ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 2, 1983 Математика

УДК 517.95

Г. Р. АЛЕКСАНДРЯН, К. А. ЯГДЖЯН

УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Пусть $x \in R^n$, $t \in J = [-T, T]$, $T > 0$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ — мультииндекс,

$$P(t; D_t, D_x) = \sum_{l+|\alpha|\leqslant m} a_{l\alpha}(t)\, D_t^l D_x^\alpha, \quad m = 2, \tag{1}$$

а $P_s(t; \tau, \xi) = \sum\limits_{l+|\alpha|=s} a_{l\alpha}(t)\, \tau^l \xi^\alpha$, $\tau \in R^1$, $\xi \in R^n$. Рассмотрим уравнение

$$Pu = f \tag{2}$$

и предположим, что главный символ имеет вид

$$P_m(t; \tau, \xi) = \tau^2 - \mu^2(t) \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(t)\, \xi^\alpha, \tag{3}$$

где форма $\sum\limits_{|\alpha|=2} a_\alpha(t)\, \xi^\alpha$ положительно определена для всех t из J. Нули вещественнозначной функции $\mu(t)$ определяют многообразие вырождения уравнения (2). В основном мы будем изучать (2) в окрестности изолированных нулей этой функции, поэтому без ограничения общности можно далее считать, что $\mu(0) = 0$, $\mu(t) \neq 0$, $t \in J \setminus 0$. Уравнение (2), (3) и его частные случаи изучались и изучаются в работах многих математиков. Даже очень неполный обзор этих работ непозволительно увеличил бы объём настоящей статьи, поэтому мы ссылаемся только на самые последние.

Относительно задачи Коши с начальными условиями

$$D_t^j u|_{t=t_C} = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, \tag{4}$$

на многообразии вырождения $t_C = 0$ известно (см. [1]), что для её корректности даже в очень слабом смысле необходимо выполнение некоторых условий на $P_s(t; 0, \xi)$, $s < m$. А. Б. Нерсесяном в [2] были указаны такие условия на P_s, которые оказались не только достаточными для корректности задачи Коши, но и необходимыми в очень широком классе операторов с вещественными $ia_{0\alpha}(t)$ [3, 4]. Однако при изучении волновых фронтов (WF) решений энергетическим методом возникает необходимость рассмотреть задачу с начальными данными на $t_C \neq 0$ и исследовать гладкость решения вплоть до многообразия вырождения. Достаточные условия корректности подобной задачи Коши, насколько нам известно, кроме задачи для регулярного гиперболического, т. е. $\mu(t)=t$, оператора [5], имеются только в работе О. А. Олейник [6]. Однако, как выясняется, они являются точными только в нулях конечного порядка функции μ и излишне ограничительны в остальных случаях.

В настоящей работе приводятся условия на P_1, являющиеся достаточными для корректности задачи Коши с данными на любой гиперплоскости $t=t_C\in J$. С их помощью доказываются теоремы о распространении сингулярностей и существование конуса зависимости.

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность А. Б. Нерсесяну за ряд стимулирующих бесед, а также В. Я. Иврию, обратившему наше внимание на работу [7].

§ 1. Формулировки теорем

Обозначим через $C_t^m(J; H^s)$ класс функций, осуществляющих вместе со всеми своими производными по t порядка $\leqslant m$, непрерывные отображения $J=[-T, T]$ в $H^s(R_n)$, с нормой

$$\sum_{l=0}^{m} \sup_t \|D_t^l u\|_s, \tag{5}$$

де $\|\cdot\|_s$ — норма соболевского пространства $H^s(R^n)$, а через $E_s(u; t)$ — сумму

$$\sum_{l=0}^{m-1} \|D_t^l u(t)\|^2_{m-1+s-l}, \tag{6}$$

когда она имеет смысл. Конус $\{(t, x)\in J\times R^n \mid |x-x^0|\leqslant\gamma(t^0-t)\}$ с вершиной (x^0, t^0) обозначим через $K_\gamma(x^0, t^0)$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие*

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{Im} P_{m-1}(t;\ 0,\ \xi)=\frac{\mu^2(t)}{\Lambda(t)}\sum b_\alpha(t)\xi^\alpha,\ |\alpha|=m-1,\\ &\operatorname{Re} P_{m-1}(t;\ 0,\ \xi)=\frac{\mu^2(t)\ln\mu(t)}{\Lambda(t)}\sum \tilde b_\alpha(t)\xi^\alpha,\ |\alpha|=m-1, \end{aligned}\right. \tag{LC}$$

и функции $a_{l\alpha}$, a_α, b_α, $\tilde b_\alpha\in C^1(J\setminus 0)$, $a_{l\alpha}\in C(J)$ удовлетворяют при $t\in J\setminus 0$, $|\xi|=1$ неравенствам

$$|(a_{l\alpha})_t|+|(a_\alpha)_t|+|(b_\alpha)_t|+|(\tilde b_\alpha)_t|\leqslant c_1\left|\frac{\mu}{\Lambda}\right|, \tag{7}$$

$$|b_\alpha|+|\tilde b_\alpha|\leqslant c_2,\ c_3\left|\frac{\mu}{\Lambda}\right|\leqslant\left|\frac{\mu_t}{\mu}\right|\leqslant c_4\left|\frac{\mu}{\Lambda}\right|,\ \Lambda(t)=\int_0^t\mu(s)\,ds. \tag{8}$$

Тогда существуют положительные постоянные s_0, c такие, что для любых $t_C\in J$, $f\in C_t^0(J; H^{s+s_0})$, $\varphi_j\in H^{s+s_0-j}(R^n)$, $j=0, 1$, задача (2), (4) *имеет решение $u\in\bigcap_{l=0,1} C_t^l(J; H^{s+m-l})$. Это решение един-*

ственно и удовлетворяет при всех $t \in J$ *энергетическому неравенству*

$$E_s(u;\ t) \leqslant c\left(E_{s+s_0}(u;\ t_C) + \left|\int_t^{t_C} \|f(\tau)\|^2_{s+s_0}\, d\tau\right|\right) \tag{9}$$

и при этом задача (2), (4) имеет обычный конус зависимости, т. е. из $f|K_{\gamma}(x^0, t^0) = 0$, $\varphi_l|K_{\gamma}(x^0, t^0) \cap \{t = t_C\} = 0$ следует $u|K_{\gamma}(x^0, t^0) = 0$, если

$$\gamma^2 \geqslant \max_{t \in J,\ |\xi| = 1} \mu^2(t) \sum_{|\alpha| = 2} a_\alpha(t)\, \xi^\alpha. \tag{10}$$

Замечание. В предположениях теоремы 1 условие (LC) при $c_5\left|\frac{\mu_t}{\mu}\right| \leqslant \left|\frac{\mu_{tt}}{\mu_t}\right| \leqslant c_6\left|\frac{\mu_t}{\mu}\right|$ эквивалентно следующему (см. [8]):

$$\begin{cases} \operatorname{Im} P_{m-1}(t;\ 0,\ \xi) = \mu_t(t) \sum b_\alpha(t)\, \xi^\alpha, & |\alpha| = m-1, \\ \operatorname{Re} P_{m-1}(t;\ 0,\ \xi) = \mu_t(t) \ln \mu(t) \sum \tilde{b}_\alpha(t)\, \xi^\alpha, & |\alpha| = m-1. \end{cases} \tag{LC'}$$

Отметим здесь, что условие (LC) является и необходимым условием корректности задачи Коши в довольно широком классе операторов, описанном в работах [3], [9]. Теорема 1 позволяет решать как задачу с данными на гиперплоскости вырождения $t_C = 0$, так и задачу с данными на $t_C \neq 0$. Это обстоятельство позволяет доказать грубые теоремы о распространении сингулярностей, к изложению которых мы и переходим.

