УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН

О ВЗАИМНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ
 МЕСТ И α -ТОЧЕК МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе обнаруживается один эффект асимптотического поведения мероморфных в $|z| < \infty$ функций $w(z)$, который качественно можно охарактеризовать следующим образом: если $w(z)$ имеет широкий набор различных асимптотических кривых Γ_v , по которым $w(z) \rightarrow \alpha$, при $z \rightarrow \infty$, $z \in \Gamma_v$, то α -точки, в массе своей, избегают находиться на линиях Γ_v , и, более того, избегают находиться в окрестностях кривых Γ_v , ограничиваемых соседними асимптотическими линиями.

Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < R \leq \infty$ функция с $n \geq 2$ различными асимптотическими значениями α_v ($v = 1, 2, \dots, n$); Γ_v — асимптотическая линия функции $w(z)$, по которой $w(z) \rightarrow \alpha_v$, при $|z| \rightarrow R$, $z \in \Gamma_v$; X — некоторое множество в $|z| < R \leq \infty$, $n(r, \alpha, X)$ — количество α -точек с учетом кратностей, принадлежащих $X \cap \{z: |z| \leq r\}$.

Положим, что для функции $w(z)$ существуют пределы отношений $n(r, \alpha_v, \Gamma_v)/n(r, \alpha_v)$. Обозначим

$$b_v = \lim_{r \rightarrow R} \frac{n(r, \alpha_v, \Gamma_v)}{n(r, \alpha_v)}, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

В сборнике нерешенных задач У. Хеймана [1] приводятся следующие вопросы Винклера:

- 1) Можно ли найти целую функцию, для которой $b_v > 0$ при $v = 1, 2, \dots, n$ (n — заданное число) и далее
- 2) Может ли b_v равняться единице при $v = 1, 2, \dots, n$?

Вопросы 1 и 2 можно образно перефразировать так: может ли на Γ_v лежать „достаточно много“ α_v -точек и может ли на Γ_v лежать „подавляющее большинство“ α_v -точек для $v = 1, 2, \dots, n$?

Положительный ответ на первый вопрос дан в работе А. А. Гольдберга и А. Э. Еременко [2].

Следствие 1 из нашей теоремы 1 дает ответ на второй вопрос.

Теорема 1*). Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < R < \infty$ функция, притом при $R < \infty$ полагаем, что $\overline{\lim}_{r \rightarrow R} \frac{T(r)}{\ln(R-r)} = -\infty$; D_v ($v = 1, 2, \dots, n$) — такие при $R = \infty$ неограниченные, а при $R < \infty$

* Эта теорема при $R = \infty$ была анонсирована в работе [3] (теорема 2). В дальнейшем без пояснений будем пользоваться основными определениями и обозначениями теории распределения значений мероморфных функций (см. [4]).

простирающиеся до окружности $|z| = R$ односвязные области, что $w(z) \rightarrow a$, при $|z| \rightarrow R$ и $z \in D$. Тогда

$$\sum_{\nu=1}^n \lim_{r \rightarrow R} \frac{n(r, a, D_\nu)}{n(r, a)} \leq 2. \quad (1)$$

Если дополнительно предположить, что функция $w(z)$ аналитична в $|z| < R \leq \infty$, то

$$\sum_{\nu=1}^n \lim_{r \rightarrow R} \frac{n(r, a, D_\nu)}{n(r, a)} \leq 1. \quad (2)$$

В частности, в качестве D , всегда можем взять некоторую окрестность асимптотической кривой Γ_ν , притом так, что $n(r, a, D_\nu) = n(r, a, \Gamma_\nu)$. Таким образом, при предположениях постановки задачи Винклера, т. е. когда существуют пределы отношений $n(r, a, \Gamma_\nu) / n(r, a)$ имеем (с такими D_ν)

$$b_\nu = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a, \Gamma_\nu)}{n(r, a)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a, D_\nu)}{n(r, a)}. \quad (3)$$

Теперь из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Для целой функции $w(z)$ выполняется неравенство

$$\sum_{\nu=1}^n b_\nu \leq 1.$$

Последнее неравенство и содержит ответ на второй вопрос Винклера, показывая, что для целой функции существует не более чем одно значение для которого $b_\nu = 1$.

