ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 3, 1983 Математика

УДК 517.53

С. Г. РАФАЕЛЯН

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И БАЗИСНОСТЬ В ВЕСОВЫХ КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Введение

1. Первоначально в работе [1], а затем в монографии [2] М. М. Джрбашяном была построена теория гармонического анализа в комплексной области, а именно на системе лучей, исходящих из точки $z=0$. Эта теория явилась глубоким аналогом классической теоремы Фурье-Планшереля, послужила основой для установления общих результатов типа известных теорем Винера—Пэли для целых функций произвольного конечного порядка и нормального типа. На этом пути были получены параметрические представления общих классов целых функций $W^{p,\,\omega}_{\rho,\,\sigma}$.

Данная работа посвящена решению кратной интерполяционной задачи и построению базисов в классах $W^{p,\,\omega}_{\sigma}$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<<p-1,\ \sigma>0)$ функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant\sigma$, для которых

$$\|f\|^p_{W^{p,\,\omega}_{\sigma}}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,|x|^{\omega}\,dx<+\infty.$$

Пусть, далее, $\{z_k\}_0^{\infty}$ — данная последовательность комплексных чисел и $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$. Требуется, во-первых, описать класс всех последовательностей $\{c_k\}_0^{\infty}$, для которых обеспечено существование функций $f\in W^{p,\,\omega}$, удовлетворяющих условиям $f^{(s_k-1)}(z_k)=c_k$ $(k\geqslant 0)$, и, во-вторых, построить аппарат для представления решений такой интерполяционной задачи.

Такая задача в классах $W^{p,\,0}_{\sigma}\equiv W^{p}_{\sigma}$ была поставлена и решена Б. Я. Левиным [3] (см. также [4]) в случае отсутствия кратностей (т. е. $s_k=1,\ k\geqslant 0$). В случае же кратных корней в работе Б. Я. Левина [5] была установлена теорема о разложимости функций класса $W^{2,\,0}_{\sigma}$ по подпоследовательностям их разложений в ряд Эрмита (см. также [6]). В этих работах [3, 4] в качестве узлов интерполяции $\{z_k\}_0^{\infty}$ брались нули целой функции типа синуса. Целая функция $S(z)$ экспоненциального типа называется функцией типа синуса, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) Все нули функции $S(z)$ простые и лежат в некоторой горизонтальной полосе $|y|<h$ $(z=x+iy)$.

2) При некотором фиксированном значении y_0 справедливо неравенство:

$$0 < m \leqslant |S(x+iy_0)| \leqslant M < +\infty.$$

3) Типы функций $S(z)$ в верхней и нижней полуплоскостях равны.

Класс функций типа синуса был введен Б. Я. Левиным [3, 5], в частности, в связи с вопросами интерполяции в классах целых функций и при изучении базисов Рисса в $L_2(a, b)$. Его основная теорема об интерполяции следующая.

Теорема 3. Пусть $S(z)$ — функция типа синуса и $\{z_k\}_0^\infty$ — ее нули. Тогда:

1°. Для любой последовательности $\{c_k\} \in l^p$ $(p>1)$ интерполяционный ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{S(z)}{S'(z_k)(z-z_k)}$$

сходится равномерно на любом компакте в комплексной плоскости.

2°. Сходится также по норме пространства $L^p(-\infty, \infty)$ и дает линейное топологическое отображение всего пространства l^p на все пространства W_σ^p целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, интегрируемых в p-ой степени на вещественной оси.

3°. Кроме того, $f(z_k)=c_k$ $(k \geqslant 0)$ и справедливы неравенства

$$\|f\|_{W_\sigma^p} \asymp \|\{c_k\}\|_{l^p}^*.$$

2. В данной работе решается интерполяционная задача в классах целых функций $W_\sigma^{p,\omega}$, при этом в качестве узлов интерполяции рассматриваются нули целых функций из класса более общего, чем класс функций типа синуса. Строится также аппарат для эффективного построения решений такой задачи.

§ 1 посвящен изучению ряда свойств классов $W_\sigma^{p,\omega}$. Отметим, что в совместной с М. М. Джрбашяном статье автора [7] (см. также [8]) отмеченные выше результаты Б. Я. Левина были распространены на весовые пространства $W_\sigma^{p,\omega}$ с узлами в нулях $\sin \sigma z$. Поскольку в указанной статье были намечены лишь краткие доказательства свойств пространства $W_\sigma^{p,\omega}$, автор счел нужным изложить здесь их полностью с несколько более общими формулировками.

В § 2 вводятся и изучаются специальные классы целых функций $S_\varkappa$. Целая функция $S(z)$ экспоненциального типа σ $(0<\sigma<\infty)$ называется функцией из класса $S_\varkappa$ $(-\infty<\varkappa<\infty)$, если

$$0<c<|S(z)\, z^{-\varkappa}|\, e^{-\sigma|\operatorname{Im} z|}<C<+\infty \quad (|\operatorname{Im} z|>K),$$

где c, C, K — некоторые положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от $S(z)$ и $\inf\limits_{z_k \neq z_j} |z_k - z_j|>0$ ($\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность нулей функции $S(z)$).

---

* Символ $\asymp$ означает, что отношение величин, стоящих в правой и левой частях, заключено между двумя положительными постоянными, зависящими только от функции f.

Отметим, что если $\varkappa = 0$ и нули $S(z)$ простые, то $S(z)$ — целая функция типа синуса. Иначе говоря, класс функций типа синуса—это подкласс тех функций из S_0, которые не имеют кратных нулей.

Перечислим некоторые свойства функций из класса $S_\varkappa$, которые установлены в § 2.

Пусть $S(z) \in S_\varkappa$ *и* $\{z_k\}_0^\infty$ — *последовательнсcть ее корней, а* $s_j \geqslant 1$ *и* $p_j \geqslant 1$ $(j \geqslant 0)$—*кратности появления числа* z_j *соответственно на отрезке* $\{z_k\}_0^j$ *и во всей последовательности* $\{z_k\}_0^\infty$. *Тогда:*

1) *Вне* δ*-окрестности корней, т. е. на множестве* $\bigcap_k \{z; |z - z_k| \geqslant \delta\}$ *имеет место*

$$|S(z)| \asymp (1+|z|)^\varkappa e^{\sigma|y|};$$

2) *Справедливо неравенство*

$$|S^{(p_k)}(z_k)| \geqslant c(1+|z_k|)^\varkappa, \ k \geqslant 0,$$

где $c > 0$ *не зависит от* k;

3) *При любом* $\alpha > 1$ *ряд* $\sum_k (1+|z_k|)^{-\alpha}$ *сходится;*

4) *Для любой функции* $f(z) \in W_\sigma^{p,\varkappa}$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{k=0}^\infty |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^\varkappa \leqslant c\, \|f\|_{W_\sigma^{p,\varkappa}}^p,$$

где $c > 0$ *не зависит от* f.

Отметим, что в специальном случае, когда $\varkappa = 0$, $s_k = 1$, все эти утверждения были установлены Б. Я. Левиным [3].

§ 3 посвящен вопросам интерполяции в классах $W_\sigma^{p,\varkappa}$. Здесь сначала строится система целых функций экспоненциального типа $\{\Omega_k(z)\}_0^\infty$, обладающая следующими интерполяционными свойствами:

$$\Omega_k^{(s_j-1)}(z_j) = \delta_{k,j} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j, \end{cases} \quad (k, j \geqslant 0),$$

где $\{z_j\}_0^\infty$ — последовательность нулей целой функции $S(z) \in S_\varkappa$. При построении этой системы функций мы используем метод биортогонализации М. М. Джрбашяна (см. [9]).

