

Настоящая работа состоит из двух частей, которые принадлежат соответственно первому и второму автору. Поскольку результаты этих частей тесно взаимосвязаны, то публикация их в одной статье, вероятно, естественна.

§ 1. Непересекающиеся, невзаимодействующие шары на прямой

Случайные процессы шаров единичного радиуса вполне описываются случайными точечными процессами, образованными их центрами. Распределение случайного точечного процесса в R^n будем обозначать через P. Будем предполагать, что

а) P инвариантно относительно группы всех параллельных сдвигов пространства R^n,

б) P имеет конечную интенсивность, (т. е.)

$$E_P N(D) = \lambda |D|, \ \lambda < \infty,$$

где $N(D)$ — случайное число точек процесса, попадающих в область $D \subset R^n$, $|\cdot|$ — мера Лебега.

При выполнении условий а), б) существует т.н. распределение Пальма, соответствующее данному P. Напомним, что значение распределения Пальма для достаточно широкого класса событий B можно вычислить как предел условной вероятности

$$\Pi(B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(B \cap A_\varepsilon)}{P(A_\varepsilon)}, \tag{1.1}$$

где A_ε — событие, состоящее в том, что в шар радиуса ε с центром в начале координат попадает ровно одна точка процесса.

Под внутренним описанием семейства точечных процессов мы понимаем его описание с помощью некоторого соотношения, связывающего P и Π. Известным примером внутреннего описания семейства точечных процессов является соотношение

$$\Pi = P * \Delta, \tag{1.2}$$

где Δ — распределение точечного процесса с вероятностью 1, имеющего единственную точку в начале координат, звездой обозначена операция композиции, соответствующая наложению независимых точечных процессов. Класс распределений, удовлетворяющих соотношению (1.2) совпадает с семейством однородных пуассоновских точечных полей в R^n, [1].

Дадим определение процессов непересекающихся, невзаимодействующих шаров единичного диаметра (ПННШЕД).

Через m будем обозначать реализации процесса центров. Пусть $D \subset R^n$ — некоторая область, D^c — ее дополнение. Через $P(\cdot \mid m \cap D^c)$ обозначим условное распределение процесса центров в D (т. е. множества $m \cap D$), при условии, что часть реализации, лежащая вне D (т. е. множество $m \cap D^c$) фиксированы.

Говорим, что P есть ПННШЕД, если $P(\cdot \mid m \cap D^c)$ при всякой D совпадает с соответствующим условным распределением пуассоновского процесса, управляемого мерой σL_D, где $\sigma > 0$, L_D — сужение меры Лебега на D. Существование ПННШЕД показано в [2].

Перейдем к вопросу о внутреннем описании ПННШЕД. Через P_0 обозначим условное распределение процесса центров при условии, что имеет место событие

$A =$ {в шар радиуса 1 и центром в 0 не попадает центров процесса}, т. е.

$$P_0(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Теорема 1.1. *Если P описывает ПННШЕД, то*

$$\Pi = P_0 * \Delta. \tag{1.3}$$

Естественно поставить вопрос: исчерпываются ли решения (1.3) классом ПННШЕД?

В многомерном случае ответ на этот вопрос пока отсутствует. Ниже мы покажем, что в одномерном случае, при некоторых условиях гладкости, соотношению (1.3) удовлетворяют только стационарные рекуррентные процессы, с плотностью распре деления расстояния между соседними центрами, равной

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha(x-1)}, & \text{если } x > 1, \\ 0, & \text{если } x < 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Эти процессы суть ПННШЕД. То, что они удовлетворяют (1.3), легко показать независимо от общей теоремы 1.1. Достаточно проверить, что в процессе P_0 длины интервалов $(1, C_1)$ и $(C_{-1}, -1)$ независимы и каждый имеет α-показательное распределение (C_1 и C_{-1} — ближайшие к началу координат центры справа и слева). Поэтому задача сводится к демонстрации единственности (с точностью до выбора α в (1.4)).

Рассмотрим функции

$p_0(x) = P$ {на интервале $(0, x)$ отсутствуют центры},

$\pi_0(x) = \Pi$ {на интервале $(0, x)$ отсутствуют центры}.