На этом неравенстве хорошо виден эффект, описанный в начале работы: величина b_ν „в среднем“ не превосходит $1/n$; это означает, что a_ν -точки „в среднем“ избегают находиться на линиях Γ_ν .

Теперь естественен следующий вопрос. Возможно ли накопление „большинства“ a_ν -точек в „окрестностях“ линий Γ_ν ? Оказывается, что и это в определенном смысле не так.

Обозначим, при заданном $R_0 < R$, через $\Gamma_\nu(R_0)$ ту из связных компонент множества $\Gamma_\nu \cap \{z : R_0 \leq |z| \leq R\}$, которая простирается до окружности $|z| = R$ при $R < \infty$ и до ∞ при $R = \infty$. Пусть φ_ν — аргумент точки пересечения $\Gamma_\nu(R_0)$ с окружностью $|z| = R_0$. Перенумеруем эти значения φ_ν в порядке возрастания φ от 0 до 2π . Рассмотрим односвязные области $L_\nu = L_\nu(R_0)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$), ограниченные следующими линиями: $\Gamma_{\nu-1}(R_0)$, $\{z : |z| = R_0, \varphi_{\nu-1} \leq \arg z \leq \varphi_\nu\}$, $\Gamma_\nu(R_0)$ (здесь $\varphi_{n+1} = \varphi_1$, $\Gamma_{n+1}(R_0) = \Gamma_1(R_0)$, $\varphi_0 = \varphi_n$, $\Gamma_0(R_0) = \Gamma_n(R_0)$). Области L_ν и есть те окрестности линий Γ_ν , возможность накопления в которых a_ν -точек мы рассмотрим. Нам удобно в этом случае пользоваться

характеристиками $N(r, a, L_\nu) = \int_{R_0}^r \frac{n(t, a, L_\nu)}{t} dt$ такого накопления.

Имеет место результат, который аналогично теореме 1, вскрывает свойство a_ν -точек избегать даже эти „широкие“ области L_ν .

Теорема 2. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < R \leq \infty$ функция, притом при $R < \infty$ полагаем, что $\lim_{r \rightarrow R} \frac{T(r)}{\ln(R-r)} = -\infty$,

Γ , ($\nu = 1, 2, \dots, n$) — асимптотические кривые функции $w(z)$, по которым $w(z) \rightarrow a_\nu$, при $|z| \rightarrow R$, $z \in \Gamma_\nu$. Тогда

$$\sum_{\nu=1}^n N(r, a_\nu, L_\nu) \leq 4T(r) + o[T(r)] \quad (4)$$

выполняется на некоторой последовательности $r_n \rightarrow R$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим точки на сфере Римана, стереографически проектирующиеся в точки $a_\nu \in \bar{C}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$). Для этих точек сохраним те же обозначения a_ν . Пусть G_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) — непересекающиеся окрестности (на сфере) точек a_ν , определяемые как множество точек, отстоящих от a_ν на сферическом расстоянии, меньшем некоторого фиксированного числа, $F_r = \{w(z) : |z| \leq r\}$; $\bar{F}_r$ — поверхность на сфере Римана, стереографически проектирующаяся в поверхность F_r .

Лежащую над областью G_ν связную часть поверхности $\bar{F}_r$ называют островом, если проекция границы такой части на G_ν не имеет пересечения с G_ν . Кратностью острова называется число его листов, порядком острова — кратность минус единица. Через $n(r, G_\nu)$ обозначают сумму кратностей всех островов поверхности $\bar{F}_r$ над областью G_ν .