С применением этих систем в § 3 получена следующая общая (теорема 3.4).

Теорема. *Пусть* $\{z_k\}_0^\infty$— *нули функции* $S(z) \in S_\varkappa$, *где* $-1 < \varkappa + p\omega < p - 1$. *Тогда ряд*

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k \Omega_k(z)$$

дает линейное топологическое отображение всего пространства $l_\varkappa^{p,\infty}$ *на все пространство* $W_\sigma^{p,\varkappa}$, *причем*

$$\|f\|_{W_\sigma^{p,\infty}} \asymp \|\{c_k\}\|_{l_\varkappa^{p,\infty}},$$

где $l^{p,\omega}_{\varkappa}$ *определяется как множество последовательностей* $\{c_k\}_0^{\infty}$, *для которых* $\sum_0^{\infty} |c_k|^p (1+|z_k|)^{\varkappa} < +\infty$, где $\{z_k\}_0^{\infty}$ — нули функции $S(z) \in S_{\varkappa}$.

В качестве следствия из этой теоремы получена следующая теорема единственности:

Если $f(z) \in W^{p,\omega}_{\sigma}$, $\{z_k\}_0^{\infty}$ — нули функции $S(z) \in S_{\varkappa}$. $-1 < \omega + p\varkappa < p-1$ и $f^{(s_k-1)}(z_k) = 0$, $k \geq 0$, то $f(z) \equiv 0$.

Уместно сравнить теорему 3.4 с приведенной выше теоремой Б. Я. Левина в специальных случаях, когда $\omega = 0$ $\varkappa \neq 0$ и когда $\omega \neq 0$, $\varkappa = 0$.

1) При $\omega = 0$ и $\varkappa \neq 0$ теорема 3.4 дает теорему интерполяции и базисности в классе Винера—Пэли $W^p_{\varkappa}$ с узлами интерполяции, более общими, чем нули функции типа синуса.

2) Когда $\omega \neq 0$, $\varkappa = 0$, из теоремы 3.4, в частности, следуют результаты об интерполяции и базисности с узлами в нулях функции типа синуса, но уже в весовых классах $W^{p,\omega}_{\sigma}$.

Приношу глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство.

§ 1. Целые функции экспоненциального типа класса $W^{p,\omega}_{\sigma}$

з) Пусть $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$, $0 < \sigma < +\infty$. Обозначим через $W^{p,\omega}_{\sigma}$ пространство целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ с нормой

$$\|f\|_{p,\omega} \equiv \|f\|_{W^{p,\omega}_{\sigma}} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p |x|^{\omega} dx \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1.1}$$

Классы функций $W^{2,\omega}_{\sigma}$ (и более общие классы) впервые были введены М. М. Джрбашяном и им были установлены параметрические представления этих классов.

Обозначим, далее, через $H^{p,\omega}_{+}$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < \omega < p-1)$ класс функций $F(z)$, аналитических в верхней полуплоскости и удовлетворяющих условию

$$\|F\|_{p,\omega} \equiv \|F\|_{H^{p,\omega}_{+}} = \sup_{y>0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p |x|^{\omega} dx \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1.2}$$

Аналогично определяется класс $H^{p,\omega}_{-}$ в нижней полуплоскости.

С классом функций $W^{p,\omega}_{\sigma}$ рассмотрим также класс $W^{p,\omega}_{\sigma}[\gamma]$ — класс целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ с нормой

$$\|f\|_{p,\omega,\gamma} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p |x+i\gamma|^{\omega} dx \right\}^{1/p} < +\infty \tag{1.3}$$

где $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$, $-\infty < \gamma < +\infty$.

Заметим, что: $W^{p,\omega}_{\sigma}[0] \equiv W^{p,\omega}_{\sigma}$ и $\|f\|_{p,\omega,0} = \|f\|_{p,\omega}$.

Лемма 1.1. *Если* $f(z) \in W^{p,\omega}_{\sigma}[\gamma]$, $(0 \leqslant \gamma < +\infty)$, *то соответственно*

1°.
$$\varphi^{\pm}(z) = e^{\pm i\sigma z}(z + i\gamma)^{\omega/p} f(z) \in H^p_+, \tag{1.4}$$

2°.
$$\|f(x \pm i\gamma)\|_{p,\omega,\gamma} \leqslant e^{\sigma\gamma} \|f\|_{p,\omega}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g^{\pm}(z) = (z + i\gamma)^{\omega/p} f(z),$$

которая аналитична в верхней полуплоскости и имеет там рост не выше, чем $(1, \sigma)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g^{\pm}(x)|^p\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p |x + i\gamma|^{\omega}\, dx < +\infty.$$

Отсюда следует (см. [10], с. 35), что соответствено $g^{\pm}(z)\, e^{\pm i\sigma z} \in H^p_{\pm}$, и неравенство (1.4) доказано. Неравенство (1.5) вытекает из (1.4).

Лемма 1.2. *Пусть* $f(z) \in W^{p,\omega}_{\sigma}[\gamma]$. *Тогда для любого* $z \in \mathbb{C}$ *справедливы неравенства*

$$|f(z)| \leqslant c\, \|f\|_{p,\omega\gamma}\, e^{\sigma|y|}\, (1 + |z|)^{-\frac{\omega}{p}}\, (1 + |y|)^{-\frac{1}{p}}, \tag{1.6}$$

где $c > 0$ — *постоянная и* $z = x + iy$.

Доказательство. Из леммы 1.1 следует, что

$$\varphi(z) = f(z - (i\gamma + 1))\, e^{i\sigma z}\, (z + i\gamma)^{\omega/p} \in H^p_+$$

и, следовательно по формуле Коши (см. [12]) имеем

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt, \ \operatorname{Im} z = y > 0.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера, можем написать

$$|\varphi(z)| < \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^p\, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + y^2)^{q/2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant c_1 \|\varphi\|_{H^p_+} \cdot y^{-\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

Учитывая, что

$$\|\varphi\|_{H^p_+} = \|f(x - i(\gamma + 1))(x + i\gamma)^{\omega/p}\|_{L^p} \leqslant c_2 \|f\|_{p,\omega,\gamma},$$

из (1.7) получим

$$|f(z - i(\gamma + 1))|\, e^{i\sigma z}\, (z + i\gamma)^{\frac{\omega}{p}}| \leqslant c_3 \|f\|_{p,\omega,\gamma}\, |y|^{-\frac{1}{p}}.$$

Отсюда после замены $z - i(\gamma + 1)$ на z получим (1.6).

Теорема 1.1. *Пространство* $W^{p,\omega}_{\sigma}[\gamma]$ *является банаховым пространством с нормой* (1.3).

Доказательство. Пусть $\{f_n(z)\}$ — фундаментальная последовательность из класса $W_\sigma^{p,\omega}[\gamma]$, т. е.

$$\|f_k - f_j\|_{p,\omega,\gamma} \to 0, \ k, j \to \infty.$$

Пусть $K \subset C$ — любой компакт. Согласно неравенствам (1.6) имеем

$$|f_k(z) - f_j(z)| \leqslant c\|f_k - f_j\|_{p,\omega,\gamma}(1+|z|)^{-\frac{\omega}{p}} e^{\sigma|y|}(1+|y|)^{-\frac{1}{p}}.$$

Отсюда следует, что последовательность функций $\{f_k(z)\}$ равномерно сходится на K.

Поэтому предельная функция $f(z)$ является целой функцией и, очевидно, $f(x) \in L^p(-\infty, \infty)$.

