ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 3, 1983 Математика

УДК 517.547

Л. Б. ГОЛИНСКИЙ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МАТРИЧНОЙ ПРОБЛЕМЫ НЕВАНЛИННЫ—ПИКА

В конце 60-х годов В. П. Потапов предложил единый подход к рассмотрению некоторых классических задач анализа, опирающийся на созданную им теорию J-растягивающих аналитических матриц-функций (см. [1]). Одной из наиболее известных задач такого рода является проблема Неванлинны—Пика в классе Шура голоморфных в круге $|z|<1$ сжимающих $m\times m$ матриц-функций, которая состоит в отыскании функций $f(z)\in S_0^{(m)}$, принимающих в заданных точках $z_1,\cdots, z_n$ заданные значения $w_1,\cdots, w_n$. Хорошо известен критерий разрешимости проблемы в терминах интерполяционных данных z_i, w_i, $1\leqslant i\leqslant n$: положительная определенность матрицы

$$A_n=\left\{\frac{I-w_i w_k^*}{1-z_i\bar z_k}\right\}_{i,\,k=1}^{n}\geqslant 0. \tag{1}$$

В случае, когда блок-матрица A_n к тому же невырождена, множество решений задачи бесконечно и параметризуется посредством дробно-линейного преобразования

$$f(z)=(a_{11}(z)\,s(z)+a_{12}(z))\,(a_{21}(z)\,s(z)+a_{22}(z))^{-1}, \tag{2}$$

матрица коэффициентов которого — так называемая резольвентная матрица — определяется по интерполяционным данным, а параметр $s(z)$ — произвольная функция класса Шура. Одним из существенных достижений В. П. Потапова и И. В. Ковалишиной (см. [2]) явилась формула для резольвентной матрицы:

$$R_n(z)=\begin{bmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z)\\ a_{21}(z) & a_{22}(z)\end{bmatrix}=I+(1-z)\left[\frac{\begin{bmatrix} I\\ w_1\end{bmatrix}}{1-\bar z_1 z}\cdots\frac{\begin{bmatrix} I\\ w_n\end{bmatrix}}{1-\bar z_n z}\right]\times$$

$$\times A_n^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{[-I,\ w_1]}{1-z_1}\\ \vdots\\ \dfrac{[-I,\ w_n]}{1-z_n}\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Методы этих авторов существенно используют положительную определенность матрицы A_n.

Проблему Неванлинны—Пика в более общем скалярном классе мероморфных в круге $|z|<1$ функций рассмотрел впервые Н. И. Ахиезер [3]. Функции этого класса характеризуются представлением $f(z)=s(z)B^{-1}(z)$, где $|s(z)|<1$, а $B(z)$ — конечное произведение Бляшке. Позднее эта задача исследовалась В. М. Адамяном, Д. З. Аровым и М. Г. Крейном в [4].

В связи с теорией характеристических функций изометрических операторов в пространствах $\Pi_\varkappa$ М. Г. Крейном и Г. Лангером [5] был введен класс $S_\varkappa^{(m)}$ матриц — и даже оператор-функций.

Определение. *Мероморфная в круге* $|z|<1$ *матрица-функция* $f(z)$ *принадлежит классу* $S_\varkappa^{(m)}$, $\varkappa$ — *целое неотрицательное число, если каковы бы ни были натуральное* p *и точки голоморфности* $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ *функции* $f(z)$, *эрмитова блок-матрица*

$$\left\{\frac{I-f^*(\zeta_i)f(\zeta_k)}{1-\bar{\zeta}_i\zeta_k}\right\}_{i,k=1}^{p}$$

имеет не более $\varkappa$ *отрицательных собственных значений отрицательных квадратов.* Очевидно $S_0^{(m)}$ есть обычный класс Шура. В § 3 *настоящей работы рассмотрена проблема Неванлинны—Пика в классе* $S_\varkappa^{(m)}$ *и показано, что в случае невырожденности матрицы* $A_\varkappa$ (1) *множество ее решений бесконечно и задается посредством дробно-линейного преобразования* (2) *с резольвентной матрицей* (3). На параметр $s(z)$ в случае $\varkappa>0$ накладываются некоторые ограничения. В § 1 приведено новое теоретико-функциональное доказательство теоремы Крейна—Лангера о представлении функций класса $S_\varkappa^{(m)}$. В § 2 выводится основное неравенство, *которое является аналогом неравенства Шварца—Пика в классе* $S_\varkappa^{(m)}$. *Результаты* §§ 1, 2 *применяются в* § 3.

§ 1. Представление функций класса $S_\varkappa^{(m)}$

1°. Пусть X — некоторое множество. Матричнозначная функция $K(x, y)$, определенная на декартовом произведении $X\times X$ и такая, что $K(x, y)=K^*(y, x)$, называется матричным ядром. Говорят, что ядро $K(x, y)$ имеет не более $\varkappa$ отрицательных квадратов на X, если для любого натурального p и любых точек $x_1, \cdots, x_p$ из X эрмитова (блок-) матрица $\{K(x_i, x_k)\}_{i,k=1}^{p}$ имеет не более $\varkappa$ отрицательных собственных значений. В случае $\varkappa=0$ ядро $K(x, y)$ называется положительно-определенным. Ядра $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$ называются эквивалентными ($K_1(x, y)\sim K_2(x, y)$), если существует обратимая матрица-функция $Q(x)$ на X такая, что $K_2(x, y)=Q^*(x)K_1(x, y)Q(y)$. Если число отрицательных квадратов ядра $K(x, y)$ не превосходит $\varkappa$, то это же верно и для любого эквивалентного ему ядра. Пусть, наконец, ядра $K_i(x, y)$ имеют не более $\varkappa_i$ отрицательных квадратов, $i=1, 2, \cdots, n$. Тогда в силу известных минимаксимальных свойств собственных значений ядро

$K(x, y)=\sum_{l=1}^{n} K_l(x, y)$ имеет не более $\varkappa=\sum_{l=1}^{n}\varkappa_l$ отрицательных квадратов.

Принадлежность функции $f(z)$ классу $S_{\varkappa}^{(m)}$ означает таким образом, что ядро

$$K_f(\zeta, z)=\frac{I-f^*(\zeta)f(z)}{1-\overline{\zeta}z}$$

имеет не более $\varkappa$ отрицательных квадратов на множестве точек голоморфности функции $f(z)$.

Отметим важное свойство классов $S_{\varkappa}^{(m)}$: если $f_i(z)\in S_{\varkappa_i}$ $1\leqslant i\leqslant n$, то произведение $f(z)=f_1(z)\cdots f_n(z)$ принадлежит $S_{\varkappa}$, $\varkappa=\sum_{l=1}^{n}\varkappa_l$. В самом деле

$$K_f(\zeta, z)=f_n^*(\zeta)\cdots f_2^*(\zeta)K_{f_1}(\zeta, z)f_2(z)\cdots f_n(z)+\cdots+$$
$$+f_n^*(\zeta)K_{f_{n-1}}(\zeta, z)f_n(z)+K_{f_n}(\zeta, z)$$

и число отрицательных квадратов ядра $f_n^*(\zeta)\cdots f_{l+1}^*(\zeta)K_{f_l}(\zeta, z)f_{l+1}(z)\cdots$ $\cdots f_n(z)$ не превосходит $\varkappa_l$.