С этой целью предположим, что $a_{l\alpha} \in C^\infty(J)$. Ввиду частичной гипоэллиптичности P мы можем связать с каждым решением $u \in D'(J^0 \times R^n)$, $J^0 = (-T,\ T)$ уравнения (2), где $f \in C^\infty(J \times R^n)$, функцию u^t, определенную на J со значениями в $D'(R^n)$, при помощи следующей формулы:

$$\langle u(t,\ x),\ \chi(t,\ x)\rangle = \int \langle u^t(x),\ \chi(t,\ x)\rangle\, dt,$$

где $\chi \in C_0^\infty(J^0 \times R^n)$ рассматривается как функция из $C_0^\infty(R^n)$, зависящая от параметра $t \in J^0$.

Верно и обратное: если $u^t \in C_t^\infty(J;\ D'(R^n))$ есть решение (2), то оно определяет распределение $u \in D'(J^0 \times R^n)$, которое удовлетворяет уравнению (2).

Обозначим теперь через $\gamma_k(x^0,\ \xi^0) = \{(t,\ x(t);\ \tau(t),\ \xi(t))\,|\,t \in [0,\ T]\}$ максимальные связные нулевые бихарактеристики, начинающиеся в $(0,\ x^0;\ \tau_k(0,\ \xi^0),\ \xi^0)$, т. е. решения гамильтоновой системы, имеющие в нашем случае вид $x(0) = x^0$,

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi^0 \\ \tau(t) = \tau_k(t,\ \xi^0)' \end{cases} \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \tau_k(t,\ \xi^0)}{\partial \xi},\quad k = 1,\ 2. \tag{11}$$

Здесь $\tau_1(t,\ \xi)$, $\tau_2(t,\ \xi)$ — корни уравнения $P_2(t;\ \tau,\ \xi) = 0$.

Поскольку особенности решений мы описываем в терминах WF-волновых фронтов, приведем здесь его определение.

Пусть Ω — область в R^n, а $u \in D'(\Omega)$. Волновой фронт распределения $WF(u)$ есть множество точек из кокасательного расслоения без нулевого сечения $T^*\Omega \setminus 0$, определяемое через дополнение следующим образом.

Определение. Пусть $(x^0, \xi^0) \in T^*\Omega \setminus 0$. Точка $(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$, если существует распределение с компактным носителем v, которое совпадает с u в некоторой окрестности точки x^0, и преобразование Фурье $\hat{v}$ которой быстро убывает в некоторой конической окрестности точки ξ^0, т. е. при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для любого $N > 0 \exists C_N$ и

$$|\hat{v}(\xi)| \leqslant C_N (1 + |\xi|)^{-N} \text{ при } \left| \frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\xi^0}{|\xi^0|} \right| < \varepsilon. \tag{12}$$

Свойства WF подробно изложены в [10].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда волновой фронт решения* $WF(u)$ *задачи* (2), (4) *с* $t_C = 0$ *образован дугами* $\gamma_k(x^0, \xi^0)$, $k = 1, 2$, *где* $(x^0, \xi^0) \in WF(\varphi_0) \cup WF(\varphi_1)$ *из расчета не менее одной бихарактеристики к каждой такой точке.*

В случае $n = 1$, $\mu(t) = t^k$, с коэффициентами, зависящими и от пространственной переменной, эта теорема была доказана С. Алиньяком в [11].

Как показывают примеры (см. § 4), в зависимости от P_{m-1} возможны случаи распространения сингулярностей как по одной бахарактеристике, так и по двум.

Рассмотрим теперь распространение сингулярностей при переходе через многообразие вырождения $t = 0$. Обозначим через $\Gamma_k(x^0, \xi^0) = \{(t, x(t); \tau(t), \xi(t)) | t \in J, x(-T) = x^0\}$ решения системы (11), а через $\tilde{\Gamma}_1(x^0, \xi^0)$ — решение $\xi(t) = \xi^0$,

$$\tau(t) = \begin{cases} \tau_1(t, \xi^0), & t \geqslant 0 \\ \tau_2(t, \xi^0), & t < 0 \end{cases}, \quad x(-T) = x^0, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{cases} -\dfrac{\partial \tau_1(t, \xi^0)}{\partial \xi}, & t \geqslant 0, \\ -\dfrac{\partial \tau_2(t, \xi^0)}{\partial \xi}, & t < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Аналогично определяется $\tilde{\Gamma}_2(x^0, \xi^0)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда волновой фронт решения* $WF(u)$ *задачи* (2), (4) *с* $t_C = -T$ *образован дугами* $\Gamma_k(x^0, \xi^0)$, $\tilde{\Gamma}_k(x^0, \xi^0)$, *где* $k = 1, 2$, $(x^0, \xi^0) \in WF(\varphi_0) \cup WF(\varphi_1)$.

Таким образом, согласно теореме 3, особенность не только доходит до гиперплоскости $t = 0$, но и обязательно распространяется в область $t > 0$, и при этом может иметь место ветвление сингулярностей, отмеченное в работе В. Я. Иврия [12]. В [7] для уравнения с $\mu(t) = t^l$, $n = 1$, и с данными на $t_C = -1$ был построен параметрикс задачи Коши с направленным распространением WF, и это позволило описать $WF(u)$. Наше доказательство теорем 2 и 3 основано на энергетическом методе, что позволило охватить более широкий класс уравнений, в частности $n \geqslant 1$, а $\mu(t)$ может иметь в $t = 0$ нуль бесконечного порядка, например,

$$u_{tt} - A^2 \exp(-2|t|^{-l}) u_{xx} +$$

$$+ (B + i\tilde{B}|t|^{-r}) |t|^{-l-1} \exp(-|t|^{-l}) u_x = f \tag{14}$$

(A, B, $\tilde{B}$ — вещественные, а $r \leqslant l > 0$), за счет потери части получаемой информации.

При доказательстве теоремы 1 используются идеи работы [3], а доказательство теоремы 2 в основном следует схеме работы [11], с той существенной разницей, что в случае многих пространственных переменных мы воспользовались оценкой образа Фурье решения.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 мы проведем для класса псевдодифференциальных (п. д.) уравнений. Для уравнения второго порядка это обобщение на наш взгляд несущественно, но, с другой стороны, оно позволяет доказать корректность и для уравнений высокого порядка с двукратными характеристиками, при факторизации которых п. д. операторы возникают по существу.