Пусть ρ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) — минимальное расстояние от точки a_ν (на плоскости), (если $a_\nu = \infty$, то — от точки 0) до границы области, являющейся стереографическим отображением области G_ν на плоскость. Очевидно, найдется такое число $R' (< R)$, что при $|z| > R'$ и $z \in D_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |w(z) - a_\nu| &< \rho_\nu, & \text{при } a_\nu \neq \infty, \\ |w(z)| &> \rho_\nu, & \text{при } a_\nu = \infty. \end{aligned}$$

В силу выбора значений ρ_ν и R' при $r > R'$ ни один из прообразов в z -плоскости островов над G_ν (входящих в определение $n(r, G_\nu)$) не может иметь общих точек с $D_\nu \cap \{z : |z| > R'\}$, так как в противном случае нарушались бы приведенные выше неравенства. Поэтому при $r > R'$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} n(r, a_\nu, D_\nu) - n(R', a_\nu, D_\nu) &\leq \\ &\leq n(r, a_\nu) - \{n(r, G_\nu) - n(R', G_\nu)\}. \end{aligned}$$

Обозначив

$$N(r, G_\nu) = \int_{R_0}^r \frac{n(t, G_\nu)}{t} dt$$

из предыдущего неравенства имеем для любого $r < R$

$$\begin{aligned}
 N(r, a, D) &\leq N(r, a) - N(r, G) + \\
 &+ \{n(R', a, D) + n(R', G)\} \ln \frac{1+r}{R'} \leq \\
 &\leq N(r, a) - N(r, G) + O \left[\ln \frac{1+r}{R'} \right], \quad r \rightarrow R. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Из первой основной теоремы в форме Альфорса—Симидзу (см. [4] стр. 117) имеем неравенство

$$\begin{aligned}
 N(r, a) &\leq T^0(r) + \log \left\{ \frac{|w(0) - a|}{\sqrt{1 + |a|^2} \sqrt{1 + |w(0)|^2}} \right\}^{-1} \leq \\
 &\leq T^0(r) + O(1), \quad r \rightarrow R,
 \end{aligned}$$

где

$$T^0(r) = \int_0^r \frac{A(t)}{t} dt, \quad A(r) = \frac{1}{\pi} \iint_{|z| < r} \frac{|w'(z)|^2}{(1 + |w(z)|^2)^2} r dr d\varphi,$$

$A(r)$ —сферическая характеристика Л. Альфорса. Совместно с неравенством (5) получаем

$$\begin{aligned}
 N(r, a, D) + T^0(r) - N(r, a) &\leq \\
 &\leq T^0(r) - N(r, G) + O \left[\ln \frac{1+r}{R'} \right], \quad r \rightarrow R. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Используя (6) и следующее неравенство: при $0 < a \leq b$ и $c > 0$ $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+c}$, получим

$$\begin{aligned}
 &\frac{N(r, a, D)}{N(r, a)} \leq \\
 &\leq \frac{N(r, a, D) + T^0(r) - N(r, a) + \log \left\{ \frac{|w(0) - a|}{\sqrt{1 + |a|^2} \sqrt{1 + |w(0)|^2}} \right\}^{-1}}{N(r, a) + T^0(r) - N(r, a) + \log \left\{ \frac{|w(0) - a|}{\sqrt{1 + |a|^2} \sqrt{1 + |w(0)|^2}} \right\}^{-1}} \leq \\
 &\leq \frac{T^0(r) - N(r, G) + O \left[\ln \frac{1+r}{R'} \right]}{T^0(r)}, \quad r \rightarrow R. \quad (7)
 \end{aligned}$$

По второй основной теореме теории поверхностей наложения Л. Альфорса (см. [4], гл. XIII) в случае мероморфной в $|z| < R < \infty$ функции $w(z)$ выполняется неравенство

$$\sum_{\nu=1}^n [A(r) - n(r, G_\nu)] \leq 2A(r) + hL(r),$$

где $h = h(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{const} < \infty$, $L(r)$ —сферическая длина образа окружности $|z| = r$ при отображении функцией $w(z)$. В случае, если $w(z)$ аналитична в $|z| < R < \infty$, имеет место неравенство ($a_\nu \neq \infty$, $\nu = 1, 2, \dots, n$)

$$\sum_{\nu=1}^n [A(r) - n(r, G_\nu)] \leq A(r) + hL(r).$$

Учитывая это, из неравенства (7) получаем для мероморфных функций

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{N(r, a_\nu, D_\nu)}{N(r, a_\nu)} \leq \frac{\int_{R'}^r \sum_{\nu=1}^n [A(t) - n(t, G_\nu)] d \ln t + O \left[\ln \frac{1+r}{R'} \right]}{T^0(r)} \leq \quad (8)$$

$$\leq 2 + \frac{h \int_{R'}^r L(t) d \ln t}{T^0(r)} + o(1), \quad r \rightarrow R.$$