Из оценки (1.6) также следует, что функция $f(z)$ имеет порядок $\rho = 1$ и тип $\leqslant \sigma$, т. е. $f(z) \in W_\sigma^{p,\omega}[\gamma]$.

Лемма 1.3. *Пусть $f(z)$ — функция из класса $W_\sigma^{p,\omega}$. Тогда при любом* $\gamma \in (-\infty, \infty)$

1°. $$\|f\|_{p,\omega,\gamma} \asymp \|f\|_{p,\omega}. \quad (1.8)$$

2.° $$\|f(z+i\gamma)\|_{p,\omega} \asymp \|f\|_{p,\omega}. \quad (1.9)$$

Доказательство. 1°. Определим оператор T на $W_\sigma^{p,\omega}$, положив $Tf = f \in W_\sigma^{p,\omega}[\gamma]$. Ясно что оператор T отображает все $W_\sigma^{p,\omega}$ на $W_\sigma^{p,\omega}[\gamma]$, т. е. имеется обратный оператор T^{-1} такой, что при $f \in W_\sigma^{p,\omega}[\gamma]$, $T^{-1}f = f \in W_\sigma^{p,\omega}$.

Разберем отдельно два случая:

1) если $\omega \geqslant 0$, то $|x|^\omega \leqslant |x+i\gamma|^\omega$, и очевидно

$$\|f\|_{p,\omega} \leqslant \|f\|_{p,\omega,\gamma} = \|Tf\|_{p,\omega,\gamma}, \quad (1.10)$$

т. е. оператор T^{-1} ограничен. По теореме Банаха об обратном операторе ограничен и оператор T, т. е.

$$\|Tf\|_{p,\omega,\gamma} = \|f\|_{p,\omega,\gamma} \leqslant A_1\|f\|_{p,\omega}. \quad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) следует (1.8) в случае $\omega \geqslant 0$.

2) Если $-1 < \omega < 0$, то $|x+i\gamma|^\omega \leqslant |x|^\omega$ и поэтому для любого $f \in W_\sigma^{p,\omega}$

$$\|Tf\|_{p,\omega,\gamma} = \|f\|_{p,\omega,\gamma} \leqslant \|f\|_{p,\omega}, \quad (1.12)$$

т. е. оператор T ограничен. Поэтому обратный оператор T^{-1} также ограничен и следовательно

$$\|T^{-1}f\|_{p,\omega} = \|f\|_{p,\omega} \leqslant A_2\|f\|_{p,\omega,\gamma}, \ \forall f \in W_\sigma^{p,\omega}. \quad (1.13)$$

Из (1.12), (1.13) вытекает (1.8), в случае $-1 < \omega < 0$ и (1.8) доказана.

2°. Теперь докажем соотношение (1.9).

Если $f(z) \in W_\sigma^{p,\omega}$, то по лемме 1.1 $f(z)e^{i\sigma z} \in H_+^{p,\omega}$ и в силу (1.8) мы получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, |e^{i\sigma x}|\, |x|^{\omega}\, dx \geqslant B_1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+i\gamma)|^p\, |e^{i\sigma(x+i\gamma)}| \times$$

$$\times |x+i\gamma|^{\omega}\, dx \geqslant e^{-p\sigma y} B_2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+i\gamma)|^p\, |x|^{\omega}\, dx =$$

$$= B_2\, e^{-p\sigma\gamma} \|f(z+i\gamma)\|_{p,\,\omega},$$

т. е.

$$\|f(z+i\gamma)\|_{p,\,\omega} \leqslant C_1 \|f\|_{p,\,\omega}. \qquad (1.14)$$

Отсюда следует, что для любого $\gamma \in (-\infty, \infty)$, $f(z+i\gamma) \in W_\sigma^{p,\omega}$. С другой стороны

$$\|f(z+i\gamma)\, e^{-i\sigma z}\|_{H^{p,\,\omega}} = \|f(x+i\gamma)\|_{L^{p,\,\omega}} \geqslant \|f\|_{p,\,\omega}.$$

Значит

$$\|f\|_{p,\,\omega} < c_2 \|f(z+i\gamma)\|_{p,\,\omega}.$$

Отсюда и из (1.14) следует утверждение (1.9).

б) Пусть $\{z_j\}_0^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, лежащих в полосе $A < \operatorname{Im} z < B$ $(-\infty < A < B < +\infty)$. Для произвольного целого $k > 0$ обозначим через $s_k \geqslant 1$ кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$. а через $p_k \geqslant 1$ — кратность появления числа z_k во всей последовательности $\{z_j\}_0^{\infty}$. Очевидно, что $1 \leqslant s_k \leqslant p_k \leqslant +\infty$ $(0 \leqslant k < +\infty)$.

Для дальнейшего изложения введем еще один класс функций. Обозначим через $H^{p,\omega}(a, b)$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < \omega < p-1,\ -\infty < a < b < +\infty)$ класс функций $f(z)$, голоморфных в области $a < \operatorname{Im} z < b$ и таких, что

$$\|f\|_{H^{p,\,\omega}_{(a,\,b)}} \equiv \sup_{a<y<b} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p\, |x|^{\omega}\, dx \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Докажем следующую общую теорему, которая играет важную роль при решении задачи интерполяции в классах целых функций $W_\sigma^{p,\omega}$

Теорема 1.2. *Пусть* $\{z_k\}_0^{\infty}$ — *последовательность точек, удовлетворяющих условиям:*

1) $a + \delta_1 < \operatorname{Im} z_k < b - \delta_1$, $\left(-\infty < a < b < +\infty,\ 0 < \delta_1 < \frac{1}{2}(b-a)\right)$,

2) $\inf\limits_{z_k \neq z_j} |z_k - z_j| = \delta_2 > 0$.

3) $\sup\limits_{k \geqslant 0} p_k = P < +\infty$.

Тогда для любой функции $f(z) \in H^{p,\omega}(a, b)$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^{\omega} \leqslant A_{\omega} \|f\|_{H^{p,\omega}_{(a,b)}}, \tag{1.15}$$

где постоянные A_{ω} *не зависят от* $f(z)$.

Доказательство. Воспользуемся одним приемом, применявшимся по другому поводу еще М. Планшерелем и Г. Пойя [11]. Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, рассмотрим замкнутые кружки $R_{\delta,k} = \left\{z; |z - z_k| \leqslant \frac{\delta}{2}\right\} \times$ $\times (0 < k < +\infty)$, которые очевидно, не пересекаются. Из интегральной формулы Коши следует, что для $0 < r < \frac{\delta}{2}$

$$|f^{(s_k-1)}(z_k)| \leqslant \frac{(s_k-1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_k + re^{i\vartheta})| \; r^{-(s_k-1)} \, d\vartheta.$$

Отсюда легко выводится формула

$$\frac{1}{s_k+1}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{s_k+1} f^{(s_k-1)}(z_k) = \frac{(s_k-1)!}{2\pi} \int_0^{\delta/2}\int_0^{2\pi} f(z_k + re^{i\vartheta})\, e^{-i\vartheta(s_k-1)} r\,dr\,d\vartheta,$$

из которой следует неравенство

$$|f^{(s_k-1)}(z_k)| \leqslant M_{\delta,p} \iint_{R_{\delta,k}} |f(\zeta)| \, d\sigma(\zeta), \tag{1.16}$$

где $M_{\delta,p}$ не зависит от f и $d\sigma(\zeta)$ — плоская мера Лебега.