Будем обозначать через $\hat{v}(t, \xi)$ частичное преобразование Фурье функции $v(t, x)$.

Рассмотрим оператор

$$L[u] = u_{tt} + b_{1.0} u_t + b_{0.0} u + b_{1.-1} u_t + b_{0.-1} u + b_{0.-2} u, \tag{15}$$

где $b_{i,j}(t)$ — псевдодифференциальные операторы (п.д.о.) с символами $b_{i,j}(t) \in S^{2-i+j}(R^n)$, зависящими от параметра t достаточно гладким образом. Предположим, что для всех s_1, $s_2 \in [0, T]$, $u \in C_t^2([0, T]; C_0^\infty(R^n))$ имеет место

$$|\hat{u}(s_1, \xi)|^2 + |\hat{u}_t(s_1, \xi)|^2 \leqslant c(1+|\xi|)^k \{|\hat{u}(s_2, \xi)|^2 +$$

$$+ |\hat{u}_t(s_2, \xi)|^2 + |\int_{s_1}^{s_2} |\widehat{L[u]}(t, \xi)|^2 dt| \}. \tag{16}$$

Выберем $\omega(t, \xi)$ так, чтобы

$$\omega_{tt}(t, \xi) + b_{1.-1}(t, \xi)\,\omega_t(t, \xi) + b_{0.-2}(t, \xi)\,\omega(t, \xi) \in S^{-k-1}, \tag{17}$$

$$\omega(0, \xi) - 1 \in S^{-k-1}, \quad \omega_t(0, \xi) \in S^{-k-1}. \tag{18}$$

Для этого предположим, что $b_{1,-1}$, $b_{0,-2}$ — классические символы, т. е. при больших $|\xi|$ имеет место асимптотическое разложение

$$b_{1,-1} \sim \sum_{k<0} b_{1,-1}^k, \quad b_{0,-2} \sim \sum_{k<0} b_{0,-2}^k, \tag{19}$$

где $b_{1,-1}^k$, $b_{0,-2}^k$ — однородные символы. Функцию $\omega(t, \xi)$ будем искать в виде

$$\omega(t, \xi) = \sum_{l=0}^{-k-1} \omega^l(t, \xi), \tag{20}$$

где ω_0 выбирается как решение задачи Коши

$$\omega^0_{tt}(t, \xi) + b^0_{1,-1}(t, \xi)\,\omega^0_t(t, \xi) + b^0_{0,-2}(t, \xi)\,\omega^0(t, \xi) = 0, \tag{21}$$

$$\omega^0(0, \xi) = 1,\ \omega^0_t(0, \xi) = 0, \tag{22}$$

а остальные рекуррентным образом:

$$\omega^i_{tt} + b^0_{1,-1}\,\omega^i_t + b^0_{0,-2}\,\omega^i = -b^1_{1,-1}\,\omega^{i+1}_t - b^1_{0,-2}\,\omega^{i+1} - \cdots, \tag{23}$$

$$\omega^i(0, \xi) = 0,\ \omega^i_t(0, \xi) = 0,\ i = -1, -2, \cdots, -k, \tag{24}$$

где многоточием обозначены слагаемые, содержащие $\omega^0, \omega^{-1}, \cdots, \omega^{i+1}$.

Очевидно, что ω^i однородные по ξ. Пусть Ω — оператор с символом $\omega(t, \xi)$, а Ω^{-1} — с символом $\omega^{-1}(t, \xi)$. Если $u = \Omega v$, то

$$|\omega(s_1, \xi)\hat{v}(s_1, \xi)|^2 + |(\omega_t\hat{v} + \omega\hat{v}_t)(s_1, \xi)|^2 \leqslant c\,(1 + |\xi|)^k \{|\omega(s_2, \xi)\,v(s_2, \xi)|^2 +$$

$$+ |(\omega_t\hat{v} + \omega\hat{v}_t)(s_2, \xi)|^2 + |\int_{s_1}^{s_2} |\widehat{L[\Omega v]}(t, \xi)|^2 dt|\}. \tag{25}$$

Но

$$\widehat{L[\Omega v]}(t, \xi) = \omega(t, \xi)\,\hat{v}_{tt}(t, \xi) + (b_{1,0}(t, \xi)\,\omega(t, \xi) + 2\omega_t(t, \xi) +$$

$$+ b_{1,-1}(t, \xi)\,\omega(t, \xi))\,\hat{v}_t(t, \xi) + (b_{1,0}(t, \xi)\,\omega_t(t, \xi) + b_{0,0}(t, \xi)\,\omega(t, \xi) +$$

$$+ b_{0,-1}(t, \xi)\,\omega(t, \xi) + r(t, \xi))\,\hat{v}(t, \xi),\ r \in S^{-k-1}. \tag{26}$$

Поэтому

$$|\widehat{L[\Omega v]}(t, \xi)|^2 \leqslant c\,|\widehat{L_1[v]}(t, \xi)|^2 + c\,(1 + |\xi|)^{-k-1}\,|\hat{v}(t, \xi)|^2, \tag{27}$$

где

$$L_1[v] = v_{tt} + (b_{1,0} + 2\Omega^{-1}\Omega_t + b_{1,-1})\,v_t + (b_{1,0}\,\Omega^{-1}\Omega_t + b_{0,0} + b_{0,-1})\,v. \tag{28}$$

С другой стороны, нетрудно проверить, что

$$c^{-1}|\hat{v}(t, \xi)| \leqslant |\omega(t, \xi)\,\hat{v}(t, \xi)| \leqslant c|\hat{v}(t, \xi)|, \tag{29}$$

$$|\hat{v}_t(t, \xi)|^2 \leqslant c\,(|\omega(t, \xi)\,\hat{v}_t(t, \xi) + \omega_t(t, \xi)\,\hat{v}(t, \xi)|^2 + |\omega_t(t, \xi)\,\hat{v}(t, \xi)|^2). \tag{30}$$

Но из (16) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется T такое, что при всех $t \in [0, T]$ и всех $|\xi|$

$$|\omega_t(t, \xi)| \leqslant \varepsilon + c\,(1 + |\xi|)^{-k-1}. \tag{31}$$

Таким образом, для достаточно больших $|\xi|$

$$|\hat{v}(t, \xi)|^2 + |\hat{v}_t(t, \xi)|^2 \leqslant c\,(|\omega(t, \xi)\,\hat{v}(t, \xi)|^2 + |(\omega\hat{v}_t + \omega_t\hat{v})(t, \xi)|^2). \tag{32}$$

Далее

$$|\hat{v}(s_1, \xi)|^2 + |\hat{v}_t(s_1, \xi)|^2 \leqslant c|\int_{s_1}^{s_2} |\hat{v}(t, \xi)|^2 dt| + c\,(1 + |\xi|)^k \times$$

$$\times \left\{ |\hat{v}(s_2, \xi)|^2 + |\hat{v}_t(s_2, \xi)|^2 + \left| \int_{s_2}^{s_1} |\widehat{L_1[v]}(t, \xi)|^2 dt \right| \right\}, \tag{33}$$

откуда без труда получаем

$$|\hat{v}(s_1, \xi)|^2 + |\hat{v}_t(s_1, \xi)|^2 \leqslant c(1+|\xi|)^k \left[|\hat{v}(s_2, \xi)|^2 + |\hat{v}_t(s_2, \xi)|^2 + \right.$$

$$\left. + \left| \int_{s_1}^{s_2} |\widehat{L_1[v]}(t, \xi)|^2 dt \right| \right] \tag{34}$$

для всех s_1, $s_2 \in [0, T]$.