В случае, если $w(z)$ аналитична в $|z| < R \leq \infty$, получаем

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{N(r, a_\nu, D_\nu)}{N(r, a_\nu)} \leq 1 + \frac{h \int_{R'}^r L(t) d \ln t}{T^0(r)} + o(1), \quad r \rightarrow R. \quad (8')$$

Нам нужна теперь следующая

Лемма (Майлз [5], Гыжа [6]). Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < R \leq \infty$ функция. Тогда при $R = \infty$ оценка

$$\int_{R'}^r \frac{L(t)}{t} dt = O[\sqrt{T(r) \ln T(r)}]$$

выполняется при $r \rightarrow R$, $r \notin E$, где E — некоторое множество значений r конечной логарифмической меры. При $R < \infty$ оценка

$$\int_{R'}^r \frac{L(t)}{t} dt = O \left[\sqrt{T(r) \ln \frac{RT(r)}{R-r}} \right]$$

выполняется при $r \rightarrow R$, $r \notin E \subset (0, R)$, где E — некоторое множество значений r , для которого справедливо соотношение

$$\int_E d \left(\frac{1}{R-r} \right) < \infty.$$

Отсюда и из неравенств (8) и (8') для мероморфной в $|z| < R \leq \infty$ функции $w(z)$ получаем (при $R < \infty$ полагаем $\lim_{r \rightarrow R} \frac{T(r)}{-\ln(R-r)} = \infty$)

$$\sum_{\nu=1}^n \lim_{r \rightarrow R} \frac{N(r, a_\nu, D_\nu)}{N(r, a_\nu)} \leq 2.$$

Для аналитической в $|z| < R \leq \infty$ функции имеем

$$\sum_{\nu=1}^n \lim_{r \rightarrow R} \frac{N(r, a_\nu, D_\nu)}{N(r, a_\nu)} \leq 1.$$

Теорема 1 вытекает из предыдущих неравенств и очевидного соотношения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a_\nu, D_\nu)}{n(r, a_\nu)} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a_\nu, D_\nu)}{N(r, a_\nu)}.$$

Доказательство теоремы 2. Мы существенно опираемся на свойство близости a -точек (обнаруженное в работе [7], см. также [8], (§ 3)), в усиленной формулировке приводимой в [9].

Теорема А. ([9], теорема 1). Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция; $a_\nu \in \overline{C}$, $\nu = 1, 2, \dots, q$ таковы, что $a_i \neq a_j$; при $i \neq j$; $\varphi(r)$ — произвольная монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Тогда для любого r можно указать в круге $|z| \leq r$ $\Phi(r)$ односвязных областей $E_k(r)$, $k = 1, 2, \dots, \Phi(r)$, удовлетворяющих условиям:

I. $E_k(r) \cap E_j(r) = \emptyset$ при $k_1 \neq k_2$; $w(z)$ — однолистка в $E_k(r)$, $k = 1, 2, \dots, \Phi(r)$; множество

$$\bigcup_{k=1}^{\Phi(r)} \bigcup_{j \neq k} [\partial E_k(r) \cap \partial E_j(r)]$$

является подмножеством множества кратных a_ν -точек, $\nu = 1, 2, \dots, q$.