Предположим, что $\pi_0(x)$ непрерывна. Тогда имеют место соотношения Пальма [3]

$$\frac{dp_0(x)}{dx} = -\lambda\pi_0(x). \tag{1.5}$$

Согласно (1.3) имеем

$$\pi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 1, \\ \dfrac{p_0(x+1)}{p_0(2)}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Поэтому при $x > 2$

$$\pi_0(x) = -\frac{p_0(2)}{\lambda}\frac{d}{dx}\pi_0(x-1). \tag{1.6}$$

Это соотношение позволяет определить $\pi_0(x)$ при всех $x > 2$, если $\pi_0(x)$ как-то задано на (1.2). Но $\pi_0(x)$ на (1.2) не может быть произвольной, так как для $x \in (1.2)$ и всякого целого $k > 0$

$$\pi_0(x+k) = \left(-\frac{p_0(2)}{\lambda}\right)^k \frac{d^k}{(dx)^k}\pi_0(x).$$

Поскольку $\pi_0(x)$ должна оставаться неотрицательной, заключаем, что $\pi_0(x)$ оказывается абсолютно монотонной функцией на $(1, \infty)$. Поэтому существует мера μ на $(0, \infty)$ такая, что

$$\pi_0(x) = \int e^{-\alpha(x-1)}\,\mu(d\alpha),$$

Из (1.6) заключаем, что для любого интервала $I \subset (0, \infty)$

$$\int_I \alpha e^{\alpha}\,\mu(d\alpha) = \frac{\lambda}{p_0(2)}\int_I \mu(d\alpha). \tag{1.7}$$

Поскольку уравнение $\alpha e^{\alpha} = \text{const}$ имеет только одно решение, из (1.7) заключаем (рассматривая малые интервалы I), что μ сосредоточена на решении уравнения

$$\alpha e^{\alpha} = \lambda/p_0(2).$$

Итак

$$\pi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ e^{-\alpha(x-1)}, & \text{если } x > 1, \end{cases} \tag{1.8}$$

откуда следует (1.4).

На самом деле $\alpha > 0$ можно выбрать произвольно, а параметры λ и $p_0(2)$ определить из соотношений

$$\lambda^{-1} = \int_0^\infty \pi_0(u)\,du = 1 + \alpha^{-1}, \tag{1.9}$$

$$p_0(x) = 1 - \lambda\int_0^x \pi_0(u)\,du.$$

Следующий шаг состоит в вычислении вероятностей вида

$$p_{k,l,\cdots}(x, y, \cdots) = P\{N(I_1) = k,\ N(I_2) = l,\ \cdots\},$$

где x, $y, \cdots$ — длины интервалов I_1, $I_2, \cdots$, расположенных как указано на рис. 1.

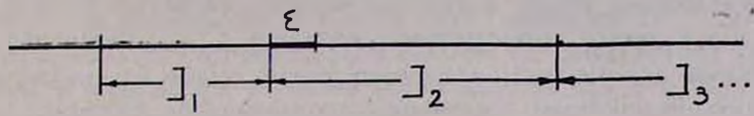

Рис. 1.

Можно показать, что совокупность этих вероятностей вполне определяет P, даже если ограничиться теми из них, для которых индексы k, $l, \cdots$ принимают только значения 0 или 1. Не нарушая общности можно считать, что в последовательности k, $l, \cdots$ никакие два соседних индекса не равны нулю.