Покажем теперь, что если для оператора L_1 имеет место (34), то для L будет иметь место (16).

Действительно

$$L_1[\Omega^{-1} u] = \Omega^{-1} L[u] + ru, \quad r \in S^{-k-1}. \tag{35}$$

С другой стороны, w_t удовлетворяет (31). Неравенство (16) выводится из (34) точно так же, как (34) выводилось из (16).

Таким образом, нами доказано

Предложение 1. *Неравенство* (16) *для оператора* L *и неравенство* (34) *для оператора* L_1 *имеют место одновременно.*

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - i\mu(\lambda_1 + \lambda_2) u_t - \mu^2 \lambda_1 \lambda_2 u + i \frac{\mu^2}{\Lambda} b_{0,-1} u +$$

$$+ \frac{\mu^2 \ln \mu}{\Lambda} \tilde{b}_{0,-1} u + b_{1,-1} u_t = f, \tag{36}$$

где λ_1, λ_2, $b_{0,-1}$, $\tilde{b}_{0,-1}$ — вещественные символы первого порядка, и $\lambda_1(t, \xi) \neq \lambda_2(t, \xi)$ при $t \in J$, $\xi \neq 0$. Обозначим $|u(t, \xi)|^2 + |u_t(t, \xi)|^2$ через $E(t, \xi)$.

Предложение 2. *Существуют положительные постоянные* M, C *и* k *такие, что для всех* s_1, $s_2 \in [0, T]$, $|\xi| > M$ *решение* (36) *удовлетворяет неравенству*

$$E(s_1, \xi) \leqslant c(1+|\xi|)^k \left(E(s_2, \xi) + \left| \int_{s_1}^{s_2} |f(t, \xi)|^2 dt \right| \right). \tag{37}$$

Доказательство. Обозначим через t_1 точку, определяемую равенством $|\xi|^2 \mu(t_1) = 1$. Докажем (37) с $k=0$ для всех s_1, $s_2 \in [0, t_1]$. Действительно

$$\frac{dE}{dt} = 2\,\mathrm{Re}(u\bar{u}_t) + 2\,\mathrm{Re}(\bar{u}_t f) - 2\,\mathrm{Re}(|u_t|^2 b_{1,-1}) +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\left(\bar{u}_t u \left[\mu^2 \lambda_1 \lambda_2 - i \frac{\mu^2}{\Lambda} b_{0,-1} - \frac{\mu^2 \ln \mu}{\Lambda} \tilde{b}_{0,-1} \right] \right), \tag{38}$$

следовательно

$$\left|\frac{dE}{dt}\right| \leqslant c\,(1-\mu_t(t)\,|\xi|\ln\mu(t))\,E+|f|^2. \tag{39}$$

Принимая во внимание, что

$$\int_{s_1}^{s_2}\mu_t(t)\ln\mu(t)\,dt \geqslant 2\,\mu(t_1)\ln\mu(t_1), \tag{40}$$

получаем требуемое.

Рассмотрим теперь промежуток $[t_1, t_\xi]$, где t_ξ — точка, определяемая условием

$$N|\xi|\,\Lambda(t_\xi) = -\ln\mu(t_\xi),\quad N=\text{const}. \tag{41}$$

Из равенства

$$\mu(t_1)=\frac{1}{|\xi|^2}=\frac{\Lambda^2(t_\xi)}{N^2\ln^2\mu(t_\xi)} \tag{42}$$

следует, что при больших $|\xi|$ имеет место $t_1 < t_\xi$.

Перейдем к новой неизвестной вектор-функции

$$v_1=u,\quad v_2=u_t-i\mu\lambda_1 u. \tag{43}$$

Для энергии

$$E_2(t,\xi)=|v_2|^2-|\xi|\,\frac{\mu^2(t)\ln\mu(t)}{\Lambda(t)}\,|v_1|^2 \tag{44}$$

нетрудно получить

$$\frac{dE_2}{dt}=-\left(2\frac{\mu_t}{\mu}-\frac{\mu}{\Lambda}+\frac{\mu_t}{\mu\ln\mu}\right)\frac{\mu^2\ln\mu}{\Lambda}|v_1|^2+2\,\mathrm{Re}\,(v_2 f)-$$

$$-|\xi|\,\frac{\mu^2\ln\mu}{\Lambda}\,2\,\mathrm{Re}\,(\bar v_1 v_2)-2\,\mathrm{Re}\,b_{1,-1}\,|v_2|^2-$$

$$-2\,\mathrm{Re}\left(\bar v_2 v_1\left[\,i\mu\lambda_1 b_{1,-1}+i\frac{\mu^2}{\Lambda}b_{0,-1}+i\frac{\mu^2\ln\mu}{\Lambda}\bar b_{0,-1}\right]\right)-$$

$$-2\,\mathrm{Re}\,(\bar v_2 v_1\,[i\mu_t\lambda_1+i\mu(\lambda_1)_t]). \tag{45}$$

Поэтому

$$\left|\frac{dE_2}{dt}\right|\leqslant c\left(1+\sqrt{\frac{\mu^2|\ln\mu|}{\Lambda}|\xi|}+\frac{\mu_t}{\mu}\right)E_2+|f|^2. \tag{46}$$

Как следует из условий теоремы

$$\int_0^t\sqrt{\frac{\mu^2|\ln\mu|}{\Lambda}}\,ds\leqslant c_1\left(\sqrt{\frac{|\ln\mu|}{\Lambda}}\right)^{-1}\ln\left(\frac{|\ln\mu|}{\Lambda}\right),\quad t\leqslant t_\xi. \tag{47}$$

Поэтому

$$E_2(s_1,\xi)\leqslant c\,(1+|\xi|)^k\left(E_2(s_2,\xi)+\left|\int_{s_1}^{s_2}|f(t,\xi)|^2\,dt\right|\right) \tag{48}$$

для всех $s_1, s_2 \in [t_1, t_\xi]$. С другой стороны

$$c^{-1}(1+|\xi|)^{-2}E_2(t, \xi) \leqslant |u|^2 + |u_t|^2 \leqslant c(1+|\xi|)^4 E_2(t, \xi). \qquad (49)$$

Вместе с (48) это доказывает (37) для таких s_1, s_2.