I'. Если m -кратная a_ν -точка принадлежит границе некоторой области $E_k(r)$, то эта a_ν -точка является граничной для m областей $E_k(r)$ (m , включая эту область $E_k(r)$).

$$\text{II.} \quad |\Phi(r) - A(r)| = Q_1(r) = o[A(r)], \quad (9)$$

при $r \rightarrow \infty$, $r \notin E$, где E — некоторое множество значений r конечной логарифмической меры.

$$\text{III.} \quad \sum_{k=1}^{\Phi(r)} d(E_k(r)) \leq K \varphi(r) r A^{1/2}(r), \quad (10)$$

где $d(X)$ — диаметр множества X , $K = K(a_1, a_2, \dots, a_q) = \text{const} < \infty$ зависит только от $a_1, a_2, \dots, a_q$.

$$\text{IV.} \quad \sum_{\nu=1}^q n^*(r, a_\nu) \geq (q-2)A(r) - Q_2(r), \quad (11)$$

где $n^*(r, a_\nu)$ — количество a_ν -точек (без учета кратности), лежащих на

$$\bigcup_{k=1}^{\Phi(r)} \overline{E_k(r)}, \quad Q_2(r) = o[A(r)],$$

при $r \rightarrow \infty$, $r \notin E$.

(Предложение 1' не выписано в теореме 1 работы [9]; оно устанавливается по ходу доказательства этой теоремы).

Теорема В ([9], теорема 1'). Пусть $w(z)$ — такая мероморфная в $|z| < R < \infty$ функция, что $\overline{\lim}_{r \rightarrow R} (R-r)A(r) = +\infty$; $\varphi(r)$ — произвольная монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \rightarrow R$. Тогда для любого $r < R$ можем указать в круге $|z| \leq r < R$, $\Phi(r)$ односвязных областей $E_k(r)$, $k = 1, 2, \dots, \Phi(r)$, для которых утверждения I—IV имеют место на некоторой последовательности $r_n \rightarrow R$.

В силу замечания в конце [9] количество $P(r)$ — пересечений окружности $|z|=r < R$ с областями $E_k(r)$, удовлетворяет при $r' > r_0$, ($r' < r$) неравенству

$$P(r') \leq K(a_1, a_2, \dots, a_q) \varphi(r) L(r'), \quad (11')$$

где $K(a_1, a_2, \dots, a_q) < \infty$ — постоянная, зависящая только от $a_1, a_2, \dots, a_q$.

Нам еще понадобится следующее свойство областей $E_k(r)$, вытекающее из доказательства теорем *A* и *B*. Области $E_k(r)$ лежат в таких односвязных областях $E'_k(r)$ из $|z| \leq r$, что

$$\inf_{w^* \in \omega(\partial E'_k(r))} \rho(a_\nu, w^*) > \rho_0(a_1, a_2, \dots, a_q), \quad \nu = 1, 2, \dots, q, \quad (12)$$

где $\rho(a_\nu, w^*)$ — сферическое расстояние между значениями a_ν и w^* , а $\rho_0(a_1, a_2, \dots, a_q) (> 0)$ — фиксированное число, зависящее только от $a_1, a_2, \dots, a_q$.

Отсюда вытекает следующее

Предложение 1. *Существует такое фиксированное число $R_1 < R$, что замыкания областей $E_k(r)$ не имеют общих точек с кривыми $\Gamma \cap \{z: |z| \geq R_1\}$, $\nu = 1, 2, \dots, q$.*

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно R_1 выбрать таким, чтобы при $r > R$, и $|z|=r$, $z \in \Gamma$, выполнялось бы неравенство

$$\rho(w(z), a_\nu) < \frac{\rho_0(a_1, a_2, \dots, a_q)}{2}, \quad \nu = 1, 2, \dots, q. \quad (13)$$

Тогда, если бы пересечение области $E_k(r)$ и Γ , было бы не пусто, то кривая $\Gamma \cap \{z: |z| \geq R_1\}$ имела бы общую точку z^{**} с границей односвязной области $E'_k(r)$, что невозможно, так как в этой точке выполняется $|z^{**}| > R_1$, $z^{**} \in \Gamma$, и, согласно неравенству (13).

$$\rho(w(z^{**}), a_\nu) < \frac{\rho_0(a_1, a_2, \dots, a_q)}{2}, \quad \nu = 1, 2, \dots, q,$$

что и противоречит неравенству (12).