Для построения функций класса $S_{\varkappa}^{(m)}$ введем конечное произведение Бляшке—Потапова

$$B(z)=\prod_{k=1}^{n}{}^{\curvearrowright} B_{\lambda_k}(z)=\prod_{k=1}^{n}{}^{\curvearrowright}\left\{I-\left(1-\frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}\frac{\lambda_k-z}{1-\overline{\lambda}_k z}\right)P_k\right\}, \tag{1.1}$$

где $|\lambda_k|<1$, $P_k=P_k^*=P_k^2$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ — ортопроектор в m-мерном унитарном пространстве. Назовем порядком произведения (1.1) число $\operatorname{ord} B=\sum_{k=1}^{n}\dim P_k$. Непосредственно вычисляются

$$B^{-1}(z)=\prod_{k=1}^{n}{}^{\curvearrowleft} B_{\lambda_k}^{-1}(z)=\prod_{k=1}^{n}{}^{\curvearrowleft}\left\{I-\left(1-\frac{\lambda_k}{|\lambda_k|}\frac{1-\overline{\lambda}_k z}{\lambda_k-z}\right)P_k\right\}$$

и

$$K_{B_{\lambda_k}^{-1}}(\zeta, z)=-\frac{(1-|\lambda_k|^2)P_k}{(\lambda_k-z)(\overline{\lambda}_k-\overline{\zeta})},$$

откуда следует, что ядро $K_{B_{\lambda_k}^{-1}}(\zeta, z)$ имеет не более $\dim P_k$ отрицательных квадратов. Если $s(z)\in S_0^{(m)}$ и

$$f(z)=s(z)B^{-1}(z), \tag{1.2}$$

то ядро $K_f(\zeta, z)$ имеет не более $\varkappa=\operatorname{ord} B$ отрицательных квадратов. Мы покажем здесь, что, наоборот, каждая функция класса $S_{\varkappa}^{(m)}$ допускает представление (1.2) с произведением Бляшке—Потапова $B(z)$ порядка $\varkappa$.

2°. Пусть $\delta(z)$ — голоморфная в замкнутом единичном круге $m\times m$ матрица-функция. Число нулей ее детерминанта внутри круга обозначим $N[\delta(z)]$.

Лемма 1. *Пусть*

$$A_i(z)=\begin{bmatrix} \alpha_i(z) & \beta_i(z) \\ \gamma_i(z) & \delta_i(z) \end{bmatrix},\ i=1,2$$

— голоморфные в замкнутом единичном круге $2m\times 2m$ *матрицы-функции, J-унитарные на окружности:*

$$A_i^*(\zeta)\,JA_i(\zeta)-J=A_i(\zeta)\,JA_i^*(\zeta)-J=0,\ J=\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},\ I\equiv I_m. \tag{1.3}$$

Если

$$A(z)=\begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{bmatrix}=A_1(z)\,A_2(z),$$

то

$$N[\delta(z)]=N[\delta_1(z)]+N[\delta_2(z)]. \tag{1.4}$$

Доказательство. Из (1.3) немедленно следует, что

$$\delta_1(\zeta)\,\delta_1^*(\zeta)-\gamma_1(\zeta)\,\gamma_1^*(\zeta)=I,\ \delta_2^*(\zeta)\,\delta_2(\zeta)-\beta_2^*(\zeta)\,\beta_2(\zeta)=I. \tag{1.5}$$

Поэтому матрицы $\delta_i(z)$ невырождены и $\delta_i^{-1}(z)$ голоморфны в некотором кольце $r\leqslant|z|<1$, $r<1$, $i=1, 2$. Далее

$$I-\delta_1^{-1}(\zeta)\,\gamma_1(\zeta)\,\gamma_1^*(\zeta)\,\delta_1^{-1*}(\zeta)=\delta_1^{-1}(\zeta)\,\delta_1^{-1*}(\zeta),$$

$$I-\delta_2^{*-1}(\zeta)\,\beta_2^*(\zeta)\,\beta_2(\zeta)\,\delta_2^{-1}(\zeta)=\delta_2^{*-1}(\zeta)\,\delta_2^{-1}(\zeta)$$

и если $\|\cdot\|$ обозначает, как обычно, операторную норму матрицы, то

$$\|\delta_1^{-1}(\zeta)\,\gamma_1(\zeta)\|^2\leqslant 1-\|\delta_1(\zeta)\|^{-2}<1-h_1,\ \|\beta_2(\zeta)\,\delta_2^{-1}(\zeta)\|^2<1-\|\delta_2(\zeta)\|^2<1-h_2. \tag{1.6}$$

Поскольку

$$\delta(z)=\delta_1(z)\,\delta_2(z)+\gamma_1(z)\,\beta_2(z)=\delta_1(z)\,\{\delta_2(z)+\delta_1^{-1}(z)\,\gamma_1(z)\,\beta_2(z)\}$$

и

$$\|\delta_1^{-1}(\zeta)\,\gamma_1(\zeta)\,\beta_2(\zeta)\,\delta_2^{-1}(\zeta)\|\leqslant\sqrt{(1-h_1)(1-h_2)}<1-h_3,\ h_3>0,$$

то на основании матричного аналога теоремы Руше (см. [6])

$$N[\delta(z)]=N[\delta_1(z)]+N[\delta_2(z)],$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть*

$$A(z)=\begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{bmatrix}$$

— голоморфная в замкнутом единичном круге и J-унитарная на единичной окружности $2m\times 2m$ *матрица-функция, и* $s(z)$ *— произвольная функция класса* $S_0^{(m)}$. *Тогда* $\det[\gamma(z)\,\delta(z)+\delta(z)]\neq 0$, *и следовательно, имеет смысл дробно-линейное преобразование*

$$A(z)<s(z)>\overset{\text{def}}{=}(\alpha(z)\,s(z)+\beta(z))(\gamma(z)\,s(z)+\delta(z))^{-1}=f(z),$$

являющееся мероморфной матрицей-функцией в круге $|z|<1$. *При этом*

$$f(z)=\tilde{s}(z)\,\tilde{B}^{-1}(z),$$

где $\tilde{s}(z)\in S_0^{(m)}$, $\tilde{B}(z)$ — *конечное произведение Бляшке—Потапова и* $\operatorname{ord} B=N[\delta(z)]$.

Доказательство. Как показано в лемме 1 (см. (1.5)—(1.6),

$$\|\delta^{-1}(\zeta)\,\gamma(z)\|^2<1-h,\ h>0,\ |\zeta|=1, \tag{1.7}$$

откуда следует, что в некотором кольце $\rho_1\leqslant|z|<1$

$$\|\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\,s(z)\|^2\leqslant\|\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\|^2<1-\frac{h}{2}.$$

Если λ — собственное значение матрицы $\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\,s(z)$, отвечающее собственному вектору e, то

$$|\lambda|^2=\|\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\,s(z)\,e\|^2\leqslant\|\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\,s(z)\|^2<1-\frac{h}{2},$$

т. е. при $\rho_1\leqslant|z|<1$ спектр матрицы $\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\,s(z)$ лежит в круге $|z|<\left(1-\dfrac{h}{2}\right)^{1/2}$. Поэтому

$$|\det[\gamma(z)\,s(z)+\delta(z)]|=|\det\delta(z)|\,|\det[I+\delta^{-1}(z)\,\gamma(z)\,s(z)]|\geqslant c>0 \tag{1.8}$$

в некотором кольце $\rho_2\leqslant|z|<1$. Отсюда уже следует первое утверждение леммы.

Так как $\|s(z)\|\leqslant1$, то при любом $0<\rho<1$ к функции $\gamma(z)\,s(\rho z)+$ $+\delta(z)$ в силу (1.7) применима уже упоминавшаяся теорема Руше, на основании которой

$$N[\gamma(z)\,s(\rho z)+\delta(z)]=N[\delta(z)].$$

Устремляя ρ к единице и используя известную теорему Гурвица (см) [7], стр. 428), получим

$$N[\gamma(z)\,s(z)+\delta(z)]=N[\delta(z)]. \tag{1.9}$$

Ограниченная аналитическая функция $\chi(z)=\det[\gamma(z)\,s(z)+\delta(z)]$ допускает каноническую факторизацию (см. [8], стр. 100, 103)

$$\chi(z)=b(z)\,\sigma(z)\,F(z),$$

где $b(z)$ — произведение Бляшке, $\sigma(z)$ — сингулярная функция, $F(z)$ — ограниченная внешняя функция. Комбинируя неравенство (1.8) с известным свойством сингулярных функций (см. [8], стр. 111), получаем, что $\sigma(z)\equiv1$. Учитывая (1.9), имеем

$$\chi(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}\,\frac{\lambda_k-z}{1-\bar{\lambda}_k z}\,F(z),\quad n=N[\delta(z)]. \tag{1.10}$$

