УДК 519.613

А. Б. НЕРСЕСЯН, А. А. ПАПОЯН

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ, ОБРАТНОЙ СУММЕ
 МАТРИЦ ТЕПЛИЦА И ГАНКЕЛЯ

0°. В 1964 г. В Тренч [1] предложил следующую формулу обращения эрмитовой теплицевой матрицы (T -матрицы) $T = \|t_{i,j}\|$ ($t_{-i} = \bar{t}_i$, $i, j = 0, 1, \dots, n$),

$$r_{i+1, j+1} - r_{ij} = r_{00}^{-1} \{r_{i+1, 0} \bar{r}_{j+1, 0} - r_{n-i, 0} \bar{r}_{n-j, 0}\}, \quad (1)$$

$$(i, j = 0, 1, \dots, n-1)$$

где $T^{-1} = R = \|r_{ij}\|$, $r_{00} \neq 0$.

Таким образом, для построения матрицы T^{-1} достаточно найти ее первый столбец $\{r_{i0}\}$ ($i=0, 1, \dots, n$) и убедиться в том, что $r_{00} \neq 0$.

Алгоритм В. Тренча оказался чрезвычайно эффективным и в дальнейшем был обобщен в разных направлениях (см. [2-5]). Все эти результаты легко переносятся на случай ганкелевых матриц (H -матриц) $H = \|h_{i,j}\|$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$), поскольку $HJ = T$ ($t_k = h_{n+k}$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$), где J — унитарная матрица перестановок (см. [3]).

С другой стороны, еще в 1947 г. Н. Левинсон [6] предложил рекуррентный процесс решения алгебраической системы с положительной определенной T -матрицей. В применении к алгоритму (1) это означает, что и нахождение элементов r_{i0} ($i=0, 1, \dots, n$) может быть сведено к (нелинейной) рекуррентной процедуре. Этот подход был усовершенствован и развит Ш. Зохаром ([2], 1959).

Важнейшие из указанных результатов будут распространены ниже на матрицы вида

$$S = \|s_{ij}\|_{i,j=0}^n = T + H = \|t_{i-j} + h_{i+j}\|_{i,j=0}^n, \quad (2)$$

которые естественно назвать TH -матрицами. Именно, для обращения неособенной матрицы S , —при некоторых ограничениях, —будут построены алгоритмы типа Н. Левинсона—Р. Тренча—Ш. Зохара.

Предлагаемый подход основан на прямой аналогии с формулами работы [7] для резольвентного ядра интегрального оператора Фредгольма второго рода с TH -ядром $K(x, y) = t(x-y) + h(x+y)$. Небезынтересно отметить, что и алгоритм В. Тренча, по сути, является дискретным аналогом известной формулы В. В. Соболева для резольвентного ядра интегрального оператора на конечном отрезке с разностным ядром $K(x, y) = t(|x-y|)$ ([8], 1958 г.).

1°. Оказывается, что роль вспомогательного TH -ядра $\tilde{K}(x, y) = t(x-y) - h(x+y)$, введенного и использованного в [7], в данном (дискретном) случае играет TH -матрица

$$\bar{S} = \|s_{ij}\|_{i,j=0}^n = \|t_{i-j} - h_{i+j+1}\|_{i,j=0}^n, h_{2n+1} = 0, \quad (3)$$

которую также назовем вспомогательной матрицей по отношению к S . Обозначим теперь

$$S^{-1} = \bar{R} = \|r_{ij}\|_{i,j=0}^n, \bar{S}^{-1} = \bar{R} = \|\tilde{r}_{ij}\|_{i,j=0}^n \quad (4)$$

и условимся считать, что

$$s_{ij} = \tilde{s}_{ij} = r_{ij} = \tilde{r}_{ij} \text{ при } \min(i, j) < 0 \text{ или } \max(i, j) > n. \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть матрицы S и $\bar{S}$ обратимы и кроме того

$$r_{00} \neq 0, r_{nn} \neq 0. \quad (6)$$

Тогда справедливы рекуррентные формулы

$$r_{i+1, j} = r_{ij} + \tilde{r}_{i, j-1} - (1 - \delta_{nj}) \tilde{r}_{ij} + \tilde{y}_j \tilde{r}_{in} + x_i r_{0j}, \quad (7)$$

$$\tilde{r}_{ks} = \tilde{r}_{k-1, s} + (1 - \delta_{0s}) r_{ks} - r_{k, s+1} + y_s r_{k0} + x_k \tilde{r}_{ns} \\ (i, j, k, s = 0, 1, \dots, n),$$