Рассмотрим случай двух интервалов, $k=0$, $l=1$. Выделим малый интервал длины ε на левом конце I_2 (рис. 1). Можно считать, что 0 лежит в центре интервала ε. Имеем

$$p_{0,1}(x, y) = p_{0,1}(x+\varepsilon, y-\varepsilon) + p_{0,1,0}(x, \varepsilon, y-\varepsilon).$$

Отсюда, используя (1.1) и $P(A_\varepsilon) = \lambda\varepsilon + o(\varepsilon)$, находим

$$-\frac{\partial}{\partial x} p_{0,1}(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} p_{0,1}(x, y) = \lambda \Pi\{N(I_1)=0,\ N(I_2)=0\}. \qquad (1.10)$$

В силу (1.3) правая часть может быть выражена через уже известную функцию $p_0(x)$. Так как $p_{0,1}(x, 0) \equiv 0$, то соотношение (1.10) вполне определяет $p_{0,1}(x, y)$. В общем случае аналогичный прием применим на общей границе любых двух интервалов. Для $p_{k,l,\cdots}(x, y, \cdots)$ получаем соотношение, аналогичное (1.10), причем правая часть может быть заменена на $p_{k',l',\cdots}(x', y', \cdots)$, где в последовательности k', $l', \cdots$ число единиц меньше, чем в последовательности k, $l, \cdots$. Таким образом, полное доказательство нашего предложения получается по индукции относительно числа единиц в последовательности k, $l, \cdots$.

§ 2. Дискретные процессы непересекающихся невзаимодействующих шаров

Соотношение (1.3) имеет смысл для точечных процессов и в более общих пространствах, в частности в различных дискретных аналогах пространства R^n. В настоящей заметке задача (1.3) рассматривается на дискретной прямой Z (одномерная целочисленная решетка) и на дискретной окружности Z_m. Показано, что в пространстве Z решениям (1.3) являются только рекуррентные процессы с геометрическим расспределением длины интервала между краями шаров. В случае дискретной окружности решение (1.3) сводится к решению системы линейных уравнений. Показано, что решения последней аппроксимируют, при $m \to \infty$, решения для Z.

Отметим, что если в случае процессов в R^1 решение доставляется теоремой Бернштейна об абсолютно монотонных функциях, то в рассматриваемом нами дискретном случае эффективным оказывается применение аппарата цепных дробей.

1. Некоторые сведения из комбинаторного анализа. Прежде, чем рассмотреть уравнение (1.3) в дискретных пространствах, приведем некоторые результаты комбинаторного анализа, которые в дальнейшем будут неоднократно использоваться. Из k знаков плюс и $n-k$ знаков минус можно составить C^k_{n-k+1} различных последовательностей, в каждой из которых нигде рядом не окажутся два знака плюс. Рассмотрим следующую производящую функцию:

$$F_n(t) = \sum_{k>0} C^k_{n-k+1} t^k, \quad n=0, 1, 2, \cdots.$$

Отметим, что числа $F_n(1)$ известны в комбинмторике как числа Фибоначчи. Условимся, что $F_{-1}(t)=1$. Имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$F_{n+1}(t) = F_n(t) + tF_{n-1}(t), \tag{2.1}$$

$$F_n(t) = F_{n-k}(t)\cdot F_{k-1}(t) + t\cdot F_{n-k-1}(t)\cdot F_{k-2}(t), \; k=1, 2, \cdots, n. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Для всякого $t>0$ существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n(t)}{F_{n+1}(t)} = \frac{-1+\sqrt{1+4t}}{2t}.$$

Доказательство. Обозначим $R_n(t) = \dfrac{F_n(t)}{F_{n+1}(t)}$. В силу (2.1) имеем

$$R_n(t) = \frac{F_n(t)}{F_n(t)+tF_{n-1}(t)} = \frac{1}{1+tR_{n-1}(t)}. \tag{2.3}$$

Отсюда следует разложение $R_n(t)$ в цепную дробь:

$$R_n(t) = \cfrac{1}{1+\cfrac{t}{1+\cfrac{t}{1+\cdots\cfrac{t}{1+t}}}}.$$

Из теории цепных дробей [4] известно, что такая дробь сходится при всех $t>0$. Следовательно, в (2.3) можно перейти к пределу при $n\to\infty$. Получим

$$R(t) = \frac{1}{1+t\,R(t)},$$

где $R(t) = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(t)$. Положительным корнем полученного квадратного уравнения является

$$R(t) = \frac{-1+\sqrt{1+4t}}{2t}.$$

Лемма 2.1 доказана.