Рассмотрим теперь интервал $[t_\xi, T]$. Введем вектор ${}^t(u_1, u_2) = {}^t(u, u_t)$, и перепишем (36) в виде системы

$$\frac{du}{dt} = (A+B)u + F, \quad \text{где} \quad F = {}^t(0, f), \qquad (50)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & , & 1 \\ \mu^2\lambda_1\lambda_2 - \dfrac{\mu^2 \ln\mu}{\Lambda}\bar{b}_{0,-1}, & & i\mu(\lambda_1+\lambda_2) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & , & 0 \\ i\dfrac{\mu^2}{\Lambda}b_{0,-1}, & & -b_{1,-1} \end{pmatrix}, \qquad (51)$$

Обозначим через Δ_1 и Δ_2 собственные значения матрицы A. Тогда

$$\operatorname{Re}\Delta_i = 0, \ |\Delta_2 - \Delta_1| > \delta\mu|\xi| > \delta_1 > 0, \ |\Delta_i| \leqslant c(1+|\xi|), \qquad (52)$$

$$\left|\frac{(\Delta_i)_t}{\Delta_2-\Delta_1}\right| \leqslant c\frac{\mu_t}{\mu}, \ |\Delta_i| \leqslant c(\mu|\xi| + \sqrt{\mu_t|\ln\mu||\xi|}), \quad i = 1, 2. \qquad (53)$$

Обозначим через N диагонализатор матрицы A:

$$N = \frac{1}{\Delta_2 - \Delta_1}\begin{pmatrix} \Delta_2, & -1 \\ -\Delta_1, & 1 \end{pmatrix}, \ N^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ \Delta_1, & \Delta_2 \end{pmatrix}. \qquad (54)$$

Тогда

$$\frac{dv}{dt} = -N\frac{dN^{-1}}{dt}v + NAN^{-1}v + NBN^{-1}v + NF, \qquad (55)$$

где $v = Nu$. Поэтому для $E_3 = |v_1|^2 + |v_2|^2$ получаем

$$\frac{dE_3}{dt} = 2\operatorname{Re}\left(\bar{v}, -N\frac{dN^{-1}}{dt}v + NAN^{-1}v + NBN^{-1}v + NF\right), \qquad (56)$$

откуда

$$\left|\frac{dE_3}{dt}\right| \leqslant c\left(1 + \frac{\mu_t}{\mu}\right)E_3 + |f|^2. \qquad (57)$$

Учитывая еще и $\|N\| \leqslant \text{const}$, $\|N^{-1}\| \leqslant \text{const}(1+|\xi|)$, выводим (37). Предложение 2 доказано.

Доказательство теоремы 1. В уравнении (2) осуществим преобразование Фурье по x. В каждой из областей $J_+ = [0, T]$, $J_- = [-T, 0]$ при $|\xi|$ достаточно больших имеет место (37) согласно предложениям 1, 2, а при $|\xi| \leqslant \text{const}$ (37) очевидно. Осуществив обратное преобразование Фурье, получим искомое решение и оценку (9). Существование и единственность следуют из теорем существования и единственонсти задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Осталось доказать существование конуса зависимости. Очевидно, что это достаточно сделать для $t_0 = 0$. Итак, пусть $f|_{K_\gamma(x^0, t^0)} = 0$, $\varphi_i|_{K_\gamma(x^0, t^0) \cap \{t=0\}} = 0$. Будем считать пока, что $\varphi_i \in C^\infty(R^n)$ и при всех $t \in J_+$, $f(t) \in C^\infty(R^n)$. Продолжим f на $J \times R^n$ так, чтобы она равнялась нулю в конусе $K_\gamma(x^0, t^0)$ и оставалась бесконечно гладкой по x. Решим задачу Коши с данными на $t=0$ в области $J_- \times R^n$. Тем самым мы продолжим наше первоначальное решение $u(t, x)$ на область $J \times R^n$. Обозначим это продолжение снова через $u(t, x)$. Рассмотрим теперь семейство операторов $\{P_\varepsilon(t, D_t, D_x) = P(t+\varepsilon, D_t, D_x)\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ и семейство задач Коши

$$P_\varepsilon v_\varepsilon = f, \quad t > 0, \tag{58}$$

$$D_t^i v_\varepsilon = \varphi_i, \quad i = 0,1, \quad t = 0. \tag{59}$$

Очевидно, что $v_\varepsilon|_{K_T(x^0, t^0) \cap \{t>0\}} = 0$. Продолжим v_ε на область $[-\varepsilon, 0] \times R^n$. Тогда согласно энергетическому неравенству

$$E_s(v_\varepsilon; t) \leqslant c\left(\|\varphi_0\|^2_{s+s_0} + \|\varphi_1\|^2_{s+s_0} + \int\limits_{-T}^{t} \|f(\tau)\|^2_{s+s_0}\, d\tau\right), \tag{60}$$

где c и s_0 от ε не зависят. Далее

$$P_{\varepsilon_1}(v_{\varepsilon_1} - v_{\varepsilon_2}) = (P_{\varepsilon_2} - P_{\varepsilon_1})\, v_{\varepsilon_2}, \tag{61}$$

$$D_t^i (v_{\varepsilon_1} - v_{\varepsilon_2}) = 0, \quad i = 0,1, \quad t = 0, \tag{62}$$

поэтому

$$E_s(v_{\varepsilon_1} - v_{\varepsilon_2}, t) \leqslant c \int\limits_0^t \|(P_{\varepsilon_2} - P_{\varepsilon_1})\, v_{\varepsilon_2}(\tau)\|^2_{s+s_0}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \cdot \sup_{t, i, \alpha} |a_{i\alpha}(\varepsilon_1 + t) - a_{i\alpha}(\varepsilon_2 + t)|, \tag{63}$$

где постоянная не зависит от ε. Таким образом, $\{v_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ — фундаментальная последовательность в $C_t^2(J_+; H^s)$. В силу теоремы единственности $u = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon$ и, следовательно, $u|_{K_T(x^0, t^0)} = 0$. Если теперь $\varphi_i \in H^{s+s_0-i}$, $f \in C_t^0(J; H^{s+s_0})$, то достаточно провести осреднение по x. Теорема доказана.

Замечание. Приведенное доказательство существования конуса зависимости проходит и в случае зависящих от x коэффициентов использовинием результатов работы [6], однако, как уже отмечалось во введении, при несколько более жестких ограничениях на P_1.

§ 3. Доказательства теорем 2 и 3

Доказательства теорем разобьем на две части, а именно: а) на доказательство того, что если $(x^0, 0; \xi^0, 0) \in WF(u)$, то $(x^0, \xi^0) \in WF(\varphi_0) \cap WF(\varphi_1)$; в) если $(x^0, \xi^0) \in WF(\varphi_0) \cup WF(\varphi_1)$, то хотя бы одна нулевая бихарактеристика, кончающаяся в точке $(x^0, 0; \xi^0, 0)$, принадлежит $WF(u)$.