Воспользовавшись неравенством Гёльдера, из (1.16) получим

$$|f^{(s_k-1)}(z_k)| \leqslant M_{\delta,p} \left\{ \iint_{R_{\delta,k}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\omega} d\sigma(\zeta) \right\}^{1/p} \times$$

$$\times \left\{ \iint_{R_{\delta,k}} |\zeta|^{-\frac{q}{p}\omega} d\sigma(\zeta) \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.17}$$

Второй интеграл правой части (1.17) оценивается следующим образом:

$$\iint_{R_{\delta,k}} |\zeta|^{-\frac{q}{p}\omega} d\sigma(\zeta) = \iint_{|\zeta|<\delta/2} |z_k + \zeta|^{-\frac{q}{p}\omega} d\sigma(\zeta) =$$

$$= |z_k|^{-\frac{q}{p}\omega} \iint_{|\zeta|<\delta/2} \left|1 + \frac{\zeta}{z_k}\right|^{-\frac{q}{p}\omega} d\sigma(\zeta) \leqslant N_{\delta} |z_k|^{-\frac{q}{p}\omega}, \quad z_k \neq 0.$$

Теперь неравенства (1.17) можем переписать так:

$$|z_k|^{\omega} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p \leqslant Q_{\delta} \iint_{R_{\delta,k}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\omega} d\sigma(\zeta), \tag{1.18}$$

где $Q_{\delta} = M_{\delta,p} \cdot N_{\delta}$.

Заметим, что $R_{\delta,k} \cap R_{\delta,j} = \varnothing$ при $z_k \neq z_j$ и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} R_{\delta,k} \subset \{z;\ a+\delta < \operatorname{Im} z < b-\delta\} \equiv \Pi_{a,b}^{(\delta)}.$$

Отсюда и из (1.18) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^{\omega} \leqslant Q_\delta \sum_{k=0}^{\infty} \iint_{R_{\delta,k}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\omega} d\sigma(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant Q_\delta \iint_{\Pi_{a,b}^{(\delta)}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^{\omega} d\sigma(\zeta) \leqslant A_\omega \|f\|_{H^{p,\omega}_{(a,b)}}.$$

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает

Следствие 2.1. Пусть последовательность точек $\{z_k\}_0^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2 при $a=0$ и $b<+\infty$. Тогда для любой функции $f(z) \in H_+^{p,\omega}$ справедливы неравенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^{\omega} \leqslant A_\omega \|f\|^p_{H_+^{p,\omega}}. \tag{1.19}$$

Теорема 1.3. *Пусть $f(z) \in W_\sigma^{p,\omega}$ и $\{z_k\}_0^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, лежащих в некоторой полосе $A < \operatorname{Im} z < B$, $\inf\limits_{z_k \neq z_j} |z_k - z_j| > 0$ и $\sup\limits_k p_k < +\infty$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^{\omega} \leqslant c \|f\|_{p,\omega}. \tag{1.20}$$

Доказательство. Пусть $f(z) \in W_\sigma^{p,\omega}$ и $h = \sup\limits_k |\operatorname{Im} z_k| + 1$. Так как оператор сдвига инвариантен в пространстве $W_\sigma^{p,\omega}$ (см. лемму 1.3), то можем утверждать, что одновременно $f(z-ih) \in W_\sigma^{p,\omega}$ и $\varphi(z) = f(z-ih)\, e^{i\sigma z} \in H_+^{p,\omega}$.

Поскольку $f(z) = \varphi(z+ih)\, e^{-i\sigma(z+ih)}$, то

$$f^{(s_k-1)}(z_k) = e^{\sigma h} \frac{d^{s_k-1}}{dz^{s_k-1}} [\varphi(z+ih)\, e^{-i\sigma z}]_{z=z_k} =$$

$$= e^{\sigma h} \sum_{j=0}^{s_k-1} C^j_{s_k-1} \varphi^{(j)}(z_k+ih)(-i\sigma)^{s_k-1-j} e^{-i\sigma z_k}. \tag{1.21}$$

Так как $\sup\limits_k p_k = P < +\infty$ и $|\operatorname{Im} z_k| \leqslant h$, из (1.21) имеем

$$|f^{(s_k-1)}(z_k)|^p < M_{\sigma,h} \sum_{j=0}^{p-1} |\varphi^{(j)}(z_k+ih)|^p, \tag{1.22}$$

где $M_{\sigma,h} > 0$ не зависит от φ.

Согласно следствию 2.1 справедливы неравенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi^{(j)}(z_k+ih)|^p (1+|z_k|)^{\omega} \leqslant c_1 \|\varphi\|^p_{H_+^{p,\omega}}. \tag{1.23}$$

Теперь из (1.22) и (1.23) окончательно получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^{\omega} \leqslant c_2 \|\varphi\|^p_{H^{p,\omega}_+} =$$

$$= c_2 \|f(z-ih)\|^p_{p,\omega} \leqslant c_3 \|f\|^p_{p,\omega},$$

где $c_3 = c_3(P, \sigma, h, p) > 0$ не зависит от f. Теорема доказана.

Отметим, что в случае, когда $s_k = 1$ и $\omega = 0$, утверждение теоремы 1.3 было установлено в работе [3] Б. Я. Левина.

в) Обозначим через $l^{p,\omega}_{\{z_k\}} \equiv l^{p,\omega}$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < \omega < p-1)$ класс всех последовательностей $\{c_k\}_0^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$\|\{c_k\}\|_{l^{p,\omega}} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p (1+|z_k|)^{\omega}\right\}^{1/p} < +\infty, \tag{1.24}$$

где $\{z_k\} = \Lambda$ — заданная последовательность комплексных чисел.

Легко показать, что $l^{p,\omega}$ с нормой (1.24) является банаховым пространством.

Пусть $f(z) \in W_{\sigma}^{p,\omega}$ и последовательность $\{z_k\}_0^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3.

Определим оператор T на $W_{\sigma}^{p,\omega}$ следующим образом:

$$Tf = \{f^{(s_k-1)}(z_k)\}_0^{\infty}. \tag{1.25}$$

Теорема 1.3 показывает, что оператор T отображает $W_{\sigma}^{p,\omega}$ в $l^{p,\omega}$, причем T линеен и ограничен:

$$\|Tf\|_{l^{p,\omega}} \leqslant C \|f\|_{p,\omega}. \tag{1.26}$$

§ 2. Класс целых функций $S_{\varkappa}$

В этом параграфе вводится и изучается специальный класс $S_{\varkappa}$ функций, являющийся естественным обобщением класса функций типа синуса.

Определение. Классом $S_{\varkappa}$ $(-\infty < \varkappa < +\infty)$ назовем множество всех функций $S(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, таких, что при некоторых положительных константах c, C и K (зависящих от функции $S(z)$) выполняется неравенство

$$0 < c < |S(z) z^{-\varkappa}| e^{-\sigma |\mathrm{Im}\, z|} < C < +\infty \tag{2.1}$$

при $|\mathrm{Im}\, z| > K$ и $\inf\limits_{z_k \neq z_j} |z_k - z_j| > 0$, где $\{z_k\}_0^{\infty}$ — последовательность нулей функции $S(z)$.

Заметим, что неравенство (2.1) будет выполняться для всех z, $|\mathrm{Im}\, z| > K$, если только:

а) $$|S(x+iK)| \asymp (1+|x|)^{\varkappa}, \tag{2.1'}$$

б) все нули функции $S(z)$ лежат в полосе $|\mathrm{Im}\, z| < K$.

Это утверждение легко доказывается с помощью теоремы Фрагмена—Линделёфа.

Если $\varkappa=0$, то S_0 совпадает с классом функций типа синуса.