2. Дискретная прямая. На одномерной целочисленной решетке Z рассмотрим случайный точечный процесс M без кратных точек. Распределение P процесса M предполагаем инвариантным относитель-

но группы сдвигов решетки Z. Обозначим через $\begin{pmatrix} x_1, \cdots, x_n \\ I_1, \cdots, I_n \end{pmatrix}$ событие, состоящее в том, что одновременно в каждой из точек $x_k \in Z$, $k=1, 2, \cdots, n$ имеется (если $I_k=1$) или отсутствует (если $I_k=0$) точка процесса M. Распределением Пальма Π дискретного точечного процесса M называется условное распределение $\Pi(\cdot) = P(\cdot / \binom{0}{1})$.

Наша цель—решить уравнение

$$\Pi = P_A, \tag{1.3'}$$

где P_A — условное распределение процесса M при условии $A = \begin{pmatrix} -1, 0, 1 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$.

Так же, как и в непрерывном случае, можно показать, что для однородных дискретных точечных процессов имеет место формула Пальма:

$$\begin{cases} P\begin{pmatrix} x, x_1, \cdots, x_n \\ 1, I_1, \cdots, I_n \end{pmatrix} = \lambda \Pi \begin{pmatrix} x_1 - x, \cdots, x_n - x \\ I_1, \cdots, I_n \end{pmatrix}, \ n=1, 2, \cdots \\ P\begin{pmatrix} x, x_1, \cdots, x_n \\ 0\ I_1, \cdots, I_n \end{pmatrix} = -\lambda \Pi \begin{pmatrix} x_1 - x, \cdots, x_n - x \\ I_1, \cdots, I_n \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} x_1, \cdots, x_n \\ I_1, \cdots, I_n \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $\lambda = P\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ есть интенсивность процесса M.

Рассмотрим события $A_n = \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n \\ 0, 0, \cdots, 0 \end{pmatrix}$, $n=1, 2, \cdots$. Для вероятностей $p_n = P(A_n)$ формула Пальма (2.4) имеет вид

$$p_n = -\lambda \Pi (A_{n-1}) + p_{n-1}, \ n=2, 3, \cdots.$$

Отметим, что $p_1 = 1-\lambda$ и $p_3 = P(A)$. Равенство (1.3′) для A_n принимает вид

$$\Pi (A_n) = \frac{P(A_n \cap A)}{P(A)} = \frac{p_{n+2}}{p_3}, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{2.5}$$

Следовательно

$$p_{n+1} = \frac{p_3}{\lambda} (p_{n-1} - p_n), \ n=2, 3, \cdots. \tag{2.6}$$

Заметим, что подставляя в (2.6) $n=2$, получается $p_2 = 1-2\lambda$. Таким образом, мы получили бесконечную систему линейных уравнений, решения которой зависят от двух параметров $\nu = \frac{\lambda}{p_3}$ и p_3. Мы покажем, что семейство положительных решений системы (2.6) является однопараметрическим. Из вида системы (2.6) заключаем, что ее общее решение следует искать в виде

$$p_n = B_n(\nu)\, p_2 + C_n(\nu)\, p_3, \ n = 4, 5, \cdots. \tag{2.7}$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что

$$B_n(\nu) = (-1)^n \nu^{3-n} F_{n-5}(\nu);$$

$$C_n(\nu)=(-1)^{n+1}\nu^{3-n}F_{n-4}(\nu),\ n=4,5,\cdots,$$

где $F_n(\nu)$— производящие функции, введенные в п. 1.

В терминах $F_n(\nu)$ уравнение (2.7) принимает вид

$$p_n=(-1)^n\nu^{3-n}[p_2\cdot F_{n-5}(\nu)-p_3\cdot F_{n-4}(\nu)]. \tag{2.8}$$

В силу (2.8) положительные решения системы (2.6) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$p_2\cdot F_{2n-1}(\nu)>p_3F_{2n}(\nu),$$
$$p_2\cdot F_{2n}(\nu)<p_3F_{2n+1}(\nu).$$

Следовательно

$$p_2\frac{F_{2n}(\nu)}{F_{2n+1}(\nu)}<p_3<p_2\frac{F_{2n-1}(\nu)}{F_{2n}(\nu)}. \tag{2.9}$$