Доказательство а). В силу локальной единственности задачи Коши можно считать, что решение $u(t, x)$ имеет компактный носитель, сосредоточенный в достаточно малой окрестности точки $(x^0, 0)$. Далее, $WF(u)$ лежит в char P, поэтому если точка (x, t) близка к $(x^0, 0)$, то для точек WF мало и $\left|\frac{\tau}{|\xi|}\right|$. Обозначим это коническое множество через Γ, а через Γ_1 — конус, являющийся частью конуса Γ и содержащий $(\xi^0, 0)$. Условимся одинаково обозначать конические множества как в кокасательном расслоении, так и в слое, когда это не может привести к путанице. Пусть A—п.д.о. с символом, тождественно равным 1 в Γ_1 и равным 0 вне „большего" конуса $\tilde{\Gamma}_1$. Очевидно, что $PAu = APu + [P, A]u$, поэтому $WF(g) \cap \Gamma_1 = \varnothing$, где $g = PAu$. Покажем, что либо $(Au)|_{t=0}$, либо $(Au)_t|_{t=0}$ имеют точку из WF, принадлежащую $\Gamma_1' = \Gamma_1 \cap \{t=0\}$.

Введем обозначение $\omega = Au$, $\omega(t, \xi)$, $g(t, \xi)$— частичное преобразование Фурье функций $\omega(t, x)$, $g(t, x)$ по пространственным переменным x. Имеем $P\omega = g$. Тогда, согласно предложению 2, для всех $s_1, s_2 \in [0, T]$ имеет место

$$|\omega(s_1, \xi)|^2 + |\omega_t(s_1, \xi)|^2 \leqslant c(1+|\xi|)^k \Big\{|\omega(s_2, \xi)|^2 + \\ + |\omega_t(s_2, \xi)|^2 + \Big|\int_{s_1}^{s_2} |g(t, \xi)|^2\, dt\Big|\Big\}. \tag{64}$$

Предположим, что ни $\omega(0, x)$, ни $\omega_t(0, x)$ не имеют точек волнового фронта в Γ_1'. Тогда в Γ_1' $\omega(0, \xi)$ и $\omega_t(0, \xi)$ быстро убывают по ξ. С другой стороны, $g(t, x)$ не имеет точек волнового фронта в Γ_1, и, следовательно, $g(t, \xi)$ быстро убывает в Γ_1'.

В силу (64) в Γ_1' нет точек волнового фронта и у $\omega(t, x)|_{t=t'}$ для всех t' из $[0, t^*]$, если t^* мало. Поэтому для любого натурального i верно

$$(x^0, \xi^0) \overline{\in} WF(D_t^i \omega|_{t=t'}), \ \forall t' \in [0, t^*]. \tag{65}$$

Известно (см., например, [13]), что если $\omega \in C_t^\infty(J; D'(R^n))$ и выполнено (65), то $(x, t, \xi; \tau) \overline{\in} WF(\omega)$ для любого τ и при $(x, t; \xi)$ близких к $(x^0, 0; \xi^0)$. В частности $(x^0, 0; \xi^0, 0) \in WF(\omega) = WF(Au)$, но в конической окрестности Γ этой точки волновые фронты u и Au совпадают, следовательно, $(x^0, 0; \xi^0, 0) \overline{\in} WF(u)$, чего не может быть по предположению. Полученное противоречие говорит о том, что либо $\omega(0, x)$ либо $\omega_t(0, x)$ имеют точку волнового фронта в Γ_1'. Пусть, например, $WF(\omega(0, x)) = WF(Au|_{t=0})$ содержит точку $(\bar{x}, \bar{\xi}) \in \Gamma_1'$. Очевидно, что

$$(Au)|_{t=0} = u|_{t=0} - ((1-A)u)|_{t=0}. \tag{66}$$

Но $(\bar{x}, \bar{\xi}) \overline{\in} WF((1-A)u|_{t=0})$, так как в противном случае существовало бы $\tilde{\tau}$ такое, что $(\tilde{x}, 0; \tilde{\xi}, \tilde{\tau}) \in WF((1-A)u)$, чего быть не может. Следовательно, $(\bar{x}, \bar{\xi}) \in WF(u|_{t=0}) = WF(\varphi_0)$. Проводя эти рассуждения для все сужающегося носителя решения u и сужающегося конуса Γ, из замкнутости волнового фронта получим, что $(x^0, \xi^0) \in WF(\varphi_0)$, что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается случай, когда $WF(\omega_t(0, x)) = WF((Au)_t|_{t=0})$ содержит точку $(\bar{x}, \tilde{\xi}) \in \Gamma_1'$.

Этим завершается доказательство а).

Доказательство в). Итак, пусть $(x^0, \xi^0) \in WF(\varphi_0) \cup WF(\varphi_1)$. Надо показать, что $WF(u)$ принадлежит хотя бы одна из двух нулевых бихарактеристик, начинающихся в $(x^0, 0; \xi^0, 0)$.

Можно считать, что носители функций φ_0, φ_1, f компактны по x. Для любого $t_n > 0$ найдется x_n^* такая, что $(x_n^*, \xi^0) \in WF(u(t_n)) \cup \cup WF(u_t(t_n))$. Действительно, в противном случае нашлась бы коническая окрестность Γ точки ξ^0 такая, что в ней для любого N

$$|\hat{u}(t, \xi)| + |\hat{u}_t(t, \xi)| \leqslant C_N (1 + |\xi|)^{-N}.$$

В силу предложения 2, это означало бы, что $(x^0, \xi^0) \bar{\in} WF(\varphi_0) \cup WF(\varphi_1)$. Таким образом, найдется бихарактеристика γ_n, проходящая при $t = t_n$ через $(x_n^*; \xi^0)$ и целиком принадлежащая $WF(u)$. Остается показать, что для некоторой подпоследовательности γ_{nk} точки $y_k = \pi_x(\gamma_{n_k} \cap \{t=0\})$ сходится к x^0 при $k \to \infty$. В противном случае, все они лежали бы вне некоторого шара с центром в x^0. Тогда при достаточно малых t u и u_t не могли бы иметь точек волнового фронта с $\xi = \xi^0$, а в силу предложения 2 и конечности скорости распространения, это же было бы верно и для φ_0, φ_1. Таким образом, бихарактеристики γ_{n_k} сгущаются, а в силу замкнутости волнового фронта и предельная бихарактеристика, начинающаяся в точке $(0, x^0; \xi^0, 0)$, будет целиком принадлежать $WF(u)$.

Этим завершается доказательство в), а также доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 сводится к последовательному применению а) и в) в областях $t \leqslant 0$ и $t \geqslant 0$ соответственно.

§ 4. Примеры

Теоремы 2, 3 не дают полного ответа на вопрос о том каков в точности волновой фронт решения.

Покажем на примерах некоторых задач Коши, что волновой фронт решения может распространяться как по одной, так и по двум бихарактеристикам в зависимости от начальных данных и коэффициентов уравнения.

1. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_{tt} - t^{2k} u_{xx} - a t^{k-1} u_x = 0, \quad a = \text{const}, \tag{68}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{69}$$

Используя известные формулы для решения этой задачи (см., например, [14], стр. 180) можно показать, что решение записывается в виде

$$u(x, t) =$$

$$= \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)} t \iint e^{i\xi\left(x - z + \frac{t^{k+1}}{k+1}\right)} H_+(1-\alpha, 2-\alpha-\beta, \tilde{z}) \psi(z)\, dz d\xi +$$

$$+\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}t\iint e^{i\xi\left(x-z-\frac{t^{k+1}}{k+1}\right)}H_-(1-\alpha,2-\alpha-\beta,\tilde z)\psi(z)\,dzd\xi+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}\iint e^{i\xi\left(x-z+\frac{t^{k+1}}{k+1}\right)}H_+(\beta,\alpha+\beta,\tilde z)\varphi(z)\,dzd\xi+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}\iint e^{i\xi\left(x-z-\frac{t^{k+1}}{k+1}\right)}H_-(\beta,\alpha+\beta,\tilde z)\varphi(z)\,dzd\xi, \tag{70}$$

где

$$\alpha=\frac{k-a}{2(k+1)},\quad \beta=\frac{k+a}{2(k+1)},\quad \tilde z=2i\xi\frac{t^{k+1}}{k+1}, \tag{71}$$

$$H_+(\alpha,\gamma,z)=\frac{e^{i\pi(\gamma-\alpha)}}{e^{i\pi(\gamma-\alpha)}-e^{-i\pi(\gamma-\alpha)}}\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\times$$

$$\times z^{\alpha-\gamma}\int\limits_{\infty}^{(0+)}e^{-\xi}\xi^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{\xi}{z}\right)^{\alpha-1}d\xi, \tag{72}$$

$$H_-(\alpha,\gamma,z)=\frac{1}{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}\times\frac{1}{\Gamma(\alpha)}z^{-\alpha}\times$$

$$\times\int\limits_{\infty}^{(0+)}e^{-\xi}\xi^{\alpha-1}\left(1+\frac{\xi}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}d\xi\quad (0<\arg z<\pi). \tag{73}$$

Асимптотическое поведение функций $H_+(\alpha,\gamma,z)$ и $H_-(\alpha,\gamma,z)$ хорошо известно:

$$H_+(\alpha,\gamma,z)\sim z^{\alpha-\gamma}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha)_k(1-\alpha)_k}{k!}z^{-k}\right], \tag{74}$$

$$H_-(\alpha,\gamma,z)\sim(e^{-i\pi}z)^{\alpha}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(\alpha)_k(1+\alpha-\gamma)_k}{k!}z^{-k}\right], \tag{75}$$

при $|z|\to\infty$, где $(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$, $0<\arg z<\pi$.

Из (71)—(75) нетрудно увидеть, что для функций H_+ и H_- выполнены следующие оценки:

$$|\partial_t^l\partial_\xi^m H_+(1-\alpha,2-\alpha-\beta,\tilde z)|\leqslant C_{\alpha,\beta,k,l,m}(|t^{k+1}\xi|)^{\beta-1}(1+|\xi|)^{\frac{l}{k+1}-m} \tag{76}$$

$$|\partial_t^l\partial_\xi^m H_-(1-\alpha;2-\alpha-\beta,\tilde z)|\leqslant C_{\alpha,\beta,k,l,m}(|t^{k+1}\xi|)^{\alpha-1}(1+|\xi|)^{\frac{l}{k+1}-m}, \tag{77}$$

при $|t^{k+1}\xi|\geqslant1$, т. е. при $t>t_\xi$ в обозначениях § 2.

Из этих оценок видно, что H_+ и H_- в (70) принадлежат классам Хёрмандера

$$H_+\left(1-\alpha,2-\alpha-\beta,2i\frac{t^{k+1}}{k+1}\xi\right)\in S^{\beta-1}_{1,\frac{1}{k+1}}, \tag{78}$$

$$H_-\left(1-\alpha,\ 2-\alpha-\beta,\ 2i\,\frac{t^{k+1}}{k+1}\,\xi\right)\in S^{\alpha-1}_{1,\frac{1}{k+1}},\tag{79}$$

$$H_+\left(\beta,\ \alpha+\beta,\ 2i\,\frac{t^{k+1}}{k+1}\,\xi\right)\in S^{-\alpha}_{1,\frac{1}{k+1}},\tag{80}$$

$$H_-\left(\beta,\ \alpha+\beta,\ 2i\,\frac{t^{k+1}}{k+1}\,\xi\right)\in S^{-\beta}_{1,\frac{1}{k+1}}.\tag{81}$$

Из (78)—(81) следует, что каждый интеграл в (70) есть интегральный оператор Фурье (ИОФ). Заметим, что H_+ и H_- допускают аналитическое продолжение на любые значения α и β, только так, чтобы $\alpha+\beta$, $2-\alpha-\beta$ не были целыми, и так как ни при каких α, β из (71) указанные выражения не могут быть целыми, то H_+ и H_- продолжаются на любые α, β. Можно показать, что (70) с продолженными H_+ и H_- продолжает оставаться решением задачи (68), (69).

Из (74), (75) видно, что все амплитудные функции в (70)—эллиптические символы.

Вспомним, что Г-функция имеет полюсы в точках $-n$, $n=0, +1,\cdots$. Поэтому легко заметить что:

а) если $\{(x^0, \xi^0)\}=WF(\varphi)\cap WF(\psi)$, то волновой фронт решения задачи (68), (69) содержит обе бихарактеристики, начинающиеся в (x^0, ξ^0), т. е. распространение сингулярностей происходит по обеим бихарактеристикам;

в) если либо $\varphi\in C^\infty$ в окрестности x_0, и $a=2n(k+1)+k+2$, либо $\psi\in C^\infty$ в окрестности x^0, и $a=2n(k+1)+k$, а $\{(x^0, \xi^0)\}=WF(\varphi)\cup \cup WF(\psi)$, то волновой фронт решения содержит бихарактеристику $\left(t, x^0-\dfrac{t^{k+1}}{k+1};\ t^k\xi^0, \xi^0\right)$ и сингулярность распространяется по характеристике $x=x^0-\dfrac{t^{k+1}}{k+1}$.

с) если либо $\varphi\in C^\infty$ в окрестности x^0 и $a=-[2n(k+1)+k+2]$, либо $\psi\in C^\infty$ в окрестности x^0 и $a=-[2n(k+1)+k]$, а $(x^0, \xi^0)\in \in WF(\varphi)\cup WF(\psi)$, то волновой фронт содержит бихарактеристику $\left(t,\ x^0+\dfrac{t^{k+1}}{k+1},\ -t^k\xi^0,\ +\xi^0\right)$, и сингулярность распространяется по характеристике $x=x^0+\dfrac{t^{k+1}}{k+1}$.