Примеры: 1) Пусть $0<\mu_1, \mu_2<2$: $c_1, c_2\in(-\infty, \infty)$ и обозначим

$$e(z, \mu_1, \mu_2, c_1, c_2)\equiv e(z)=c_1E_1(i\sigma z; \mu_1)+c_2E_1(-i\sigma z; \mu_2), \tag{2.2}$$

где

$$E_\rho(z; \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}$$

— целая функция типа Миттаг—Леффлера порядка ρ и типа $\sigma=1$.

Покажем, что существует $\varkappa=\varkappa(\mu_1, \mu_2)$ такая, что $e(z)\in S_\varkappa$. Как хорошо известно (см. [2], с. 133—134), функция $E_1(i\sigma z; \mu)$ ($\sigma>0$, $-\infty<\mu<+\infty$) имеет следующую асимптотику:

а) если $\left|\arg z+\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\alpha\left(\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi\right)$, то

$$E_1(i\sigma z; \mu)=(i\sigma z)^{1-\mu}e^{i\sigma z}+O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{2.3}$$

б) если $\left|\arg z+\frac{\pi}{2}\right|>\alpha$, то

$$E_1(i\sigma z; \mu)=O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{2.4}$$

Пользуясь формулами (2.3), (2.4) легко доказать, что $|e(z)|\to+\infty$ при $|\operatorname{Im} z|\to+\infty$. Отсюда вытекает, что нули функции $e(z)$ лежат в некоторой полосе $|\operatorname{Im} z|\leqslant b<+\infty$. Кроме того, если $h>b$, то

$$|e(x+ih)|\asymp(1+|x|)^\varkappa,$$

где $\varkappa=\max(1-\mu_1, 1-\mu_2)$. Значит функция $e(z)$ обладает свойствами а) и б), т. е. $e(z)\in S_\varkappa$.

2) Пусть $\alpha(t)$ — функция ограниченной вариации со скачками в точках $x=-\sigma$ и $x=\sigma$. Составим функцию

$$F(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}E_1(izt; \mu)\,d\alpha(t) \tag{2.5}$$

и покажем, что $E(z)\in S_{1-\mu}$.

Функцию $F(z)$ представим в виде

$$F(z)=\int_0^\sigma E_1(izt; \mu)\,d\alpha(t)+\int_0^\sigma E_1(-izt; \mu)\,d\alpha(-t). \tag{2.6}$$

Отсюда и из асимптотических формул (2.3), (2.4) вытекает, что $|F(z)|\to+\infty$, при $|\operatorname{Im} z|\to+\infty$. А это значит, что все нули функции $F(z)$ лежат в некоторой горизонтальной полосе. Кроме того, легко доказать неравенства

$$|F(x+ih)|\asymp(1+|x|)^{1-\mu}, \text{ при } |h|\geqslant K_0. \tag{2.7}$$

Отсюда заключаем, что $F(z)\in S_{1-\mu}$.

б) Приведем некоторые свойства функций $S(z)$ из класса $S_\varkappa$, которые нам нужны для решения интерполяционной задачи в классах $W_\sigma^{p,\infty}$.

Лемма 2.1. *Пусть $S(z)\in S_\varkappa$ и $Z=\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность ее корней, расположенная в порядке неубывания модулей. Тогда для любого $\delta>0$ существуют такие $m(\delta)>0$ и $M(\delta)>0$, что вне δ-окрестности Z_δ множества корней, т. е. на множестве $\bigcap_k\{z:$ $:|z-z_k|\geqslant\delta\}$, имеют место неравенства*

$$m(\delta)(1+|z|)^\varkappa e^{\sigma|y|}\leqslant|S(z)|\leqslant M(\delta)(1+|z|)^\varkappa e^{\sigma|y|}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть корни функции $S(z)$ лежат в полосе $\{|\mathrm{Im}\, z|<h\}=H_h$. Выбирая главную ветвь $z^{-\varkappa}$, рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=[z-i(h+1)]^{-\varkappa}S(z),\ z\in H_h. \tag{2.9}$$

Из определения класса $S_\varkappa$ следует, что функция $\varphi(z)$ ограничена при $|\mathrm{Im}\, z|=h$. Применяя принцип Фрагмена—Линделёфа к $\varphi(z)$ в полосе H_h будем иметь, что $\sup\limits_{z\in H_h}|\varphi(z)|<+\infty$.

Применяя теперь метод работы [3] (лемма 1) получим, что

$$|\varphi(z)|\asymp e^{\sigma|y|},\ z\overline{\in} Z_\delta.$$

Отсюда и из (2.9) вытекает (2.8).

Лемма 2.2. *Пусть $S(z)\in S_\varkappa$ и p_k — кратность появления z_k во всей последовательности $\{z_n\}_0^\infty$. Тогда*

$$|S^{(p_k)}(z_k)|\geqslant c(1+|z_k|)^\varkappa, \tag{2.10}$$

где $c>0$ не зависит от k.

Доказательство, Так как z_k является p_k-кратным корнем функции $S(z)$, то очевидно, что функция

$$\frac{(z-z_k)^{p_k}}{S(z)}=\varphi(z)$$

регулярна и отлична от нуля в некоторой окрестности $|z-z_k|\geqslant\delta$ точки $z=z_k$.

Пользуясь формулой Коши, получим

$$\frac{p_k!}{S^{(p_k)}(z_k)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_k|=\delta}\frac{(\zeta-z_k)^{p_k-1}}{S(\zeta)}\,d\zeta.$$

Отсюда и из (2.8) вытекает оценка

$$\frac{p_k!}{|S^{(p_k)}(z_k)|}=\frac{1}{2\pi}\delta^{p_k-1}\int\limits_{|\zeta-z_k|=\delta}\frac{d\zeta}{|S(\zeta)|}\leqslant$$

$$\leqslant c\frac{\delta}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+(z_k+\delta e^{i\theta})^\varkappa}\leqslant c_1(1+|z_k|)^{-\varkappa}.$$

и, следовательно,

$$S^{(p_k)}(z_k)| \geqslant c\,(1+|z_k|)^{\varkappa}.$$

Лемма 2.3. *Пусть $S(z) \in S_\varkappa$ и $\{z_k\}_0^\infty$ — ее нули. Тогда для любой функции $f(z) \in W_\alpha^{p,\infty}$ существует константа c, не зависящая от f, такая, что*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(z_k)|^p (1+|z_k|)^{\omega} \leqslant c\,\|f\|_{p,\infty}^p. \tag{2.11}$$

Доказательство. Из определения класса $S_\varkappa$ следует, что последовательность $\{z_k\}_0^\infty$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3 и неравенства (2.11) следуют из (1.20).

Приведем формулировку еще одной леммы, являющийся частным случаем известной теоремы Адамара.

Лемма 2.4. *Пусть $S(z) \in S_\varkappa$ и $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность ее корней. Тогда при любом $\alpha > 1$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (1+|z_k|)^{-\alpha}$ сходится.*

§ 3. Теоремы интерполяции

а) Пусть функция $S(z) \in S_\varkappa$ и $Z = \{z_k\}_0^\infty$ — последовательность ее корней. Обозначим через $s_k \geqslant 1$ и p_k кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$ и во всей последовательности $\{z_j\}_0^\infty$ соответственно. Очевидно, что функция

$$\tau_k(z) = \frac{(z-z_k)^{p_k}}{S(z)}\ (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

регулярна и отлична от нуля в некоторой окрестности точки $z = z_k$.