где принято

$$x_i = \tilde{r}_{nn}^{-1} \left\{ \tilde{r}_{in} - r_{in} - \tilde{r}_{i-1, n} - r_{i0} \sum_{k=0}^n (s_{0k} - s_{0, k+1}) \tilde{r}_{kn} \right\}, \quad (8)$$

$$y_j = r_{00}^{-1} \left\{ \tilde{r}_{0j} - 1 - \delta_{0, j} r_{0j} - r_{0, j+1} + \tilde{r}_{nj} \sum_{k=1}^n r_{0k} (t_{k-n-1} + h_{k+n+1}) \right\}, \quad (9)$$

$$\tilde{x}_i = r_{00}^{-1} \left\{ r_{i+1, 0} - r_{i0} + \tilde{r}_{i0} - \tilde{r}_{i, n} \sum_{k=0}^n (\tilde{s}_{n, k-1} - s_{nk}) r_{k0} \right\}, \quad (10)$$

$$\tilde{y}_j = \tilde{r}_{nn}^{-1} \left\{ -r_{nj} + (1 - \delta_{nj}) \tilde{r}_{nj} - \tilde{r}_{n, j-1} - r_{nj} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{r}_{nk} (h_k - t_{k+1}) \right\}. \quad (11)$$

◀ **Доказательство.** Учитывая (5), имеем

$$\delta_{i+1, j} - \delta_{ij} = \sum_{k=0}^n (s_{i+1, k} - s_{ik}) r_{kj} = \sum_{k=0}^n (t_{i+1-k} - t_{i-k}) r_{kj} + \\ + \sum_{k=0}^n (h_{i+k+1} - h_{i+k}) r_{kj} = \sum_{k=-1}^n t_{i-k} (r_{k+1, j} - r_{kj}) - \\ - \sum_{k=0}^{n+1} h_{i+k} (r_{kj} - r_{k-1, j}) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, n).$$

Еще раз меняя индексацию, получим

$$\sum_{k=0}^n \tilde{s}_{ik} (r_{k+1, j} - r_{kj}) = \delta_{i+1, j} - \delta_{ij} + (h_i - t_{i+1}) r_{0j} \quad (12) \\ (i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, n).$$

При фиксированном j мы получим систему с матрицей $\tilde{S}$, если к (12) добавим соотношение

$$\sum_{k=0}^n \tilde{s}_{nk} (r_{k+1, j} - r_{kj}) = \tilde{y}_j. \quad (12')$$

Таким образом (см. (8), (10))

$$r_{l+1, j} - r_{lj} = \tilde{r}_{l, j-1} - (1 - \delta_{nj}) \tilde{r}_{lj} + x_l r_{0j} + y_j \tilde{r}_{ln}, \quad (13)$$

где x_l и y_j могут быть выписаны в виде

$$\tilde{x}_l = \sum_{k=0}^n \tilde{r}_{lk} (h_k - t_{k+1}), \quad \tilde{y}_j = \sum_{k=0}^n (\tilde{s}_{n, k-1} - \tilde{s}_{nk}) \tilde{r}_{kj}. \quad (13')$$

Подставим теперь в (13) $j = 0$, а затем $i = n$

$$\begin{aligned} r_{l+1, 0} - r_{l0} &= -\tilde{r}_{l0} + \tilde{x}_l r_{00} + y_0 \tilde{r}_{ln} \\ -r_{nj} &= \tilde{r}_{n, j-1} - (1 - \delta_{nj}) \tilde{r}_{nj} + x_n r_{0j} + y_j \tilde{r}_{nn}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (13), (13') и (14) получаем первую формулу (7). Для получения второй формулы уже используем представление

$$\delta_{ks} - \delta_{k-1, s} = \sum_{p=0}^n (\tilde{s}_{kp} - \tilde{s}_{k-1, p}) r_{ps},$$

откуда, вполне аналогично выводу формулы (12), получим

$$\delta_{ks} - \delta_{k-1, s} = \sum_{p=0}^n s_{kp} (\tilde{r}_{ps} - \tilde{r}_{p-1, s}) - (t_{k-n-1} + h_{k+n+1}) \tilde{r}_{ns}. \quad (15)$$

Решая соответствующую систему, аналогичную (12)–(12'), но с матрицей S , придем к формуле

$$\tilde{r}_{ks} = \tilde{r}_{k-1, s} + (1 - \delta_{0s}) r_{ks} - r_{k, s+1} + y_s r_{k0} + x_k \tilde{r}_{ns}, \quad (15')$$

где y_s и x_k можно представить в виде

$$y_s = \sum_{p=0}^n s_{0p} (\tilde{r}_{ps} - \tilde{r}_{p-1, s}), \quad x_k = \sum_{p=1}^n r_{kp} (t_{p-n-1} + h_{p+n+1}).$$

Подставив в формуле (15') $k=0$, а затем $s=n$, получим вторую формулу (7).