Из леммы 2.1 и неравенств (2.9) вытекает

$$p_3=(1-2\lambda)\cdot\frac{-1+\sqrt{1+4\nu}}{2\nu}.$$

Подставляя $\nu=\dfrac{\lambda}{p_3}$, находим

$$p_3=\frac{(1-2\lambda)^2}{1-\lambda}.$$

Вернемся к уравнению (2.6). Зная выражения для p_2 и p_3, методом индукции получаем

$$p_n=(1-\lambda)\left(\frac{1-2\lambda}{1-\lambda}\right)^{n-1},\ n=1,2,\cdots. \tag{2.10}$$

Отметим, что требование $\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$ естественно, так как при $\lambda=\dfrac{1}{2}$ с вероятностью 1 центры шаров располагаются через точку, т. е. имеет место наиболее плотная упаковка непересекающимися шарами единичного радиуса.

Зная вероятности p_n, $n=1,2,\cdots$ по формулам (1.3′) и (2.4) можно вычислить вероятности событий вида $\begin{pmatrix}1, 2,\cdots, n\\ I_1, I_2,\cdots, I_n\end{pmatrix}$, $I_k=0$ либо 1. Комбинируя последние можно найти вероятности общих событий $\begin{pmatrix}x_1,\cdots, x_n\\ i_1,\cdots, i_n\end{pmatrix}$. Таким образом, совокупность вероятностей p_n, $n=1, 2,\cdots$, вполне определяет распределение P. Следовательно, уравнение (1.3′) имеет единственное решение (с точностью до выбора λ).

Рассмотрим случайный процесс открытых непересекающихся шаров единичного радиуса, центры которых образуют рекуррентный точечный процесс; расстояние η между центрами пусть имеет следующее распределение:

$$P(\eta > n) = \left(\frac{1-2\lambda}{1-\lambda}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{2.11}$$

т. е. $\eta - 1$ имеет геометрическое распределение. Нетрудно убедиться, что такой процесс удовлетворяет уравнению (1.3′). На основании доказанной выше единственности приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.1. *Для случайных процессов, заданных на одномерной целочисленной решетке Z, решениями уравнения* (1.3′) *являются только рекуррентные процессы, у которых длина интервала между точками процесса имеет распределение* (2.11).

3. Дискретная окружность. Множество Z_m состоит из m равноотстоящих точек на окружности, занумерованных в циклическом порядке. Рассмотрим на Z_m случайный точечный процесс M_m, распределение $P^{(m)}$ которого инвариантно относительно группы вращений решетки Z_m. Повторяя обозначения и рассуждения п. 2, получим конечную систему линейных уравнений:

$$p_{n+1}^{(m)} = \frac{p_3^{(m)}}{\lambda} (p_{n-1}^{(m)} - p_n^{(m)}), \quad n = 2, 3, \cdots, m-1, \tag{2.6'}$$

$$p_m^{(m)} = \frac{p_3^{(m)}}{\lambda} (p_{m-1}^{(m)} - p_m^{(m)}).$$

Представим (2.6′) в ином виде:

$$p_{n-1}^{(m)} = p_n^{(m)} + \nu\, p_{n+1}^{(m)}, \quad n = 2, 3, \cdots, m-1, \tag{2.6''}$$

$$p_{m-1}^{(m)} = (1+\nu)\, p_m^{(m)},$$

где $\nu = \lambda / p_3^{(m)}$. Сравнивая (2.6″) и (2.1), приходим к следующему соотношению:

$$p_{m-n}^{(m)} = F_n(\nu)\, p_m^{(m)}, \quad n = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{2.12}$$

где $F_n(\nu)$ — многочлены, введенные в п.1. Из (2.12) находим

$$p_1^{(m)} = 1 - \lambda = F_{m-1}(\nu)\, p_m^{(m)},$$

$$p_n^{(m)} = (1-\lambda) \frac{F_{m-n}(\nu)}{F_{m-1}(\nu)}, \quad n = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.13}$$