Введем в рассмотрение полиномы

$$q_k(z) = \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(z_k)(z-z_k)^\nu \quad (k=0, 1, 2, \cdots), \tag{3.1}$$

где $a_\nu(z_k) = \frac{1}{\nu!}\tau_k^{(\nu)}(z_k)$, а также функции

$$\Omega_k(z) = \frac{S(z)\,q_k(z)}{(s_k-1)!\,(z-\lambda_k)^{p_k-s_k+1}} =$$

$$= \frac{S(z)}{(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{a_\nu(z_k)}{(z-z_k)^{p_k-s_k-\nu+1}}. \tag{3.2}$$

Так как функция $S(z)$ целая и в точке $z = z_k$ имеет нуль кратности p_k, то $\Omega_k(z)$ также целая функция.

В частном случае, когда все нули $S(z)$ простые, то $s_k = p_k = 1$, $q_k(z) = \frac{1}{S'(z_k)}$ и из (3.2) следует, что

$$\Omega_k(z) = \frac{S(z)}{S'(z_k)(z-z_k)}. \tag{3.3}$$

Лемма 3.1. *Функции системы* $\{\Omega_k(z)\}_0^\infty$ *удовлетворяют следующим интерполяционным данным:*

$$\Omega_k^{(s_k-1)}(z_n) = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & k \neq n \\ 0, & k = n \end{cases} \quad (k, n \geqslant 0). \tag{3.4}$$

Эта лемма доказывается так же, как лемма из [8].

Лемма 3,2. *Пусть* $S(z) \in S_\varkappa$ *и* $p\varkappa + \omega < p - 1$.

Тогда

$$\Omega_k(z) \in W_\sigma^{p,\omega}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Из определения (3.2) следует, что $\Omega_k(z)$ является целой функцией экспоненциального типа $\leqslant \sigma$. С другой стороны, из леммы 2.1 вытекает оценка

$$|S(x)| \leqslant c\,(1+|x|)^\varkappa. \tag{3.6}$$

Так как $q_k(x)$— полином степени $p_k - s_k$, то

$$\frac{q_k(x)}{(s_k-1)!\,|x-z_k|^{p_k-s_k+1}} = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to +\infty. \tag{3.6'}$$

. В силу (3.6) и (3,6'), из (3.2) получим

$$|\Omega_k(x)| \leqslant c_1\,(1+|x|)^{\varkappa-1}.$$

Следовательно, существует не зависящая от $x \in (-\infty, +\infty)$ постоянная $c_2>0$ такая, что

$$|x|^\omega\,|\Omega\quad(x)| \leqslant c_2\,(1+|x|)^{p(\varkappa-1)}\,|x|^\omega.$$

Отсюда следует, что в условиях леммы, $\omega>-1$, $p\varkappa+\omega<p-1$, будем иметь

$$\|\Omega_k(z)\|_{p,\omega} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |\Omega_k(x)|^p\,|x|^\omega\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c_2^{1/p}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)^{p\varkappa-p}\,|x|^\omega\,dx\right\}^{1/p} < +\infty,$$

т. е. $\Omega_k(z) \in W_\sigma^{p,\omega}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$.

Лемма 3.3. *Для коэффициентов разложения* (3.1) *справедливы оценки*

$$|a_\nu(z_k)| \leqslant c\,(1+|z_k|)^{-\varkappa}, \tag{3.7}$$

где $A>0$ *не зависит от* ν *и* k.

Доказательство. По формуле Коши для коэффициентов $a_\nu(z_k)$ имеем

$$a_\nu(z_k) = \frac{1}{\nu!}\,|\tau_k^{(\nu)}(\lambda_k)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_k|=\delta}(\zeta-z_k)^{p_k-\nu-1}\,\frac{d\zeta}{S(\zeta)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta^{p_k-\nu-1}}{2\pi}\int_{|\zeta-z_k|=\delta}\frac{|d\zeta|}{|S(\zeta)|} \leqslant \delta^{p_k-\nu}\,(1+|z_k|)^{-\varkappa}.$$

Положив $M_* = \max\limits_k 2^{p_k-\gamma}$, получим (3.7).

б) Рассмотрим ряды по функциям системы (3.3), иначе говоря, ряды вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Omega_k(z), \tag{3.8}$$

где $\{c_k\}_0^\infty$ — некоторая последовательность комплексных чисел. Нас интересует вопрос: когда ряд (3.8) определяет функцию из класса $W_\sigma^{p,\omega}$?

Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ — последовательность нулей $S(z) \in S_\varkappa$. Обозначим через $l_\varkappa^{p,\omega}$ $(1<p<\infty, -1<\omega<p-1)$ класс последовательностей комплексных чисел $\{c_k\}_0^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\|\{c_k\}\|_{l_\varkappa^{p,\omega}} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p (1+|z_k|)^\omega\right\}^{1/p} < +\infty. \tag{3.9}$$

Очевидно, что $l_\varkappa^{p,\omega}$ с нормой (3.9) является банаховым пространством.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть $\{c_k\}_0^\infty \in l_\varkappa^{p,\omega}$ и $p\varkappa + \omega > -1$. Тогда ряд (3.8) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте комплексной плоскости и определяет целую функцию $f(z)$, причем*

$$f^{(s_k-1)}(z_k) = c_k \quad (k=0, 1, 2, \cdots). \tag{3.10}$$

Доказательство. Пусть K — компакт в комплексной плоскости, не содержащий нулей z_k функции $S(z)$. Для остаточного члена ряда (3.8) имеем:

$$|\Phi_{n,m}(z)| = \left|\sum_{k=n}^{m} c_k \Omega_k(z)\right| \leqslant B_1 \sum c_k \frac{|q_k(z)|}{|z-z_k|^{p_k-s_k+1}}, \tag{3.11}$$

Из определения (3.1) полинома $q_k(z)$ и из леммы 3.3 следует:

$$|q_k(z)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(z_k)|\, |z-z_k|^\nu \leqslant$$

$$\leqslant B_2 (1+|z_k|)^{-\varkappa} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |z-z_k|^\nu < B_3 (1+|z_k|)^{p_k-s_k-\varkappa} \tag{3.12}$$

при $z \in K$.

В силу (3.12) для (3.11) имеем

$$|\Phi_{n,m}(z)| \leqslant B_4 \sum_{n}^{m} c_k (1+|z_k|)^{-\varkappa+1} \leqslant$$

$$\leqslant B_4 \left\{\sum_{n=k}^{m} |c_k|^p (1+|z_k|)^\omega\right\}^{1/p} \left\{\sum (1+|z_k|)^{q\left(-1-\varkappa-\frac{\omega}{p}\right)}\right\}^{1/q}. \tag{3.13}$$

Но ввиду условия $p\varkappa+\omega>-1$, справедливо неравенство $q\left(-1-\varkappa-\frac{\omega}{p}\right)-1$ и из леммы 2.4 следует, что вторая сумма правой части (3.13) является отрезком сходящегося ряда и следовательно

$$|\Phi(z)|\leqslant B_5\left\{\sum_n^m|c_k|^p(1+|z_k|)^\omega\right\}^{1/p}=B_5\left\|\left\{c_k\right\}_n^m\right\|_{l_\varkappa^{p,\omega}},\tag{3.14}$$

а это означает, что ряд (3.8) равномерно сходится на K. Применив принцип максимума к отрезкам ряда (3.8), мы получим, что этот ряд равномерно сходится в каждой ограниченной области и, следовательно, представляет целую функцию. Интерполяционные свойства (3.10) непосредственно вытекают из леммы (3.1).