Пусть теперь известны „граничные“ элементы матриц R и $\tilde{R}$. Положив в (7) $i=0$, определим элементы r_{1j} ($j=0, 1, \dots, n$), а затем, положив $k=0$, определим r_{1s} ($s=0, 1, \dots, n$). Пусть теперь найдены все элементы r_{ij} , r_{ks} ($0 \leq i, k < p < n$; $i, s=0, 1, \dots, n$). Положив в (7) $i=p$, определим $r_{p+1, j}$ ($j=0, 1, \dots, n$), а затем (положив $k=p+1$) найдем $r_{p+1, s}$ ($s=0, 1, \dots, n$). Таким образом, принцип индукции полностью обосновывает утверждение о рекуррентности формул (7). ►

Рассмотрим теперь случай $n = \infty$, при условии

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} |t_l| < +\infty, \quad \sum_{l=0}^{\infty} |h_l| < +\infty. \quad (16)$$

Повторив доказательство теоремы 1 с соответствующими упрощениями, получим следующий результат.

Теорема 1'. Пусть бесконечные матрицы S и $\bar{S}$ обратимы и $r_{00} \neq 0$. Тогда справедливы рекуррентные формулы

$$r_{i+1, j} = r_{ij} + \tilde{r}_{i, j-1} - \bar{r}_{ij} + r_{00}^{-1} r_{0j} [r_{i+1, 0} - r_{i0} + \tilde{r}_{i0}], \quad (17)$$

$$\bar{r}_{ks} = \tilde{r}_{k-1, s} + (1 - \delta_{0, s}) r_{ks} - r_{k, s+1} + r_{00}^{-1} r_{k0} [\tilde{r}_{0s} - (1 - \delta_{0, s}) r_{0s} + r_{0, s+1}] \\ (i, j, k, s = 0, 1, 2, \dots).$$

2°. Элементы матрицы (2) удовлетворяют тождеству

$$\Delta(s_{ij}) \stackrel{\text{del}}{=} s_{ij} + s_{i-2, j} - s_{i-1, j-1} - s_{i-1, j+1} = 0. \quad (18)$$

Это соотношение позволяет получить рекуррентный алгоритм обращения матрицы S без использования вспомогательной матрицы $\bar{S}$.

Теорема 2. Пусть матрица S обратима и

$$\begin{vmatrix} r_{00} & r_{n0} \\ r_{0n} & r_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (19)$$

Тогда справедлива рекуррентная формула

$$\Delta(r_{i+1, j}) = \alpha_i r_{0j} + \beta_i r_{nj} + \gamma_j r_{i0} + \delta_j r_{in}, \quad -\delta_{i, j} r_{i, j-1} - \delta_{n-1, j} r_{i, j+1}, \quad (20)$$

где (α_i, β_i) определяется из системы (23), а (γ_j, δ_j) — из системы (24) (см. ниже).

◀ **Доказательство.** Имеем, с учетом (5) и (18), соответственно меняя индексацию

$$\delta_{ij} + \delta_{i-2, j} = \sum_{k=0}^n (s_{ik} + s_{i-2, k}) r_{kj} = \sum_{k=0}^{n-2} s_{i-1, k} r_{k+1, j} + \\ + \sum_{k=2}^n s_{i-1, k} r_{k-1, j} + (s_{i0} - s_{i-2, 0}) r_{0j} + (s_{in} - s_{i-2, n}) r_{nj}.$$

Отсюда, при фиксированном j ($= 0, 1, \dots, n$), приходим к системе из $n - 2$ уравнений

$$\sum_{k=0}^n s_{ik} (r_{k+1, j} + r_{k-1, j}) = \delta_{i+1, j} + \delta_{i-1, j} + \\ + (s_{i1} - s_{i+1, 0} - s_{i-1, 0}) r_{0j} + (s_{i, n-1} - s_{i+1, n} - s_{i-1, n}) r_{nj}. \quad (21)$$