Параметрикс и распространение особенностей решения уравнения (68) с данными на гиперплоскости $t_C=-1$ приведены в работе К. Танигучи и И. Тозаки [7].

II. Наконец нам хочется остановиться на примере уравнения

$$u_{tt}-A^2l^2t^{-2(l+1)}\exp(-2|t|^{-l})\,u_{xx}+l\,(l\,|t|^{-l}-(l+1))\,|t|^{-l-2}\times$$

$$\times\exp(-2|t|^{-l})(B+\tilde{B}\,|t|^{-r})\,u_x=f,\quad l>0,\tag{82}$$

где A, В, $\tilde{B}$—вещественные. Согласно теореме 1 если $r\leqslant l$, то задача (82), (4) корректна для любого $t_C\in[-1, 1]$. Далее

$$\Gamma_1(x^0, \xi^0) = \{(t, x^0 - A\xi^0 [\exp(-|t|^{-l}) - e^{-1}];\ A\xi^0 |t|^{-l-1} \exp(-|t|^{-l}), \xi^0)|,\ t \in [-1, 1]\}, \tag{83}$$

$$\Gamma_2(x_0, \xi^0) = \{(t, x^0 + A\xi^0 [\exp(-|t|^{-l}) - e^{-1}];\ A\xi^0 |t|^{-l-1} \exp(-|t|^{-l}), \xi^0)|,\ t \in [-1, 1]\}, \tag{84}$$

$$\gamma_1(x^0, \xi^0) = \Gamma_1(x^0 - A\xi^0 e^{-1}, \xi^0) \cap \{t \geqslant 0\},\ \gamma_2(x^0, \xi^0) = \Gamma_2(x^0 + A\xi^0 e^{-1}, \xi^0) \cap \{t \geqslant 0\}, \tag{85}$$

$$\tilde{\Gamma}_1(x^0, \xi^0) = \begin{cases} \Gamma_1(x^0, \xi^0), & t \leqslant 0, \\ \Gamma_2(x_0 + A\xi^0 e^{-1}, \xi^0), & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{86}$$

$$\tilde{\Gamma}_2(x^0, \xi^0) = \begin{cases} \Gamma_2(x^0, \xi^0), & t \leqslant 0, \\ \Gamma_1(x^0 - A\xi^0 e^{-1}, \xi_0), & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{87}$$

Согласно теоремам 2, 3 волновой фронт соответствующих задач составлен из бихарактеристик (83)—(87). Нам представляется правдоподобным, что для задачи с $t_C = 0$, кроме случаев $\tilde{B} = 0$, $B = \pm 1$, волновой фронт всегда переносится вдоль о б е и х бихарактеристик γ_1 и γ_2. Аналогично и для $t_C = -1$. Это будет качественно отличать случай бесконечной скорости слипания характеристик от, например, случая уравнения (68).

Ереванский государственный университет
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 28.XII.1981,

Գ. Ռ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ, Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Կոշու խնդրի կոռեկտության պայմանները և լուծման եզակիությունների տարածումը բազմապատիկ բնութագրիչներով հավասարումների համար (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկված է երկրորդ կարգի հիպերբոլական տիպի հավասարում, որի գործակիցները կախված են միայն t-ից և որի գլխավոր մասն ունի հետևյալ տեսքը $\partial_t^2 - \mu^2(t) a^{ij}(t) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$: *Ենթադրվում է, որ* $\mu(0) = 0$, $\mu(t \neq 0) \neq 0$, *այսինքն երբ* $t = 0$ *բնութագրիչ արմատները համընկնում են։ Նշված են պայմաններ ցածր կարգի անդամների գործակիցների վրա, որոնք բավարար են Կոշու խնդրի կոռեկտության համար, երբ սկզբնական պայմանները տրվում են ինչպես* $t=0$ *հիպերհարթության վրա, այնպես նաև նրանից դուրս։ Այդ պայմաններում նկարագրված է նաև Կոշու խնդրի լուծման ալիքային ճակատը։ Մասնավորապես ապացուցված է, որ* $t=0$ *բազմաձևությունը հատելիս լուծման եզակիությունը անպայման տարածվում է առնվազն մեկ ճառագայթով։ Որպես օրինակ մանրամասն նկարագրված է* $\mu(t) = \exp(-|t|^{-n})$ *դեպքը։*

G. R. ALEXANDRIAN, K. H. YAGDJIAN. *On the correctness of the Cauchy problem & propagation of the singularities for the differential equations with real multiple characteristics* (summary)

The paper deals with the second order hyperbolic equation with coefficient depending on t only, and with main part $\partial_t^2 - \mu^2(t) a^{ij}(t) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$. It's assumed that $\mu(0) = 0$, $\mu(t \neq 0) \neq 0$, i. e. if $t = 0$ then characteristic roots coincide. Under some assumptions on the coefficients of low order terms, the correctness of the Cauchy problem is proved both for initial data on $t = 0$ hyperplane and outside it. The wave front set of the solution of Cauchy problem is described. In particular it is proved that singularities crossing $t = 0$ manifold propagate at least by one of the bicharacteristic strip. In case $\mu(t) = \exp(-|t|^{-n})$ is considered in detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Я. Ивpий, В. М. Петков.* Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 29, вып. 5, 1974, 3—70.
2. *А. Б. Нерсесян.* О корректности задачи Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, ДАН СССР, 166, № 6, 1966, 1288—1291.
3. *К. А. Ягджян.* О корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XV, № 6, 1980, 475—487.
4. *К. А. Ягджян.* Условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 36, вып. 4, 1981, 221—222.
5. *В. Я. Иврий.* Достаточные условия регулярной и вполне регулярной гиперболичности, Труды ММО, т. 33, 1975, 3—65.
6. *O. A. Oleinik.* On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Commun Pure Appl. Math., 23, № 6, 1970, 359—386.
7. *K. Taniguchi, Y. Tozaki.* A hyperbolic equation with double characteristics, which has a solution with branching singularities, Math. Japonica, 25, № 3, 1980, 279—300.
8. *А. Б. Нерсесян.* О некоторых задачах для нестрого гиперболических операторов, «Материалы VII советско-чехословацкого семинара», Ереван, 1981.
9. *К. А. Ягджян.* Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических операторов, «Материалы VII советско-чехословацкого семинара», Ереван, 1981.
10. *J. J. Duistermaat.* Fourier integral operators, Courant Institute Lecture Notes, 1973.
11. *S. Alinhac.* Parametrix et propagation des singularites pour on probleme de Cauchy a multiplicite variable, Asterisque, 34—35, 1976, 3—36.
12. *В. Я. Иврий.* Волновые фронты решений некоторых микролокально гиперболических псевдодифференциальных уравнений, ДАН СССР, 17, 1976, 1009—1011.
13. *L. Nirenberg.* Lections on linear partial differential equations, Regional Conf. Series in Math., Amer. Math. Soc., № 17, 1973, 1—29.
14. *М. М. Смирнов.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, «Наука», М., 1966.