Теорема о мультипликативном представлении ограниченных аналитических матриц-функций (см. [9]) вместе с равенством (1.10) позволяет заключить, что

$$\gamma(z)\, s(z) + \delta(z) = \widetilde{B}(z)\, \Theta(z),$$

где $\widetilde{B}(z)$ — произведение Бляшке—Потапова порядка n, $\Theta(z)$ — ограниченная внешняя матрица-функция. Следовательно,

$$f(z) = (\alpha(z)\, s(z) + \beta(z))\, \Theta^{-1}(z)\, \widetilde{B}^{-1}(z),$$

$$f(z)\, \widetilde{B}(z) = (\alpha(z)\, s(z) + \beta(z))\, \Theta^{-1}(z). \qquad (1.11)$$

Из определения $f(z)$ и J-унитарности матрицы $A(\zeta)$ уже следует, что $\|f(\zeta)\| \leqslant 1$, и значит

$$\|f(\zeta)\, \widetilde{B}(\zeta)\| = \|(\alpha(\zeta)\, s(\zeta) + \beta(\zeta))\, \Theta^{-1}(\zeta)\| \leqslant 1, \ |\zeta| = 1.$$

Функция $(\alpha(z)\, s(z) + \beta(z))\, \Theta^{-1}(z)$ принадлежит классу D, в котором справедлив принцип максимума (см. [10]). Таким образом $\|f(z)\, \widetilde{B}(z)\| \leqslant 1$, что завершает доказательство леммы.

Обозначим $\nu(M)$ число отрицательных собственных значений эрмитовой матрицы M.

Лемма 3. *Пусть эрмитова матрица M разбита на блоки*

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & c \end{bmatrix},$$

где a и c — квадратные матрицы (возможно, различных порядков), и c невырождена. Тогда

$$\nu(M) = \nu(c) + \nu(a - bc^{-1} b^*). \qquad (1.12)$$

Доказательство. Приведем матрицу M треугольным преобразованием к блочно-диагональному виду

$$M = \begin{bmatrix} I & bc^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - bc^{-1} b^* & O \\ O & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ c^{-1} b^* & I \end{bmatrix}.$$

Соотношение (1.12) теперь очевидно.

Теорема (М. Г. Крейн — Лангер). *Матрица-функция $f(z)$ класса $S_{\varkappa}^{(m)}$ допускает представление*

$$f(z) = s(z)\, B^{-1}(z), \qquad (1.13)$$

где $s(z)$ — сжимающая аналитическая матрица-функция, $B(z)$ — произведение Бляшке—Потапова порядка $\varkappa$.

Доказательство. Если $f(z)$ не принадлежит $S_0^{(m)}$, то найдется точка $z_0 \neq 0$ такая, что

$$\nu([I - w_0^* w_0]) = \nu_0 > 0, \ w_0 = f(z_0).$$

Допустим, что

$$\det\, [I - w_0^* w_0] \neq 0. \qquad (1.14)$$

Тогда $\det[I - w_0 w_0^*] \neq 0$ и можно построить так называемый двучленный множитель, параметризованный z_0 и w_0:

$$g_0(z) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(z) & \alpha_{12}(z) \\ \alpha_{21}(z) & \alpha_{22}(z) \end{bmatrix} = I_{2m} + (1 + b_0(z))\, P_0,\quad I_{2m} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_m \end{bmatrix},\quad I_m \equiv I,$$

$$b_0(z) = \frac{1-\bar z_0}{1-z_0}\,\frac{z_0 - z}{1-\bar z_0 z},\quad P_0 = \begin{bmatrix} I \\ w_0^* \end{bmatrix} (I - w_0 w_0^*)^{-1} [-I,\ w_0], \tag{1.15}$$

$$P_0^2 = -P_0,\quad P_0 J = J P_0^*.$$

Непосредственно вычисляется его J-форма

$$g_0(z)\, J g_0^*(\zeta) - J = (1 - \bar\zeta z)\, \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \bar z_0 z)(1 - z_0 \bar\zeta)}\, P_0 J,$$

откуда видно, что матрица $g_0(\zeta)$ J-унитарна на единичной окружности. Для $g_0^{-1}(z)$ имеем

$$g_0^{-1}(z) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(z) & \beta_{12}(z) \\ \beta_{21}(z) & \beta_{22}(z) \end{bmatrix} = I_{2m} + (1 + b_0^{-1}(z))\, P_0. \tag{1.16}$$

Нас будет интересовать функция

$$s_0(z) = g_0^{-1}(z) \langle f(z) \rangle = (\beta_{11}(z) f(z) + \beta_{12}(z))(\beta_{21}(z) f(z) + \beta_{22}(z))^{-1}. \tag{1.17}$$

Используя легко проверяемые равенства

$$w_0 (I - w_0 w_0^*)^{-1} = (I - w_0^* w_0)^{-1} w_0^*,\quad I + w_0^* (I - w_0 w_0^*)^{-1} w_0 = (I - w_0^* w_0)^{-1} \tag{1.18}$$

и выражение (1.16) для $g_0^{-1}(z)$, убеждаемся в том, что

$$\beta_{21}(z) f_1(z) + \beta_{22}(z) = (I - w_0^* w_0)^{-1} [I + b_0^{1}(z)\, w_0^* w -$$
$$- (1 + b_0^{-1}(z))\, w_0^* f(z)].$$

Таким образом, предположение

$$\det[I + b_0^{-1}(z)\, w_0^* w_0 - (1 + b_0^{-1}(z))\, w_0^* f(z)] \neq 0 \tag{1.19}$$

обеспечивает существование дробно-линейного преобразования (1.17).

Вычислим ядро $K_{s_0}(\zeta, z)$, считая, что обратные матрицы существуют. Обозначая

$$g_0^{-1*}(\zeta)\, J\, g_0^{-1}(z) =$$
$$= \begin{bmatrix} \beta_{21}^*(\zeta)\beta_{21}(z) - \beta_{11}^*(\zeta)\beta_{11}(z) & \beta_{21}^*(\zeta)\beta_{22}(z) - \beta_{11}^*(\zeta)\beta_{12}(z) \\ \beta_{22}^*(\zeta)\beta_{21}(z) - \beta_{12}^*(\zeta)\beta_{11}(z) & \beta_{22}^*(\zeta)\beta_{21}(\zeta) - \beta_{12}^*(\zeta)\beta_{12}(z) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \gamma_{11}(\zeta, z) & \gamma_{12}(\zeta, z) \\ \gamma_{21}(\zeta, z) & \gamma_{22}(\zeta, z) \end{bmatrix},$$

получим

$$K_{s_0}(\zeta, z) = (1 - \bar\zeta z)^{-1} (f^*(\zeta)\beta_{21}^*(\zeta) + \beta_{22}^*(\zeta))^{-1} [f^*(\zeta)\gamma_{11}(\zeta, z) f(z) +$$
$$+ f^*(\zeta)\gamma_{12}(\zeta, z) + \gamma_{21}(\zeta, z) f(z) + \gamma_{22}(\zeta, z)] \times (\beta_{21}(z) f(z) + \beta_{22}(z))^{-1}.$$

Дальнейшие преобразования используют выражение для J-формы $g_0^{-1}(z)$:

$$g_0^{-1*}(\zeta)\, J\, g_0^{-1}(z)-J=(1-\bar\zeta z)\,\frac{1-|z_0|^2}{(\bar\zeta-\bar z_0)(z-z_0)}\begin{bmatrix}-I\\ w_0^*\end{bmatrix}(I-w_0w_0^*)^{-1}\,[-I,\, w_0],$$