Добавив сюда еще два уравнения (при $i=0, n$, аналогично (12')) и решая полученную систему с матрицей S , приходим к соотношению (20), где величины $\alpha_i, \beta_i, \gamma_j, \delta_j$ пока неопределенные, и о нетрудно видеть, что

$$\alpha_s = \sum_{k=1}^{n-1} r_{sk} (s_{k1} - s_{k+1,0} - s_{k-1,0}), \beta_s = \sum_{k=1}^{n-1} r_{sk} (s_{k, n-1} - s_{k+1, n} - s_{k-1, n}). \quad (22)$$

Подставив теперь в (20) $j=0, n$, а затем $i=0, n$, получим следующие две системы относительно (α_i, β_i) и (γ_j, δ_j) соответственно

$$\begin{cases} r_{00} \alpha_i + r_{n0} \beta_i = r_{i+1,0} + r_{i-1,0} - r_{i1} - r_{i0} \gamma_0 - r_{in} \delta_0 \\ r_{0n} \alpha_i + r_{nn} \beta_i = r_{i+1,n} + r_{i-1,n} - r_{i, n-1} - r_{i0} \gamma_n - r_{in} \delta_n \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} r_{00} \gamma_j + r_{0n} \delta_j = r_{1,j} - r_{0, j-1} - r_{0, j+1} - \alpha_0 r_{0j} - \beta_0 r_{nj} \\ r_{n0} \gamma_j + r_{nn} \delta_j = r_{n-1, j} - r_{n, j-1} - r_{n, j+1} - \alpha_n r_{0j} - \beta_n r_{nj}, \end{cases} \quad (24)$$

причем вместо величин $\alpha_0, \beta_0, \alpha_n, \beta_n$ справа в (23) и (24) надо поставить их значения из (22) при $s=0, n$. Согласно условию (19), эти системы однозначно разрешимы. Выписывать явно их решения мы не будем.

Рекуррентный характер формулы (20) (при заданных значениях

$$r_{i0}, r_{i1}, r_{in}, r_{i, n-1}, r_{0j}, r_{1j}, r_{nj}, r_{n-1, j}; i, j=0, 1, \dots, n)$$

очевиден. ►

В случае бесконечной ($n = \infty$) TH -матрицы S по той же схеме доказывается следующая

Теорема 2'. Пусть выполняется условие (16) и бесконечная TH -матрица обратима. Тогда, если $r_{00} \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \Delta(r_{i+1, j}) &= r_{00}^{-1} [r_{1, j} [\Delta(r_{1, j}) + \delta_{1, j} r_{0, j-1} - \alpha_0 r_{1j}] + \\ &+ r_{0j} [\Delta(r_{i+1, 0} - \gamma_0 r_{i0})] - \delta_{1, j} r_{i, j-1}; i, j=0, 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\alpha_0 = \sum_{k=0}^{\infty} r_{0k} (s_{k1} - s_{k+1, 0} - s_{k-1, 0}), \gamma_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (s_{0, k-1} + s_{0, k+1}) r_{k0}. \quad (26)$$

3°. Теоремы 1 и 1' содержат алгоритм одновременного восстановления элементов матриц $R = S^{-1}$ и $\tilde{R} = \tilde{S}^{-1}$ по известным значениям их „граничных“ элементов. Соответственно, теоремы 2 и 2' позволяют восстановить элементы матрицы $R, = S^{-1}$, если известны значения элементов во всей ее „граничной полосе“, состоящей из двух строчек и двух столбцов.

Результаты эти непосредственно обобщают алгоритмы В. Тренча—Ш. Зохара ([1, 2]). Правда, в формулах (7), (20) и (25) используются также значения элементов t_i и h_j исходной TH -матрицы (2), но в частном случае $h_j = 0$ ($j=0, 1, \dots, 2n$) эти формулы без труда могут быть преобразованы в соответствующие формулы для T -матриц (см. [2, 3]).

Заметим также, что даже в частном случае бесконечных ганкелевых матриц (т. е. при $t_i = 0, i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) теоремы 1' и 2'—новые.

Как это следует из полученных результатов, для восстановления матрицы $R = S^{-1}$ рекуррентным процессом (7) или (20), предварительно надо решить восемь линейных уравнений при $n < +\infty$ и че-

тыре — при $n = \infty$. На самом деле и при $n < +\infty$, в принципе, достаточно знать решения четырех уравнений, ибо решения остальных могут быть через них выражены. Ситуация здесь вполне аналогична случаю T -матриц (см. [4]), однако указанная зависимость имеет более сложный характер, ставящий под сомнение целесообразность практического ее использования.