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 3.2. *Пусть* $\{z_k\}_0^\infty$ *— последовательность всех нулей функции* $S(z)\in S_\varkappa$ *и* $\omega+p\varkappa\in(-1,\ p-1)$. *Тогда*

1°. *Для любого элемента* $\{c_k\}\in l_\varkappa^{p,\omega}$ *ряд*

$$f(z)=\sum_{k=0}^\infty c_k\Omega_k(z)\tag{3.15}$$

сходится по норме пространства $W_\sigma^{p,\omega}$ *и определяет функцию* $f(z)$ *из класса* $W_\sigma^{p,\omega}$, *удовлетворяющую интерполяционным условиям* (3.10).

2°. *Кроме того, будем иметь*

$$\|f\|_{p,\omega}\asymp\|\{c_k\}\|_{l_\varkappa^{p,\omega}}.\tag{3.16}$$

Доказательство. В силу условия $\omega+\varkappa p<p-1$ из леммы 3.2 следует, что отрезок ряда (3.15) $\Phi_{n,m}(z)$ принадлежит пространству $W_\sigma^{p,\omega}$. Положим $h=\max_k(|\operatorname{Im}z_k|+1)$, в силу неравенства (1.5) получим

$$\|\Phi_{n,m}(z)\|_{p,\omega}\leqslant D_1\|\Phi_{n,m}(z+ih)\|_{p,\omega}.\tag{3.17}$$

Подставив значение $\Omega_k(z)$ из (2.2) в $\Phi_{n,m}(z+ih)$ и пользуясь неравенствами (2.1′), из (3.17) получим

$$\|\Phi_{n,m}\|_{p,\omega}^p\leqslant D_2\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_{n,m}(x+iy)|^p|x|^{\omega+p\varkappa}dx,\tag{3.18}$$

где

$$\varphi_{n,m}(z)=\frac{\Phi_{n,m}(z)}{S(z)}=\sum_n^m\frac{c_k\,q_k(z)}{(s_k-1)!\ (z-z_k)^{p_k-s_k+1}}\ .\tag{3.19}$$

Поскольку все полюсы рациональной функции $\varphi_{n,m}(z+ih)$ расположены в нижней полуплоскости и $q_k(z)$ — полином степени p_k-s_k, то $\varphi_{n,m}(z+ih)\in H_+^{p,\omega_1}$ $(\omega_1=\omega+p\varkappa)$ и величина, стоящая в левой части неравенства (3.18), оценивается H_+^{p,ω_1}-нормой функции $\varphi_{n,m}(z+ih)$.

Для вычисления этой нормы воспользуемся известным фактом, что пространство, сопряженное к H_-^{p,ω_1} — это пространство H_-^{q,ω_2}, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и $\omega_2=-\frac{q}{p}\omega_1$ (см., например, [12]). При этом линейный функционал в пространстве H_+^{p,ω_1} имеет вид

$$l(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\psi(x)\,dx,$$

где $\varphi(z)\in H_+^{p,\omega_1}$, $\psi(z)$—функция из H_-^{q,ω_2}, единственным образом определяемая по l и $\|\psi\|_{H_-}^{\omega_2}\leqslant B\|l\|$, где $B>0$ не зависит от l.

Следовательно, по принципу двойственности будем иметь

$$\|\varphi_{n,m}(x+ih)\|_{H_+^{p,\omega_1}}=\sup_{\|l\|<1}\{|l(\varphi_{n,m})|\}\leqslant$$

$$\leqslant\sup\left\{\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n,m}(x+ih)\,\psi(x)\,dx\right|,\ \|\psi(x)\|_{H_-^{q,\omega_2}}\leqslant 1\right\},\tag{3.20}$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и $\omega_2=-\frac{q}{p}\omega$.

Вычислив интеграл в правой части (3.20) с помощью теории вычетов, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n,m}(x+ih)\,\psi(x)\,dx=2\pi i\sum_{n}^{m}\frac{(p_k-s_k+1)!}{(s_k-1)!}c_k\times\tag{3.21}$$

$$\times\frac{d^{p_k-s_k}}{dz^{p_k-s_k}}(q_k(z+ih)\,\psi(z)]_{z=z_k-ih}.$$

Из определения (3.1) функции $q_k(z)$ и из леммы 3.3 следует

$$|q_k^{(j)}(z+ih)|=\left|\sum_{\nu=j}^{p_k-s_k}a_\nu(z_k)(z-z_k)^{\nu-j}\frac{(\nu-j+1)!}{(\nu-1)!}\right|\leqslant$$

$$\leqslant D_3\sum_{\nu=j}^{p_k-s_k}(1+|z_k|)^{-\alpha}|z-z_k|^{\nu-j}\frac{(\nu-j+1)!}{(\nu-1)!}.$$

Отсюда непосредственно вытекает оценка

$$|q_k^{(j)}(z+ih)|_{z=z_k+ih}\leqslant D_4(1+|z_k|)^{-\alpha},\tag{3.22}$$

где

$$D_4=D_3\sum_{\nu=1}^{p_k-s_k}h^\nu\frac{(\nu-j+1)!}{(\nu-1)!}.$$

Из (3.22) имеем

$$\left|\frac{d^{p_k-s_k}}{dz^{p_k-s_k}}[q_k(z+ih)\,\psi(z)]_{z=z_k-ih}\right|=$$

$$=\left|\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} C^{\nu}_{p_k-s_k}\,[q_k(z+ih)]^{(\nu)}_{z=z_k-ih}\,[\psi(z)]^{(p_k-s_k-\nu)}_{z=z_k-ih}\right|\leqslant$$

$$\leqslant D_4(1+|z_k|)^{-\varkappa}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} C^{\nu}_{p_k-s_k}\,|[\psi(z_k-ih)]^{(p_k-s_k-\nu)}|\leqslant$$

$$\leqslant D_5(1+|z_k|)^{-\varkappa}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|\psi^{(\nu)}(z_k-ih)|. \tag{3.23}$$

Теперь с помощью (3.23) и (3.21) получим оценку

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n,m}(x+ih)\,\psi(x)\,dx\right|\leqslant D_6\sum_{n}^{m}|c_k|\,(1+|z_k|)^{-\varkappa}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|\psi^{(\nu)}(z_k-ih)|.$$

По неравенству Гёльдера, отсюда имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n,m}(x+ih)\,\psi(x)\,dx\right|\leqslant D_6\left\{\sum_{n}^{m}|c_k|^p\,(1+|z_k|)^{\omega}\right\}^{1/p}\times$$

$$\times\left\{\sum_{n}^{m}\left(\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|\psi^{(\nu)}(z_k-ih)|\right)^q(1+|z_k|)^{-q\left(\varkappa+\frac{\omega}{p}\right)}\right\}^{1/p}. \tag{3.24}$$

Так как $\psi(z)\in H_{-}^{q,\,\omega_1}\left(\omega_2=-\dfrac{q}{p}\,\omega_1=-q\left(\varkappa+\dfrac{\omega}{p}\right)\right)$, то согласно следствию из теоремы 1.2 справедливо неравенство

$$\sum_{n}^{m}\left(\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|\psi^{(\nu)}(z_k-ih)|\right)^q(1+z_k|)^{-q\left(\varkappa+\frac{\omega}{p}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant D_7\sum_{\nu=0}^{p}\sum_{k=n}^{m}|\psi^{(\nu)}(z_k-ih)|^q(1+|z_k|)^{-q\left(\varkappa+\frac{\omega}{p}\right)}\leqslant D_8\|\psi\|^q_{H_{-}^{q,\,\omega_1}}.$$

Отсюда и из (3.24) получим

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n,m}(x+ih)\,\psi(x)\,dx\right|\leqslant D_9\|\{c_k\}_n^m\|_{l_{\varkappa}^{p,\,\omega}}\,\|\psi\|_{H_{-}^{q,\,\omega_1}}. \tag{3.25}$$

Наконец, по (3.19), (3.20) и (3.25) для функции $\Phi_{n,m}(z)$ имеем

$$\|\Phi_{n,m}\|_{p,\omega}\leqslant D_8\|\{c_k\}_n^m\|_{l_{\varkappa}^{p,\,\omega}}\;(n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{3.26}$$

Так как $\{c_k\}\in l_{\varkappa}^{p,\,\omega}$, то $\|\Phi_{n,m}\|\rightrightarrows 0$, при $n,\ m\to+\infty$. Значит ряд (3.15) сходится по норме $W_{\sigma}^{p,\,\omega}$ и, таким образом, $f(z)\in W_{\sigma}^{p,\,\omega}$.