откуда

$$K_{s_0}(\zeta, z)=(1-\bar\zeta z)^{-1}\,(f^*(\zeta)\beta_{21}^*(\zeta)+\beta_{22}^*(\zeta))^{-1}\Big\{I-f^*(\zeta)\, f(z)-$$

$$-\frac{(1-\bar\zeta z)(1-|z_0|^2)}{(\bar\zeta-\bar z_0)(z-z_0)}\cdot(f^*(\zeta)-w_0^*)(I-w_0w_0^*)^{-1}(f(z)-w_0)\Big\}\times$$

$$\times(\beta_{12}(z)f(z)+\beta_{22}(z))^{-1}. \tag{1.20}$$

Учитывая, что $(1-\bar\zeta z)(1-|z_0|^2)(\bar\zeta-\bar z_0)^{-1}(z-z_0)^{-1}=\overline{b_0^{-1}(\zeta)}\, b_0^{-1}(z)-1$ и используя (1.18), получим

$$-K_{s_0}(\zeta, z)=(1-\bar\zeta z)^{-1}\,\overline{b_0^{-1}(\zeta)}(f^*(\zeta)\beta_{21}^*(\zeta)+\beta_{22}^*(\zeta))^{-1}\,\{I-f^*(\zeta)\, f(z)-$$

$$-(1-\overline{b_0(\zeta)}\, b_0(z))(I-f^*(\zeta)\, w_0)(I-w_0^*w_0)^{-1}(I-w_0^* f(z))\}\times$$

$$\times(\beta_{21}(z)f(z)+\beta_{22}(z))^{-1}\, b_0^{-1}(z)$$

и значит

$$K_{s_0}(\zeta, z)\sim\left(\frac{I-f^*(\zeta)\,f(z)}{1-\bar\zeta z}-\frac{I-f^*(\zeta)\,w_0}{1-z_0\bar\zeta}\left(\frac{I-w_0^*w_0}{1-|z_0|^2}\right)^{-1}\frac{I-w_0^*f(z)}{1-\bar z_0 z}\right).$$

Применяя лемму 3 к матрице

$$M=\left\{\frac{I-f^*(z_l)\,f(z_k)}{1-\bar z_l z_k}\right\}_{l,\,k=1}^{n},$$

где $z_1,\cdots,z_n$ — точки голоморфности $f(z)$, а $z_{n+1}=z_0$, убеждаемся, что $s_0(z)$ принадлежит $S^{(m)}_{x-\nu_0}$. Итак

$$f(z)=g_0(z)<s_0(z)>,\quad s_0(z)\in S^{(m)}_{x-\nu_0}. \tag{1.21}$$

Имея в виду применение леммы 2, вычислим $N[\alpha_{22}(z)]$. Из (1.15) следует, что

$$\alpha_{22}(z)=I+(1+b_0^{-1}(z))\,w_0^*(1-w_0w_0^*)^{-1}w_0=$$

$$=(I-w_0^*w)^{-1}(I+b_0(z)\,w_0^*w_0),$$

$$\det\alpha_{22}(z)=\det(I-w_0^*w_0)^{-1}\det(I+b_0(z)\,w_0^*w_0).$$

Если $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{\nu_0}<0<\lambda_{\nu_0+1}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m\leqslant 1$ — собственные значения матрицы $I-w_0^*w_0$, то

$$\det[I+b_0(z)\,w_0^*w_0]=\prod_{l=1}^{m}(1+(1-\lambda_l)\,b_0(z))$$

и

$$N[\alpha_{22}(z)]=\nu. \tag{1.22}$$

Рассуждение завершается индукцией по x. Если $x=1$, то $\nu_0=1$ и справедливость теоремы следует из (1.21), (1.22) и леммы 2. Пусть утверждение справедливо при всех $p<x$. Тогда из (1.21)

$$s_0(z) = s(z) B^{-1}(z) = g(z) \langle s(z) \rangle, \quad g(z) = \begin{bmatrix} I & O \\ O & B(z) \end{bmatrix},$$

$$s(z) \in S_0^{(m)}, \quad \operatorname{ord} B = \varkappa - \nu_0$$

и значит

$$f(z) = g_0(z) g(z) \langle s(z) \rangle.$$

Остается применить леммы 1 и 2 с учетом (1.22).

Для того чтобы избавиться от предположений (1.14) и (1.19) воспользуемся простым алгебраическим фактом: если U — $m \times m$ матрица, то $\det(I + \varepsilon U) \neq 0$ для всех ε за исключением лишь конечного множества. Допустим теперь, что одно из предложений нарушается. Введем функцию $f_\varepsilon(z) = \varepsilon f(z)$, $\varepsilon < 1$. Она также принадлежит $S_\varkappa^{(m)}$, поскольку $K_{f_\varepsilon}(\zeta, z) = K_f(\zeta, z) + (1 - \varepsilon^2)(1 - \bar{\zeta} z)^{-1} f^*(\zeta) f(z)$ и ядро $(1 - \bar{\zeta} z)^{-1} I$ положительно-определено. При ε близких к 1, $\varepsilon \neq 1$ условия (1.14) и (1.19) заведомо выполнены, т. е. $f_\varepsilon(z)$ допускает представление (1.13). В силу компактности семейства функций (1.13) утверждение справедливо и для $f(z)$. Теорема полностью доказана.

Учитывая сказанное в п. 1 мы заключаем, что принадлежность матрицы-функции классу $S_\varkappa^{(m)}$ характеризуется представлением (1.13). В работе [5] это утверждение доказано для оператор-функций.

§ 2. Неравенство Шварца—Пика в классе $S_\varkappa^{(m)}$

Пусть $f(z) = s(z) B^{-1}(z)$ — функция класса $S_\varkappa^{(m)}$. Предполагая, что

$$\det s(z) \not\equiv 0 \tag{2.1}$$

(или, что то же, $\det f(z) \not\equiv 0$) введем ее „продолжение по симметрии" в область $\{|z| > 1\}$ (которое будем обозначать тем же символом) по формуле

$$f(z) = s^{*-1}(\bar{z}^{-1}) B^{-1}(z), \quad |z| > 1. \tag{2.2}$$

Полученная таким образом функция $f(z)$ мероморфна в области $\mathbf{C} \setminus \{|z| = 1\}$. Поскольку $B^*(\bar{z}^{-1}) = B^{-1}(z)$, то

$$f(z) = f^{*-1}(\bar{z}^{-1}). \tag{2.3}$$

Как известно, функция $s(z)$ класса $S_0^{(m)}$, продолженная по симметрии на внешность круга, удовлетворяет неравенству Шварца—Пика в каждой из двух эквивалентных форм:

$$\left\{ \frac{I - s(\zeta_i) s^*(\zeta_k)}{1 - \zeta_i \bar{\zeta}_k} \right\}_{i, k=1}^{p} \geqslant 0, \quad \left\{ \frac{I - s^*(\zeta_i) s(\zeta_k)}{1 - \bar{\zeta}_i \zeta_k} \right\}_{i, k=1}^{p} \geqslant 0,$$

где p — натуральное число, $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ — точки голоморфности $s(z)$ такие, что $1 - \zeta_i \bar{\zeta}_k \neq 0$; $i, k = 1, 2, \cdots, p$. Иначе говоря, на этом множестве точек ядро $K_s(\zeta, z)$ положительно-определено. Поэтому, если $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ — точки голоморфности $f(z)$ и $1 - \bar{\zeta}_i \zeta_k \neq 0$, то

$$\nu\left(\left[K_f(\zeta_i, \zeta_k)\right]_{i,k=1}^{p}\right) \leqslant \varkappa.$$

Запишем это условие для $p+q$ точек $\zeta_1, \cdots, \zeta_p; \bar{\zeta}_{p+1}^{-1}, \cdots, \bar{\zeta}_{p+q}^{-1}$, считая $|\zeta_i|<1$, $i=1, \cdots, p+q$. и $\zeta_i \neq 0$, $i=p+1, \cdots, p+q$,

$$\nu(M_1) \leqslant \varkappa,$$

$$M_1 = \left[\begin{array}{c|c} \left\{\dfrac{I-f^*(\zeta_i) f(\zeta_k)}{1-\bar{\zeta}\zeta_k}\right\}_{i,k=1}^{p} & \left\{\dfrac{I-f^*(\zeta_i) f(\bar{\zeta}_{p+l}^{-1})}{1-\bar{\zeta}_i \bar{\zeta}_{p+k}^{-1}}\right\}_{\substack{i=1,\cdots,p \\ k=1,\cdots,q}} \\ \hline * & \left\{\dfrac{I-f^*(\bar{\zeta}_{p+l}^{-1}) f(\bar{\zeta}_{p+k}^{-1})}{1-\zeta_{p+l}^{-1}\bar{\zeta}_{p+k}^{-1}}\right\}_{l,k=1}^{q} \end{array}\right].$$