Таким образом (см. также выше, п. 0°), теоремы 1, 1', 2, 2' содержат дискретные аналоги первого ([7], пример 2) и второго ([7], пример 3) способов обращения интегрального TN -оператора.

4°. Как известно (см. [2]), вычислительная процедура обращения T -матрицы особенно эффективна, если за ее основу принять алгоритм Н. Левинсона [6]. Остановившись на методе п. 1°, покажем, что и в случае TN -матрицы нахождение „граничных“ строчек и столбцов матриц R и $\bar{R}$ сводится к рекуррентному нелинейному процессу.

Условимся о следующих обозначениях. Пусть задана бесконечная TN -матрица $S = \|s_{ij}\| = \|t_{i-j} + h_{i+j}\|$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$). Составленные на ее основе конечные матрицы порядка $n+1$ будем отмечать индексом n сверху. Таким образом (см. (2), (3)).

$$S^n = \|s_{ij}^n\|, \bar{S}^n = \|\bar{s}_{ij}^n\|, (S^n)^{-1} = \|r_{ij}^n\|, (\bar{S}^n)^{-1} = \|\bar{r}_{ij}^n\|, \quad (27)$$

$$(i, j = 0, 1, \dots, n)$$

$$s_{ij} = \bar{s}_{ij} = r_{ij}^n = \bar{r}_{ij}^n = 0 \text{ при } \min(i, j) < 0.$$

Обозначим теперь

$$a_n = 1 + \sum_{s=0}^n r_{ns}^n s_{s, n+1} - \bar{r}_{ns}^n - \bar{r}_{ns}^n \bar{s}_{s, n+1} -$$

$$- \sum_{s=0}^n \bar{r}_{ns}^n (t_{s+1} - h_s) \sum_{p=0}^n r_{0p}^n s_{p, n+1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (28)$$

$$\bar{a}_n = 1 + \sum_{s=0}^n \bar{r}_{ns}^n \bar{s}_{s, n+1} + r_{n+1, 0}^{n+1} (r_{00}^{n+1})^{-1} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^n \bar{r}_{0s}^n \bar{s}_{s, n+1} \sum_{p=0}^n \bar{r}_{0p}^n \bar{s}_{p, n+1} + r_{n+1, 0}^{n+1} (r_{00}^{n+1})^{-1} \times$$

$$\times \sum_{s=1}^{n+1} r_{0s}^{n+1} s_{s, n+2} - \sum_{s=1}^{n+1} r_{n+1, s}^{n+1} s_{s, n+2}, \quad (28')$$

$$\beta_k^n = (r_{nk}^n)^{-1} \{ r_{nk}^n + \bar{r}_{n, k-1}^n - \bar{r}_{nk}^n + r_{0k}^n (r_{00}^n)^{-1} [r_{n0}^n -$$

$$- r_{n0}^n - r_{nn}^n \sum_{s=1}^n s_{n+1, s} r_{s0}^n] + r_{0k}^n s_{n+1, 0} \}, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\beta_0^n = \sum_{s=0}^n s_{n+1, s} r_{s0}^n, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_k^n &= (r_{n+1, n+1}^{n+1})^{-1} \{ r_{nk}^n + r_{n+1, k}^{n+1} - r_{n+1, k+1}^{n+1} - \\ &- r_{n+1, 0}^{n+1} [r_{nk}^n (t_{n+1} - h_n) + (r_{00}^n)^{-1} (r_{nk}^n (r_{nn}^n)^{-1} (r_{0n}^n - \\ &- r_{0n}^n + r_{00}^n \sum_{s=0}^{n-1} (t_{s-1} - h_s) r_{sn}^n) - r_{0k}^n - r_{0, k+1}^n + r_{0k}^n] \} \\ &(k = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

$$\beta_p^n = \sum_{s=0}^n \tilde{s}_{n+1, s} \tilde{r}_{sp} \quad (p = 0, n), \quad (29')$$

$$\begin{aligned} \gamma_k^n &= -r_{k0}^n s_{0, n+1} + (r_{nn}^n)^{-1} \{ r_{kn}^n + \tilde{r}_{k-1, n}^n - \\ &- \tilde{r}_{k+1}^n + r_{k0}^n (r_{0n}^n)^{-1} \left[\tilde{r}_{0n}^n - r_{0n}^n - \sum_{s=1}^n r_{0s}^n s_{s, n+1} \tilde{r}_{nn}^n \right] \}, \end{aligned}$$