Из неравенства (3.26) следует также, что

$$\|f\|_{p,\omega}\leqslant A_1\|\{c_k\}\|_{l_{\varkappa}^{p,\,\omega}}.$$

Обратное неравенство вытекает из леммы 2.3. Теорема доказана.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 3.3. *Каждая целая функция $f(z)\in W_\sigma^{p,\omega}$ разлагается в ряд*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f^{(s_k-1)}(z_k)\,\Omega_k(z), \tag{3.27}$$

где $\{z_k\}_0^\infty$ — нули целой функции $S(z)\in S_\varkappa$ и $\omega+p\varkappa\in(-1,\ p-1)$.

Доказательство. Пусть $f(z)\in W_\sigma^{p,\omega}$. Сначала заметим, что по лемме 2.3 и по теореме 3.1 будем иметь сходимость ряда (3.27), а по теореме 3.2 сумма этого ряда принадлежит классу $W_\sigma^{p,\omega}$.

Функция

$$\varphi(z)=f(z)-\sum_{k=0}^{\infty} f^{(s_k-1)}(z_k)\,\Omega_k(z) \tag{3.28}$$

очевидно, принадлежит пространству $W_\sigma^{p,\omega}$ и так как $\Omega_k^{(s_k-1)}(z_j)=\delta_{k,j}$, то $\varphi^{(s_k-1)}(z_k)=0\ (k\geqslant 0)$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(z)=\frac{\varphi(z)}{S(z)}, \tag{3.29}$$

которая, очевидно, вновь будет целой.

Ввиду неравенств (1.6) леммы 1.2 и определения класса $S_\varkappa$ функция $\psi(z)$ при $|\mathrm{Im}\,z|>h$ оценивается так:

$$|\psi(z)|\leqslant c\|\varphi\|_{p,\omega}(1+|z|)^{-\frac{\omega}{p}-\varkappa}(1+|y|)^{-\frac{1}{p}}.$$

Отсюда видно, что при $|\mathrm{Im}\,z|\geqslant h$ функция $|\psi(z)|$ ограничена. Ограниченность функции $|\psi(z)|$ в полосе $|\mathrm{Im}\,z|<h$ вытекает из теоремы Фрагмена—Линделёфа. Значит целая функция $\psi(z)\equiv a_0=\mathrm{const}$. Далее, из условий теоремы $\omega\in(-1,\ p-1)$ и $\omega+p\varkappa\in(-1,\ p-1)$ вытекает, что $\varkappa\in(-1,\ 1)$ и, следовательно, $S(z)\overline{\in}\ W_\sigma^{p,\omega}$. А это значит, что $\varphi(z)=\psi(z)\equiv 0$ и, тем самым, разложение (3.27) доказано.

Из этой теоремы вытекает

Следствие. Если $f(z)\in W_\sigma^{p,\omega}$ $(1<p<\infty,\ -1<\omega<p-1)$, $\{z_k\}_0^\infty$ — нули функции $S(z)\in S_\varkappa$, $\omega+p\varkappa\in(-1,\ p-1)$ и $f^{(s_k-1)}(z_k)=0$ $(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$, то $f(z)\equiv 0$.

Объединив результаты теорем 3.2 и 3.3, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3.4. *Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ — нули функции $S(z)\in S_\varkappa$, где $\varkappa+p\omega\in(-1,\ p-1)$. Тогда ряд* (3.15) *осуществляет линейное топологическое отображение всего пространства $l_\varkappa^{p,\omega}$ на пространство $W_\sigma^{p,\omega}$, причем справедливы неравенства*

$$\|f\|_{p,\omega}\asymp\|(c_k)\|_{l_\varkappa^{p,\omega}}.$$

Отметим, что в специальном случае, когда $\omega=0$ и $\varkappa=0$ отсюда следует известная теорема Б. Я. Левина, приведенная нами во введении статьи.

В другом специальном случае, когда

$$S(z)=E_1(iz;\ \mu)-E_1(-iz;\ \mu)\quad(-1<\mu<2),$$

теорема 3.4 была анонсирована в статье автора [8].

Ереванский государственный университет

Поступила 2.VI.1982

Ս. Գ. ՌԱՖԱՅԵԼՅԱՆ։ Էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների որոշ կշռային դասերում ինտերպոլյացիան և բազիսությունը *(ամփոփում)*

Հետևելով Մ. Մ. Ջրբաշյանին, նշանակենք $W^{p,\omega}_\sigma$*-ով* ($1<p<+\infty$, $-1<\omega<p-1$, $\sigma>0$. *այն բոլոր էքսպոնենցիալ* $<\sigma$ *տիպի ամբողջ ֆունկցիաների դասը, որոնց համար*

$$\|f\|_{p,\omega}\equiv\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p\,|x|^\omega\,dx\right\}^{1/p}<+\infty.$$

Այս աշխատանքը վերաբերվում է $W^{p,\omega}_\sigma$ *դասերում բազմակի ինտերպոլյացիայի խնդիրներին և բազիսների կառուցմանը։*

S. G. RAFAELIAN. *Interpolation and basisness in some weighted classes of entire functions of exponential type* (summary)

In the present paper a problem of multiple interpolation is solved and some basises in M. M. Djrbashian classes $W^{p,\omega}_\sigma$ of entire functions of exponential type are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, ДАН СССР, 85, № 7, 1952, 29—32. Матем. сб., 33, (75), № 3, 1953, 485—530.
2. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
3. *Б. Я. Левин*. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа, Сб. «Математическая физика и функциональный анализ», ФНИНТ АН УССР, вып. 1, 1969, 136—146.
4. *Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский*. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент, Изв. АН СССР, сер. матем., 39, № 3, 1975, 657—702.
5. *Б. Я. Левин*. О базисах показательных функций в $L_2\ (-\pi;\ \pi)$. Записки физ.-мат. фак-та Харьковского гос. ун-та и Харьковск. матем. об-ва, 27, сер. 4, 1961, 39—48.
6. *В. Д. Головин*. О биортогональных разложениях в L_2 по линейным комбинациям показательных функций, Зап. м.-м. фака ХГУ и Харьк. матем. об-ва (сер. 4), т. XXX, 1964.
7. *М. М. Джрбашян* и *С. Г. Рафаелян*. О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L^2, ДАН Арм. ССР, т. 73, № 1, 1981.
8. *С. Г. Рафаелян*. О базисности некоторых систем целых функций, ДАН Арм.ССР, 70, № 4, 1980.
9. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., VIII, № 1, 1973, 384—409.
10. *Б. Я. Левин*. Целые функции, М., МГУ, 1971.
11. Plancherel et Polya. Fonctiions entieres et integrales de Fourier Multiples, Comm. 9ct, 10, 1912.
12. *В. М. Мартиросян*. Замыкание и базисность некоторых биортоганальных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIII, № 5—6, 1978, 490—531.