Умножая матрицу M_1 слева на $\begin{bmatrix} I & O \\ O & T \end{bmatrix}$ и справа на $\begin{bmatrix} I & O \\ O & T^* \end{bmatrix}$, $T = \mathrm{Diag}\left[\dfrac{f(z_{p+1})}{z_{p+1}}, \cdots, \dfrac{f(z_{p+q})}{z_{p+q}}\right]$ — диагональная блок-матрица (число отрицательных собственных значений при этом не увеличится) и учитывая свойство симметрии (2.3), получим

$$\nu(M) \leqslant \varkappa, \tag{2.4}$$

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \left\{\dfrac{I-f^*(\zeta_i f)(\zeta_k)}{1-\bar{\zeta}_i\zeta_k}\right\}_{i,k=1}^{p} & \left\{\dfrac{f^*(\zeta_i)-f^*(\zeta_{p+k})}{\bar{\zeta}_i-\bar{\zeta}_{p+k}}\right\}_{\substack{i=1,\cdots,p \\ k=1,\cdots,q}} \\ \hline * & \left\{\dfrac{I-f(\zeta_{p+l}) f^*(\zeta_{p+k})}{1-\zeta_{p+l}\bar{\zeta}_{p+k}}\right\}_{l,k=1}^{q} \end{array}\right]. \tag{2.5}$$

Ограничение $\zeta_i \neq 0$, $i=p+1, \cdots, p+q$ снимается предельным переходом в неравенстве (2.4). Если нарушается условие (2.1), то рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(z) = s_\varepsilon(z) B^{-1}(z),\ s_\varepsilon(z) = (s(z) - \varepsilon I)(I - \varepsilon s(z))^{-1},\ 0<\varepsilon<1,$$

принадлежащую $S_\varkappa^{(m)}$, поскольку $s_\varepsilon(z)$ принадлежит $S_0^{(m)}$, для которой (2.1) заведомо выполнено при достаточно малых ε. Остается теперь перейти к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ в неравенстве (2.4). Итак, (2.4) справедливо для любой функции $f(z)$ класса $S_\varkappa^{(m)}$ и любых ее точек голоморфности $\zeta_1, \cdots, \zeta_{p+q}$ в единичном круге. Назовем его неравенством Шварца–Пика в классе $S_\varkappa^{(m)}$. Важным следствием неравенства (2.4) является тот факт, что условия

$$\nu\left(\left\{\frac{I-f^*(\zeta_i) f(\zeta_k)}{1-\bar{\zeta}_i\zeta_k}\right\}_{i,k=1}^{p}\right) \leqslant \varkappa,\quad \nu\left(\left\{\frac{I-f(\zeta_i) f^*(\zeta_k)}{1-\zeta_i\bar{\zeta}_k}\right\}_{i,k=k}^{p}\right) \leqslant \varkappa \tag{2.6}$$

эквивалентны.

§ 3. Проблема Неванлинны—Пика в классе $S_{\varkappa}^{(m)}$

Пусть заданы точки $z_1, \cdots, z_n$ ($|z_i| < 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$)— узлы интерполяции, и $m \times m$-матрицы $w_1, \cdots, w_n$ — значения интерполяции. Проблема Неванлинны—Пика (Н.—П.) состоит в описании множества функций $f(z)$ из $S_{\varkappa}^{(m)}$, голоморфных в узлах интерполяции и таких, что

$$f(z_i) = w_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.1}$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Если информационный блок*

$$A_n = \left\{ \frac{I - w_i w_k^*}{1 - z_i \bar{z}_k} \right\}_{i,k=1}^{n} \tag{3.2}$$

невырожден и $\nu(A_n) = \nu$, *то проблема Н.—П. в классе* $S_{\nu+r}^{(m)}$, $r \geqslant 0$, *имеет бесконечное множество решений, которое параметризуется дробно-линейным преобразованием*

$$f(z) = (a_{11}(z)\,\varepsilon(z) + a_{12}(z))\,(a_{21}(z)\,\varepsilon(z) + a_{22}(z))^{-1}. \tag{3.3}$$

Резольвентная матрица $R_n(z)$ (3) *преобразования* (3.3)*—голоморфная в замкнутом единичном круге* $2m \times 2m$ *матрица-функция, j-унитарная на окружности, и*

$$\nu\left(\left\{ \frac{R_n(\zeta_i)\, J\, R_n^*(\zeta_k) - J}{1 - \zeta_i \bar{\zeta}_k} \right\}_{i,k=1}^{p}\right) \leqslant \nu, \quad J = \begin{bmatrix} -I & O \\ O & I \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

для любых точек $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ *единичного круга. Параметр дробно-линейного преобразования* (3.3) $\varepsilon(z)$*—функция класса* $S_r^{(m)}$ *такая, что*

$$\det [a_{21}(z_i)\,\varepsilon(z_i) + a_{22}(z_i)] \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.5}$$

Доказательству теоремы предпошлем следующее утверждение

Лемма 4. *Если*

$$R_n(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{bmatrix}$$

— резольвентная матрица (3), *то*

$$\nu(a_{22}(z)) = \nu(A_n) = \nu. \tag{3.6}$$

Доказательство. Покажем, что при некотором предположении матрица $R_n(z)$ допускает факторизацию $R_n(z) = R_{n-1}(z)\, g_n(z)$, где $R_{n-1}(z)$— матрица того же вида (3), параметризованная z_i, w_i, $i = 1, 2, \cdots, n-1$, а $g_n(z)$ — двучленный множитель вида (1.15). В самом деле, допустим, что

$$\det A_{n-1} \neq 0, \quad A_{n-1} = \left\{ \frac{I - w_i w_k^*}{1 - z_i \bar{z}_k} \right\}_{i,k=1}^{n}. \tag{3.7}$$

Тогда можно построить матрицы $R_{n-1}(z)$ и $g_n(z) = R_{n-1}^{-1}(z)\, R_n(z)$. Учитывая, что

$$R_n^{-1}(z)=\begin{bmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z)\\ b_{21}(z) & b_{22}(z)\end{bmatrix}=I-(1-z)\,G_n\{A_n^{-1};\ z\} \tag{3.8}$$

(аналогичное выражение имеет место и для $R_{n-1}^{-1}(z)$), получим

$$g_n(z)=I-(1-z)\,G_{n-1}\{A_{n-1}^{-1};\ z\}-(1-z)^2\,G_{n-1}\{A_{n-1}^{-1};\ z\}\,G_n\{A_n^{-1};\ z\}$$

где

$$G_k\{A_k^{-1};\ z\}=\left[\frac{\begin{bmatrix} I\\ w_1^{*}\end{bmatrix}}{1-\bar z_1}\ \cdots\ \frac{\begin{bmatrix} I\\ w_k^{*}\end{bmatrix}}{1-\bar z_k}\right]A_k^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{[-I,\ w_1]}{z-z_1}\\ \vdots\\ \dfrac{[-I,\ w_k]}{z-z_k}\end{bmatrix}.$$

Информационные блоки A_n и A_{n-1} связаны соотношениями

$$A_n=\begin{bmatrix} I & O\\ B_{n-1}^{*}A_{n-1} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{n-1} & O\\ O & d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{n-1}A_{n-1}^{-1}B_{n-1}\\ O \quad I\end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

$$d_n=\frac{I-w_n w_n^{*}}{1-z_n\bar z_n}-B_{n-1}^{*}A_{n-1}^{-1}B_{n-1},\quad B_{n-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{I-w_1 w_n^{*}}{1-z_1\bar z_n}\\ \vdots\\ \dfrac{I-w_{n-1}w_n^{*}}{1-z_{n-1}\bar z_n}\end{bmatrix},$$

$$A_n^{-1}=\begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} & O\\ O & O\end{bmatrix}+D_n,\quad D_n=\begin{bmatrix} -A_{n-1}^{-1}B_{n-1}\\ I\end{bmatrix}d_n^{-1}\left[-B_{n-1}^{*}A_{n-1},\ I\right] \tag{3.10}$$