$$\gamma_{n+1}^n = -1, \quad \gamma_0^n = \sum_{s=0}^n r_{0s}^n s_{s, n+1}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_k^n &= (r_{n+1, n+1}^{n+1})^{-1} \left\{ r_{kn}^n + r_{k, n+1}^{n+1} - r_{k+1, n+1}^{n+1} - \right. \\ &- r_{0, n+1}^{n+1} \left[\tilde{r}_{kn}^n (t_{n+1} - h_n) + (r_{00}^n)^{-1} (r_{k, 0}^n - r_{k+1, 0}^n - \right. \\ &- \tilde{r}_{k0}^n + \tilde{r}_{kn}^n (r_{nn}^n)^{-1} (r_{n0}^n - r_{n0}^n + r_{00}^n \sum_{s=0}^n \tilde{r}_{ns}^n (t_{s+1} - h_s)) \left. \left. \right] \right\}, \quad (30') \\ &(k = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

$$\tilde{\gamma}_{n+1}^n = -1, \quad \tilde{\gamma}_n^n = \sum_{s=0}^n \tilde{r}_{ns}^n \tilde{s}_{s, n+1},$$

$$\tau_n = r_{n+1, n+1}^{n+1} - (r_{00}^{n+1})^{-1} r_{n+1, 0}^{n+1} r_{0, n+1}^{n+1}. \quad (31)$$

Теорема 3. Пусть

$$r_{00}^n, \tilde{r}_{nn}^n, \alpha_n, \tilde{\alpha}_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N+1). \quad (32)$$

Тогда при $n = 1, 2, \dots, N$ справедливы формулы

$$r_{k, n+1}^{n+1} = \alpha_n^{-1} \tilde{\gamma}_k^n \tilde{r}_{nn}^n, \quad k = 0, 1, \dots, n+1, \quad (33)$$

$$\tilde{r}_{k, n+1}^{n+1} = \tilde{\alpha}_n^{-1} \tilde{\gamma}_k^n \tau_n, \quad k = 0, 1, \dots, n+1, \quad (33')$$

$$r_{n+1, k}^{n+1} = \alpha_n^{-1} \beta_k^n \tilde{r}_{nn}^n, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (34)$$

$$\tilde{r}_{n+1, k}^{n+1} = \tilde{\alpha}_n^{-1} \tilde{\beta}_k^n \tau_n, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (34')$$

$$r_{k0}^{n+1} = r_{k0}^n + \alpha_n^{-1} \tilde{\gamma}_k^n \beta_0^n \tilde{r}_{nn}^n, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (35)$$

$$\tilde{r}_{k0}^{n+1} = \tilde{r}_{k0}^n + \alpha_n^{-1} \tilde{\beta}_0^n \gamma_k^n \tau_n, \quad k=0, 1, \dots, n, \quad (35')$$

$$r_{0k}^{n+1} = r_{0k}^n + \alpha_n^{-1} \beta_k^n \gamma_0^n \tilde{r}_{kn}^n, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (36)$$

$$\tilde{r}_{0k}^{n+1} = \tilde{r}_{0k}^n + \alpha_n^{-1} \tilde{\beta}_k^n \gamma_0^n \tau_n, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (36')$$

◀ Доказательство, по существу, следует из формул типа (12)–(15'). Так, если записать (12) с заменой n на $n+1$ и в левой ее части оставить сумму в пределах от $k=0$ до $k=n$, то без труда получим

$$\begin{aligned} r_{k+1, j}^{n+1} - r_{k, j}^{n+1} &= \tilde{r}_{k, j-1}^n - \tilde{r}_{kj}^n - r_{0j}^{n+1} \sum_{s=0}^n \tilde{r}_{ks}^n (t_{s+1} - h_s) + \\ &+ r_{n+1, j}^{n+1} \sum_{p=0}^n \tilde{r}_{kp}^n \tilde{S}_{p, n+1}, \quad k=0, 1, \dots, n; \quad j=0, 1, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (37)$$

Имеем также

$$\sum_{k=0}^n S_{ik} r_{kj}^{n+1} = \delta_{ij} - S_{i, n+1} r_{n+1, j}^{n+1},$$

откуда

$$r_{kj}^{n+1} = r_{kj}^n - r_{n+1, j}^{n+1} \sum_{p=0}^n r_{kp}^n S_{p, n+1}; \quad k, j=0, 1, \dots, n+1. \quad (37')$$