С помощью равенств (2.2), (2.3) и (2.13) разложим $p_n^{(m)}$ в цепную дробь:

$$p_n^{(m)} = \cfrac{1-\lambda}{F_{n-2}(\nu) + \cfrac{\nu F_{n-3}(\nu)}{1 + \cfrac{\nu}{1 + \cfrac{\nu}{1 + \cdots \cfrac{\nu}{1+\nu}}}}}. \tag{2.14}$$

В п. 2 было показано, что p_2 разлагается в бесконечную цепную дробь вида (2.14). Методом индукции, используя рекуррентные соотношения (2.1) и (2.6), получаем для всех $n > 2$

$$p_n = \cfrac{1-\lambda}{F_{n-2}(\nu) + \nu F_{n-3}(\nu)\cfrac{}{1+\cfrac{\nu}{1+\cfrac{\nu}{1+\cdots}}}} \tag{2.15}$$

Теорема 2.2. *Пусть распределения P и $P^{(m)}$ случайных точечных процессов в пространствах Z и Z_m удовлетворяют уравнению* (1.3'). *Тогда вероятности p_n можно представить в виде бесконечных цепных дробей* (2.15), *для которых киноническими подходящими дробями являются вероятности $p_n^{(m)}$*,

Следствие. Для любых n и λ, $0 \leqslant \lambda < \frac{1}{2}$ имеет место

$$\lim_{m \to \infty} p_n^{(m)} = p_n.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 2.IV.1982

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, Հ. Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ. Չհատվող, չփոխազդվող գնդերի պրոցեսների ներքին նկարագրման մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում առաջարկված է միավոր տրամագծով չհատվող, չփոխազդվող գնդերի պրոցեսների ներքին մի նկարագրում՝ $\Pi = P_A$ (*) *հավասարման միջոցով։ Այստեղ* Π*-ն գնդերի կենտրոնների պրոցեսի Պալմի բաշխումն է,* PA *-ն այդ պրոցեսների պայմանական բաշխումն է* A *պայմանով։*

A*-ն պահանջում է, որ 1 շառավիղով և* O *կենտրոնով փակ գնդի մեջ ուրիշ կենտրոններ չընկնեն։ (*) հավասարումը դիտարկվում է* R^1*-ի, մեկչափանի* Z *կավարի և* Z_m *դիսկրետ շրջանագծի վրա։ Ցույց է տրված, որ* R^1*-ի դեպքում (*)-ի լուծումները միայն ռեկուրենտ, ցուցչային բաշխումով նկարագրվող պրոցեսներն են։* Z *տարածությունում (*)-ի լուծումները միայն երկրաչափական բաշխումով ռեկուրենտ պրոցեսներն են։ Ցույց է տրված, որ* Z_m *-ի համար լուծումները մոտարկում են լուծումները* Z *տարածության համար։*

R. V. AMBARTZUMIAN, H. S. SUKIASIAN. *On inner description of processes of nonintersecting, noninteracting balls* (summary)

The paper suggests an inner description of processes of nonintersecting, noninteracting unit diameter balls by means of the relation

$$\Pi = P_A \; (*).$$

Here Π is the Palm distribution of the point process M formed by ball centres; PA is the conditional distribution of the process M provided no points of the process lie within the closed unit ball centred at 0. Equation (*) is considered on the one-dimensional lattice z, in R^1 and on the discrete circle Z_m. It is shown that in the case of R^1 only recurrent processes described by exponential distribution are the solutions of (*). In the space Z only recurrent processes with geometric distribution are solutions of (*). In the space Z_m the solutions of (*) approximate as $m \to \infty$ the solutions for Z.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. V. Ambartzumian*. Palm distributions and superpositions of independent point processes in R^n. Stochastic Point Processes, Ed. P. Lewis, J. Wiley & Sons, 1972.

2. *Р. Л. Добрушин.* Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов, Функц. анализ, 2, вып. 4, 1968, 44—57.
3. *А. Я. Хинчин.* Работы по математической теории массового обслуживания, М., Физматгиз, 1963.
4. *А. Я. Хинчин.* Цепные дроби, М., «Наука», 1978.