(d_n невырождена в силу (3.9) и невырожденности A_n). Из последнего равенства имеем

$$G_{n-1}\{A_{n-1}^{-1};\ z\}=G_n\{A_n^{-1}-D_n;\ z\}.$$

Непосредственно проверяется следующее тождество:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{[-I,\ w_1]}{z-z_1}\\ \vdots\\ \dfrac{[-I,\ w_n]}{z-z_n}\end{bmatrix}\left[\frac{\begin{bmatrix} I\\ w_1^{*}\end{bmatrix}}{1-\bar z_1 z}\ \cdots\ \frac{\begin{bmatrix} 1\\ w_n^{*}\end{bmatrix}}{1-\bar z_n z}\right]=X_1\,(ZA_nZ^{*}-A_n)\,X_2=$$

$$=-\frac{1}{z}A_nX_2-X_1A_n+\frac{1}{z}A_n,$$

$$X_1=\mathrm{Diag}\left[\frac{I}{z-z_1},\cdots,\frac{I}{z-z_n}\right],\ X_2=\mathrm{Diag}\left[\frac{I}{1-\bar z_1 z},\cdots,\frac{I}{1-\bar z_n z}\right],$$

$$Z=\mathrm{Diag}\,[z_1 I,\cdots,\ z_n I]$$

— диагональные блок-матрицы порядка nm. Ряд тождественных преобразований приводит к следующему выражению для $g_n(z)$:

$$g_n(z)=I+\frac{(1-z)(1-\bar z_n)}{1-\bar z_n z}\left[\frac{\begin{bmatrix} I \\ \cdot \\ w_1^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_1}\cdots\frac{\begin{bmatrix} I \\ \cdot \\ w_n^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_n}\right]D_n\begin{bmatrix}\frac{[-I,w_1]}{1-z_1}\\ \vdots \\ \frac{[-I,w_n]}{1-z_n}\end{bmatrix}$$

или, обозначая

$$u=\left[\frac{I}{1-z_1}\cdots\frac{I}{1-z_n}\right]\begin{bmatrix}-A_{n-1}^{-1}B_{n-1}\\ I\end{bmatrix},\ v=\left[\frac{w_1^*}{1-\bar z_1}\cdots\frac{w_n^*}{1-\bar z_n}\right]\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\frac{-A_{n-1}^{-1}B_{n-1}}{I}\end{bmatrix},\quad U_n=\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}d_{n-1}^{-1}[-u^*,\ v^*],$$

окончательно получим

$$g_n(z)=I+\frac{(1-z)(1-\bar z_n)}{1-\bar z_n z}U_n.$$

Используя (3.9), нетрудно убедиться, что

$$u^*u-v^*v=\mu_n d_n,\quad \mu_n=|1-z_n|^{-2}(1-|z_n|^2). \tag{3.11}$$

Отсюда сразу же следует, что $U_n^2=-\mu_n U_n$, и если положить $P_n=$ $=\mu_n^{-1}U_n$, то $P_n^2=-P_n$. Таким образом

$$g_n(z)=I+\frac{(1-z)(1-|z_n|^2)}{(1-\bar z z_n)(1-z_n)}P_n,\ P_n^2=-P_n,\ P_nJ=JP_n^*.$$

Далее, в силу (3.11) u — неособенная матрица и $I-u^{*-1}v^*uu^{-1}=$ $=\mu_n u^{*-1}d_n u^{-1}$. Обозначая $w_0=u^{*-1}v^*$, получим

$$P_n=\begin{bmatrix}I\\ \cdot\\ w_0\end{bmatrix}\mu_n^{-1}ud_n^{-1}u^*[-I,\ w_0]=\begin{bmatrix}I\\ \cdot\\ w_0\end{bmatrix}(I-w_0w_0^*)^{-1}[-I,\ w_0].$$

Следовательно, $g_n(z)$ — двучленный множитель вида (1.15). Заметим, что $\nu(I-w_0w_0^*)=\nu(d_n)$ и, как следует из равенства (3.9)

$$\nu(A_n)=\nu(A_{n-1})+\nu(d_n). \tag{3.12}$$

Доказательство леммы завершим индукцией по n. При $n=1$ утверждение доказано выше (см. равенство (1.22)). Если утверждение верно для матрицы-функции $R_{n-1}(z)$, то используя факторизацию, лемму 1 и равенство (3.12), получим (3.6). От предположения (3.7) избавляемся путем введения малых „возмущений“ $w_i(t)$, $1\leqslant i\leqslant n$, таких, что $w_i(0)=w_i$, $1\leqslant i\leqslant n-1$ и при $t\neq 0$ $\det A_k\neq 0$, $k=n-1, n$. Справедливость (3.6) теперь следует из теоремы Гурвица. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Из вида резольвентной матрицы (3) следует, что $R_n(z)$ — рациональная матрица-функция, имеющая не более n полюсов в множестве точек $\bar z_1^{-1},\cdots,\bar z_n^{-1}$, и поэтому голоморфная в замкнутом единичном круге. Выражение для J-формы

$$g_n(z)\,J\,g_n^*(\zeta)-J=(1-\bar\zeta z)\left[\frac{\begin{bmatrix} I \\ w_1^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_1 z}\ \cdots\right]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{[I,\ w_1]}{1-z_1\bar\zeta}\\ \vdots \\ \dfrac{[I,\ w_n]}{1-z_n\bar\zeta}\end{bmatrix}$$

влечет J-унитарность $g_n(z)$ на окружности и свойство (3.4).

Отметим прежде всего, что при условии $\nu(A_n)=\nu$ проблема Н.—П. может иметь решение в классах $S_{\nu+r}^{(m)}$, $r\geqslant 0$. Пусть $f(z)$ принадлежит $S_{\nu+r}^{(m)}$. В силу представления (1.13) $\|f(z)\|$ ограничена в окрестности точки $|z|=1$. Поскольку матрица-функция

$$R_n^{-1}(z)=\begin{Vmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z) \\ b_{21}(z) & b_{22}(z)\end{Vmatrix}$$

имеет вид (3.3), то нетрудно убедиться, что $\lim\limits_{|z|\to 1-0}[b_{21}(z)f(z)+b_{22}(z)]=I$ и значит $\det[b_{21}(z)f(z)+b_{22}(z)]\neq 0$. Таким образом, имеет смысл дробнолинейное преобразование

$$\varepsilon(z)=(b_{11}(z)f(z)+b_{12}(z))(b_{21}(z)f(z)+b_{22}(z))^{-1} \tag{3.13}$$

и определяет мероморфную матрицу-функцию в единичном круге. Предположим теперь, что $f(z)$ решает проблему Н.—П. Используя выражение для J-формы $R_n^{-1}(z)$

$$R_n^{-1*}(\zeta)\,J\,R_n^{-1}(z)-J=(\bar\zeta z-1)\left[\frac{\begin{bmatrix}-I\\ w_1^*\end{bmatrix}}{\bar\zeta-\bar z_1}\ \vdots\ \frac{\begin{bmatrix}-I\\ w_n^*\end{bmatrix}}{\bar\zeta-\bar z_n}\right]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{[-I,\ w_1]}{z-z_1}\\ \vdots \\ \dfrac{[-I,\ w_n]}{z-z_n}\end{bmatrix},$$