Подставив в (37) и (37') $k=n, j=n+1$, получим выражение для $r_{n+1, n+1}^{n+1}$ (формулу (33) при $k=n+1$). Пользуясь формулами типа (12)–(15'), придем к следующим (важным для дальнейшего) выражениям

$$\begin{aligned} \omega_k^n &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=0}^n r_{kp}^n S_{p, n+1} = r_{k0}^n S_{0, n+1} + \\ &+ (r_{nn}^n)^{-1} \left\{ r_{kn}^n - \tilde{r}_{k-1, n}^n - r_{kn}^n - (r_{00}^n)^{-1} r_{k0}^n \left[\tilde{r}_{0n}^n - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r_{0n}^n - \tilde{r}_{nn}^n \sum_{p=1}^n r_{0p}^n S_{p, n+1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_k^n &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=0}^n S_{n+1, p} r_{pk}^n = (\tilde{r}_{nn}^n)^{-1} \left\{ \tilde{r}_{nk}^n - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{r}_{n, k-1}^n - r_{nk}^n - (r_{00}^n)^{-1} r_{0k}^n \left[\tilde{r}_{n0}^n - r_{n0}^n - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tilde{r}_{nn}^n \sum_{p=1}^n S_{n+1, p} r_{p0}^n \right] \right\} + S_{n+1, 0} r_{0k}^n. \end{aligned} \quad (38')$$

Из (37'), (38) и упомянутого выражения для $r_{n+1, n+1}^{n+1}$ получим

$$r_{k, n+1}^{n+1} = -\tilde{\omega}_k^n r_{n+1, n+1}^{n+1}, \quad r_{k0}^{n+1} = r_{k0}^n - \omega_k^n r_{n+1, n}^{n+1}. \quad (39)$$

Так же, как и при выводе формулы (37'), получим, что

$$r_{n+1,0}^{n+1} = -\omega_0^n r_{n+1,n+1}^{n+1}. \quad (39')$$

Таким образом, формулы (33) и (35) доказаны. Вполне аналогично выводятся и формулы (34) и (36).

Перейдем теперь к доказательству формул (33')—(36'). Аналогично выводу формулы (15), имеем

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n+1} S_{ik} (\bar{r}_{kj}^{n+1} - \bar{r}_{k-1,j}^{n+1}) = \delta_{ij} - \delta_{i-1,j} + S_{i,n+2} \bar{r}_{n+1,j}^{n+1} \\ \sum_{k=0}^{n+1} S_{0k} (\bar{r}_{kj}^{n+1} - \bar{r}_{k-1,j}^{n+1}) = A_j, \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n+1) \quad (40)$$

где A_j — некоторые постоянные. Из системы (40) имеем

$$\begin{aligned} \bar{r}_{kj}^{n+1} - \bar{r}_{k-1,j}^{n+1} &= r_{k0}^{n+1} A_j + \sum_{p=1}^{n+1} r_{kp}^{n+1} (\delta_{pj} - \delta_{p-1,j}) + \\ &+ r_{n+1,j}^{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} r_{kp}^{n+1} S_{p,n+2} \quad (j, k=0, 1, \dots, n+1). \end{aligned} \quad (40')$$

При $k=0, j=n+1$ отсюда получаем выражение для A_{n+1} . В то же время легко видеть (как и при выводе (37')), что

$$\begin{aligned} \bar{r}_{kj}^{n+1} &= \bar{r}_{kj}^n - \bar{r}_{n+1,j}^{n+1} \sum_{p=0}^n \bar{r}_{kp}^n S_{p,n+1} \\ (k=0, 1, \dots, n; j=0, 1, \dots, n+1). \end{aligned} \quad (41)$$

Из (40) и (41) приходим к формулам

$$\begin{aligned} \bar{r}_{n+1,n+1}^{n+1} - \bar{r}_{n+1,n+1}^{n+1} &= r_{n+1,0}^{n+1} (r_{00}^{n+1})^{-1} \left[\bar{r}_{0,n+1}^{n+1} - r_{0,n+1}^{n+1} - \right. \\ &- \bar{r}_{n+1,n+1}^{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} r_{0p}^{n+1} S_{p,n+2} \left. \right] + r_{n+1,n+1}^{n+1} + \\ &+ \bar{r}_{n+1,n+1}^{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} r_{n+1,p}^{n+1} S_{p,n+2}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\bar{r}_{n,n+1}^{n+1} = -\bar{r}_{n+1,n+1}^{n+1} \sum_{p=0}^n \bar{r}_{np}^n S_{p,n+1}, \quad (42')$$

$$\bar{r}_{0,n+1}^{n+1} = -\bar{r}_{n+1,n+1}^{n+1} \sum_{p=0}^n r_{0p}^n S_{p,n+1},$$

откуда (учитывая (32)) однозначно определяется $\bar{r}_{n+1,n+1}^{n+1}$ по формуле (33') при $k=n+1$. Доказательство заканчивается вполне аналогично доказательству формул (33)—(36), на основе формул типа (38), (38'). ►

Формулы (33)—(36) и (33')—(36') определяют рекуррентный процесс. Действительно, пусть „граничные“ элементы матриц $R^n = (S^n)^{-1}$ и $\bar{R}^n = (\bar{S}^n)^{-1}$ известны. Тогда по формулам (28), (29) и (30) определяются $\alpha_n, \beta_k^n, \gamma_k^n$, что дает возможность по формулам (33), (34), (35) и (36) определить „граничные“ элементы матрицы $(S^{n+1})^{-1}$. По этим значениям из формул (28'), (29'), (30') и (31) определяются величины $\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_k^n, \bar{\gamma}_k^n$ и τ_n , что и используется для определения, — по формулам (33'), (34'), (35') и (36'), — „граничных“ элементов матрицы $(S^{n+1})^{-1}$.

Таким образом, теоремы 1 и 3 позволяют, — при определенных условиях, — обратить *ТН*-матрицу S^N применением рекуррентного алгоритма. Можно показать (как и в случае *Т*-матрицы, см. [2]), что этот подход позволяет при обращении *ТН*-матрицы S^N довести порядок количества элементарных (аддитивных и мультипликативных) операций при больших N до $O(N^2)$ вместо $O(N^3)$ — в случае матриц общего вида. Однако сравнение с хорошо разработанным алгоритмом Н. Левинсона—В. Тренча — Ш. Зохара [1, 2, 6] (соответствующего случаю $h_i = 0, i = 0, 1, \dots, 2n$) показывает, что формулы (33)—(36) и (33')—(36'), по-видимому, должны допустить значительные упрощения, что позволит им лечь в основу эффективной программы ЭВМ для обращения *ТН*-матрицы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 4.1.1983

Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ, Ա. Ա. ՊԱՊՈՅԱՆ. Տեպլիցի և Հանկելի գումար մատրիցայի հակադարձի կառուցումը. (ամփոփում)

Առաջարկվում է $S = \|t_{i-j} + h_{i+j}\| (i, j = 0, 1, \dots, N)$ մատրիցայի հակադարձ $R = S^{-1} = \|r_i, j\| (i, j = 0, 1, \dots, N)$ մատրիցայի կառուցման եղանակ: Այս արդյունքը ընդհանրացնում է ն. Լևինսոնի—Վ. Տրենչի—Շ. Ջոխարի հայտնի ալգորիթմը, որը վերաբերվում էր Տեպլիցի $T = \|t_{i-j}\|$ մատրիցային:

A. B. NERSESIAN, A. A. PAPOYAN. Construction of matrix, inversed to the sum of *Toplitz* and *Henkel* matrices (summary)

In the paper the recursion algorithm of the construction of the finite matrix which is an arbitrary sum of *Toplitz* and *Henkel* matrices is proposed. In the case of infinite matrices the formula is obtained allowing to restore the elements of the inverse matrix with its two first lines and columns.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Trench. An algorithm for the inversion of finite *Toeplitz* matrices, J. Soc Indust. Appl. Math., 12, 1964, 515—522.
2. Sh. Zohar. *Toeplitz* Matrix Inversion: The Algorithm of W. F. Trench, J. Assoc. Comput. Mach., 16, № 4, 1969, 592—601.
3. И. С. Нохидов. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы, «Наука», М., 1974.
4. И. Ц. Гохберг, Г. Хайни. Обращение конечных теплицевых матриц, составленных из элементов некоммутативной алгебры. Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., 1974, 19, № 5, 623—664.

5. G. Heinig, K. Rost. Invertierung einiger Klassen von Matrizen und Operatoren I. Wissenschaftliche Inf., 12. TH Karl-Marx-Stadt, 1979.
6. N. Levinson. The Wiener RMS, error criterion in filter design prediction, J. Math and Phys., 25, № 4, 1947, 261—278.
7. А. Б. Нерсисян. Структура резольвент некоторых интегральных операторов, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVII, № 6, 1982, 442—463.
8. В. В. Соболев. К теории диффузии излучения, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, 11, № 5, 1958, 39—50.