получим (ср. с равенством (1.20))

$$\left\{\frac{I-\varepsilon^*(\zeta_i)\varepsilon(\zeta_k)}{1-\bar\zeta_i\zeta_k}\right\}_{i,k=1}^{p}=\Bigg\{(f^*(\zeta_i)\,b_{21}^*(\zeta_i)+b_{22}^*(\zeta_i))^{-1}\Bigg\{\frac{I-f^*(\zeta_i)f(\zeta_k)}{1-\bar\zeta_i\zeta_k}-$$

$$-\left[\frac{f^*(\zeta_i)-w_1^*}{\bar\zeta_i-\bar z_1}\cdots\frac{f^*(\zeta_i)-w_n^*}{\bar\zeta_i-\bar z_n}\right]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{f(\zeta_k)-w_1}{\zeta_k-z_1}\\ \vdots\\ \dfrac{f(\zeta_k)-w_n}{\zeta_k-z_n}\end{bmatrix}\Bigg\}\times$$

$$\times(b_{21}(\zeta_k)f(\zeta_k)+b_{22}(\zeta_k))^{-1}\Bigg\}_{i,k=1}^{p},$$

где множество $\zeta_1,\cdots,\zeta_p$ точек единичного круга не пересекается с множеством узлов интерполяции и матрицы $b_{21}(\zeta_i)f(\zeta_i)+b_{22}(\zeta_i)$ невырождены, $i=1,2,\cdots,p$. Следовательно

$$\nu\left(\left\{\frac{I-\varepsilon^*(\zeta_l)\,\varepsilon(\zeta_k)}{1-\bar\zeta_l\,\zeta_k}\right\}_{l,k=1}^{p}\right)=\nu\left(\left\{\frac{I-f^*(\zeta_l)\,f(\zeta_k)}{1-\bar\zeta_l\zeta_k}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[\frac{f^*(\zeta_l)-w_1^*}{\bar\zeta_l-\bar z_1}\cdots\frac{f^*(\zeta_l)-w_n^*}{\bar\zeta_l-\bar z_n}\right]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{f(\zeta_k)-w_1}{\zeta_k-z_1}\\ \vdots\\ \dfrac{f(\zeta_k)-w_n}{\zeta_k-z_n}\end{bmatrix}\right\}_{l,k=1}^{p}\right).$$

Применяя лемму 3 к блок-матрице M (2.5), в которой $q=n$, $\zeta_{p+i}=z_i$, $f(\zeta_{p+i})=w_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, получим

$$\nu\left(\left\{\frac{I-\varepsilon^*(\zeta_l)\,\varepsilon(\zeta_k)}{1-\bar\zeta_l\,\zeta_k}\right\}_{l,k=1}^{p}\right)\leqslant r,$$

причем это неравенство предельным переходом распространяется на все точки голоморфности $\varepsilon(z)$. Таким образом, всякое решение проблемы Н.—П. $f(z)$ класса $S_{\nu+r}^{(m)}$ имеет вид (3.3) с параметром $\varepsilon(z)$ из $S_r^{(m)}$.

Обратно, пусть в (3.3) $\varepsilon(z)$ принадлежит $S_r^{(m)}$, $r\geqslant 0$. Обозначим

$$u(z)=a_{11}(z)\,\varepsilon(z)+a_{12}(z),\quad v(z)=a_{21}(z)\,\varepsilon(z)+a_{22}(z)$$

и, стало быть, $f(z)=u(z)\,v^{-1}(z)$. Пусть E — множество точек круга, в которых $\det v(z)\neq 0$. Тогда для любых $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_p$ из E

$$\left\{\frac{I-f^*(\zeta_l)\,f(\zeta_k)}{1-\bar\zeta_l\,\zeta_k}\right\}_{l,k=1}^{p}=\left\{v^{-1*}(\zeta_l)\frac{I-\varepsilon^*(\zeta_l)\,\varepsilon(\zeta_k)}{1-\bar\zeta_l\,\zeta_k}\,v^{-1}(\zeta_k)+\right.$$

$$\left.+\,v^{-1*}(\zeta_l)[\varepsilon^*(\zeta_l),\,I]\frac{R_n^*(\zeta_l)\,JR_n(\zeta_k)-J}{1-\bar\zeta_l\zeta_k}\begin{bmatrix}\varepsilon(\zeta_k)\\ I\end{bmatrix}v^{-1}(\zeta_k)\right\}_{l,k=1}^{p}.\tag{3.14}$$

Рассмотрим стандартное преобразование

$$X(z)=(Q\,R_n(z)+P)(PR_n(z)+Q)^{-1}=(R_n(z)\,P-Q)\,(-R_n(z)Q+P),$$

$$P=\begin{bmatrix}O\,O\\ O\,I\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}I\,O\\ O\,O\end{bmatrix},\ P+Q=I_{2m},\ P-Q=J\ (I\equiv I_m),\tag{3.15}$$

существование которого следует из (3) и (3.15). Поскольку

$$I-X(\zeta_l)\,X^*(\zeta_k)=(R_n(\zeta_l)\,P-Q)^{-1}\{R_n(\zeta_l)\,J\,R_n^*(\zeta_k)-J\}(PR_n^*(\zeta_k)-Q)^{-1},$$

$$I-X^*(\zeta_l)\,X(\zeta_k)=(R_n^*(\zeta_l)\,P+Q)^{-1}\{R_n^*(\zeta_l)\,JR_n(\zeta_k)-J\}(PR_n(\zeta_k)+Q)^{-1},$$

то в силу эквивалентности условий (2.6) и свойства (3.4) резольвентной матрицы $R_n(z)$

$$\nu\left(\left\{\frac{R_n^*(\lambda_l)\,JR_n(\lambda_k)-J}{1-\bar\lambda_l\lambda_k}\right\}_{l,k=1}^{p}\right)<\nu.$$

Из (3.14) заключаем, что $f(z)$ принадлежит $S_{\nu+r}^{(m)}$, т. е. дробно-линейное преобразование (3.3) переводит $S_r^{(m)}$ в $S_{\nu+r}^{(m)}$.

Проверка интерполяционных условий (3.1) представляет собой непосредственный подсчет. Пусть $A_n^{-1} = [u_{ik}]_{i,k=1}^n$. Тогда из равенства $A_n A_n^{-1} = I$ и вида A_n (3.2) следует

$$\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1}\end{bmatrix} - w_1\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1}\end{bmatrix} = I,$$

$$\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni}\end{bmatrix} - w_1\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni}\end{bmatrix} = 0,$$

$$i = 2, \cdots, n$$

1. $$a_{11}(z_1) = I + (1-z_1)\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right] A_n^{-1}\begin{bmatrix} \frac{-I}{1-z_1} \\ \vdots \\ \frac{-I}{1-z_n}\end{bmatrix} =$$

$$= I - \left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1}\end{bmatrix} + \sum_{i=2}^{n}\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni}\end{bmatrix} \times$$

$$\times\left(-\frac{1-z_1}{1-z_i}\right) = -w_1\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right] A_n^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1-z_1}{1-z_1} \\ \vdots \\ \frac{1-z_1}{1-z_n}\end{bmatrix},$$

2. $$a_{12}(z_1) = (1-z_1)\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right] A_n^{-1}\begin{bmatrix} \frac{w_1}{1-z_1} \\ \vdots \\ \frac{w_n}{1-z_n}\end{bmatrix} =$$

$$= \left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1}\end{bmatrix} w_1 + \sum_{i=2}^{n}\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right] \times$$

$$\times\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni}\end{bmatrix}\frac{w_i(1-z_1)}{1-z_i} = w_1 + w_1\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right] A_n^{-1}\begin{bmatrix} \frac{w_1(1-z_1)}{1-z_1} \\ \vdots \\ \frac{w_n(1-z_1)}{1-z_n}\end{bmatrix},$$

$$3.\quad a_{21}(z) = -\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right] A_n^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1-z_1}{1-z_1} I\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \frac{1-z_1}{1-z_n} I\end{bmatrix},$$

$$4.\quad a_{22}(z) = I + \left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1}\cdots\frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right] A_n^{-1}\begin{bmatrix}\frac{w_1(1-z_1)}{1-z_1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \frac{w_n(1-z_1)}{1-z_n}\end{bmatrix}.$$

Из полученных соотношений видно, что

$$a_{11}(z_1) = w_1 a_{21}(z_1),\ a_{12}(z_1) = w_1 a_{22}(z_1).$$

Если теперь $\varepsilon(z)$ таково, что $\det[a_{21}(z_1)\varepsilon(z_1) + a_{22}(z_1)] \neq 0$, то

$$f(z_1) = (a_{11}(z)\varepsilon(z_1) + a_{12}(z_1))(a_{21}(z_1)\varepsilon(z_1) + a_{22}(z_1))^{-1} = w_1.$$

Аналогично, используя (3.5), проверяются остальные интерполяционные условия (3.1).

Нам остается исследовать особые значения параметра $\varepsilon(z)$, при которых нарушается хотя бы одно из условий (3.5), Соответствующая функция $f(z)$ (3.3) имеет при этом особенность в некоторых узлах интерполяции. Тем не менее не исключена возможность того, что на самом деле особенности устранимы и $f(z_i) = w_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Покажем, что это невозможно.

Пусть $f_0(z)$ (3.3) отвечает значению параметра $\varepsilon(z) = \varepsilon_0(z)$ класса $S_0^{(m)}$ и, скажем

$$\det(a_{21}(z_1)\varepsilon_0(z_1) + a_{22}(z_1)) = 0. \tag{3.16}$$

Используя теорему Руше и лемму 4, нетрудно убедиться в том, что

$$N[a_{21}(z)\varepsilon_0(z) + a_{22}(z)] = \nu. \tag{3.17}$$

Поскольку $f_0(z)$ принадлежит $S_\nu^{(m)}$, то по теореме Крейна—Лангера $f_0(z) = s(z)B^{-1}(z)$; $s(z)$ — из $S_0^{(m)}$ и $\operatorname{ord} B = \nu$. Если при этом $f_0(z)$ голоморфна в точках z_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то из (3.16) и (3.17) следует, что $f(z) = s_0(z) B_0^{-1}(z)$, $s_0(z) \in S_0^{(m)}$ и $\operatorname{ord} B_0 < \nu$. Но тогда $f(z) \in S_\varkappa^{(m)}$ с некоторым $\varkappa < \nu$, что противоречит условиям

$$f(z_i) = w_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n;\quad \nu\{A_n\} = \nu.$$

Случай $\varepsilon_0(z) \in S_r^{(m)}$, $r > 0$ получается индукцией по r. Следовательно, при описании совокупности всех решений проблемы Н.—П. параметры $\varepsilon(z)$, для которых нарушается хотя бы одно из условий (3.5), следует исключить. Теорема полностью доказана.

Отметим в заключение, что иной подход к проблеме Неванлинны—Пика и ряду других интерполяционных проблем в индефинитных классах $S_{\nu+r}$ при $r = 0$ предложен в [11] А. А. Нудельманом.

Автор выражает благодарность В. Э. Кацнельсону за внимание к работе.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР

Поступила 25.I.1982

Լ. Բ. ԳՈԼԻՆՍԿԻ. Նևանլինա-Պիկի մատրիցային խնդրի մի ընդհանրացման մասին: *(ամփոփում)*

Թող $S_\varkappa^{(m)}$*-ը լինի* D *միավոր շրջանում մերոմորֆ այն* $f(z)$ — $m \times m$ *մատրից-ֆունկցիաների դասը, որոնց համար*

$$\left\{\frac{I-f(\zeta_l)f^*(\zeta_k)}{1-\zeta_l\bar{\zeta}_k}\right\}_{l,k=1}^{p}, \quad p=1, 2, \cdots$$

հերմիտյան մատրիցները, որտեղ $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ $f(z)$ *ֆունկցիայի կամայական հոլոմորֆության կետեր են* D*-ից, ունի ոչ ավել քան* $\varkappa$ *բացասական սեփական արժեքներ: Եթե* $z_1, \cdots, z_n$*-ը միավոր շրջանի կետեր են,* $w_1, \cdots, w_n$*-ը մատրիցներ են և*

$$A_n=\left\{\frac{I-w_l w_k^*}{1-z_l\bar{z}_k}\right\}_{l,k=1}^{n}$$

հերմիտյան մատրիցը ունի ν *բացասական սեփական արժեքներ և չվերասերված է, ապա Նևանլինա-Պիկի խնդրի* $f(z_l)=w_l$ $l=1, 2, \cdots, n)$ *լուծումների բազմությունը* $S_\varkappa^{(m)}$ *դասում,* $\varkappa > \nu$, *նկարագրվում է հետևյալ կոտորակագծային ձևափոխությամբ*

$$f(z)=(a_{11}(z)s(z)+a_{12}(z))(a_{21}(z)s(z)+a_{22}(z))^{-1},$$

որի գործակիցների մատրիցան որոշվում է ինտերպոլյացիոն տվյալների օգնությամբ, իսկ $s(z$ *պարամետրը պատկանում է* $S_{\varkappa-\nu}^{(m)}$ *դասին: Այս արդյունքն ընդհանրացնում է Վ. Պ. Պոտապովին և Ի. Վ. Կովալիշինային պատկանող արդյունքը, որը վերաբերվում է Նևանլինա-Պիկի կլասիկ խնդրին* $(\nu=\varkappa=0)$:

L. B. GOLINSKY. *On a generalization of the matrix Nevanlinna—Pick problem* (summary)

Let $S_\varkappa^{(m)}$ be the class of meromorphic in the unit disk D matrix—functions $f(z)$ such that Hermitian matrix

$$\left\{\frac{I-f(\zeta_l)f^*(\zeta_k)}{1-\bar{\zeta}_l\zeta_k}\right\}_{l,k=1}^{p}, \quad p=1, 2, \cdots$$

has not more than $\varkappa$ negative eigenvalues. Here $\zeta_1, \cdots, \zeta_p$ are any points in D, in which $f(z)$ is analytic. If $z_1, \cdots, z_n$ are some distinct points in D, $w_1, \cdots, w_n$—$m \times m$ matrices and the Hermitian matrix

$$A_n=\left\{\frac{I-w_l w_k^*}{1-z_l\bar{z}_k}\right\}_{l,k=1}^{n}$$

is nonsingular and has ν negative eigenvalues, then all solutions of the Nevanlinna—Pick problem $f(z_l)=w_l$, $l=1, \cdots, n$ in $S_\varkappa^{(m)}$ with $\varkappa > \nu$ are given by

$$f(z)=(a_{11}(z)s(z)+a_{12}(z))(a_{21}(z)s(z)+a_{22}(z))^{-1}.$$

This result generalizes the analogous result for the classical Nevanlinna—Pick problem $(\nu=\varkappa=0)$ due to V. P. Potapov and I. V. Kovalischina.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Потапов.* Мультипликативная структура *J*-нерастягивающих матриц-функций, Труды ММО, 4, 1955, 125—236.
2. *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны—Пика, ДАН Арм.ССР, 59, № 1, 1974, 17—22.
3. *Н. И. Ахиезер.* Об одной минимум-проблеме теории функций и числе корней алгебраического уравнения, которые лежат внутри единичного круга, Изв. АН СССР, сер. матем., 9, 1931, 1169—1189.
4. *В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн.* Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура—Такаги, Мат. сб., 86 (128), 1, 1971, 34—75.
5. *M. G. Krein, H. Langer.* Uber die verallgemeinerten Resolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators, Colloquia mathematica Soc. Janos Bolyai, 5, Hilbert space operators, Tihany (Hungary), 1970, 353—399.
6. *И. Ц. Гохберг, Е. И. Сигал.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше, Мат. сб., 84 (126), 4, 1971, 607—629.
7. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, Изд. «Наука», М., т. I. 1967, 486 с.
8. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
9. *Ю. П. Гинзбург.* О факторизации аналитических матриц-функций, ДАН СССР, 159, № 3, 1964, 489—492.
10. *Д. З. Аров.* Реализация матриц-функций по Дарлингтону, Изв. АН СССР, сер. матем., 37, № 6, 1973, 1299—1331.
11. *А. А. Нудельман.* Об одном обобщении классических интерполяционных задач, ДАН СССР, 256, № 4, 1981, 790—793.