Предложение 1, очевидно, справедливо, если вместо Γ , взять $\Gamma, (R_0)$ при $R_0 > R_1$. Далее, очевидно, не ограничивая общности можем полагать $R_0 = r' > R_1$, где r' — то же, что и в неравенстве (13), так что приходим к следующему выводу: количество $\Phi'(r, R_0)$ областей $E'_\nu(r) \in \{E_k(r)\}_{k=1}^q$, имеющих общие точки по крайней мере с двумя областями L_{ν_1} и L_{ν_2} , $\nu_1 \neq \nu_2$ удовлетворяет неравенству

$$\Phi'(r, R_0) \leq K(a_1, a_2, \dots, a_q) \varphi(r) L(R_0). \quad (14)$$

На самом деле, поскольку такие области не имеют пересечений с $\Gamma, (R_0)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, то они обязательно имеют пересечения с окружностью $|z|=R_0$. Таким образом, $\Phi'(r, R_0) \leq P(R_0)$, откуда и из (11') вытекает неравенство (14).

Обозначим через $E''_\mu(r)$ области, принадлежащие $\{E_k(r)\}_{k=1}^q$, которые не являются областями вида $E'_\nu(r)$ и лежат вне круга $|z| \leq R_0$; $\Phi''(r)$ — количество таких областей; $n_0(r, a, X)$ — количество a -точек (без учета кратности), принадлежащих замыканию множества X . Учтывая предложение 1, легко приходим к неравенству

$$n(r, a, L) \leq \sum_{\nu=1}^{\Phi'(r, R_0)} n_0(r, a, L, \cap E_{\nu}^{\cdot}(r)) + \\ + \sum_{\mu=1}^{\Phi''(r)} n_0(r, a, L, \cap E_{\mu}^{\cdot}(r)) + \{n(r, a) - n^*(r, a)\} \quad (15)$$

(здесь, при $\Phi'(r, R_0)$ или $\Phi''(r)$ равных нулю, соответствующие суммы берутся равными нулю).

Из определений имеем оценку

$$\sum_{\nu=1}^n \sum_{\tau=1}^{\Phi'(r, R_0)} n_0(r, a, L, \cap E_{\tau}^{\cdot}(r)) \leq n\Phi'(r, R_0).$$

так что с учетом неравенства (14) получаем

$$\sum_{\nu=1}^n \sum_{\tau=1}^{\Phi'(r, R_0)} n_0(r, a, L, \cap E_{\tau}^{\cdot}(r)) \leq O[\varphi(r)], \quad r \rightarrow R. \quad (16)$$

Поскольку каждая область $E_{\nu}^{\cdot}(r)$ лежит между двумя кривыми $\Gamma_{\nu}(R_0)$, то она принадлежит не более чем двум областям L_{ν} , так что вклад от нее в сумму

$$\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{\Phi''(r)} n_0(r, a, L, \cap E_{\mu}^{\cdot}(r))$$

не превосходит числа 2. Учитывая это и неравенство (9) теорем *A* и *B*, имеем

$$\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{\Phi''(r)} n_0(r, a, L, \cap E_{\mu}^{\cdot}(r)) \leq 2\Phi''(r) \leq \\ \leq 2\Phi(r) \leq 2A(r) + 2Q_1(r). \quad (17)$$

Из неравенства (11) теорем *A* и *B* стандартным образом получаем

$$\sum_{\nu=1}^n \left[N(r, a, L) - \int_{R_0}^r \frac{n^*(t, a)}{t} dt \right] = \sum_{\nu=1}^n \left[N(r, a) - T(r) + \right. \\ \left. + \int_{R_0}^r \frac{A(t)}{t} dt - \int_{R_0}^r \frac{n^*(t, a)}{t} dt \right] + O(1) \leq \\ \leq 2T(r) - \sum_{\nu=1}^n m(r, a) + \int_{R_0}^r \frac{Q_2(t)}{t} dt, \quad r \rightarrow R.$$

Сложив это неравенство с предварительно проинтегрированными по $d \ln t$ неравенствами (16) и (17), с учетом неравенства (15), получим

$$\sum_{\nu=1}^n N(r, a, L) \leq 4T(r) + O \left\{ \int_{R_0}^r \frac{Q_1(t) + Q_2(t)}{t} dt + \right. \\ \left. + \int_{R_0}^r \frac{\varphi(t)}{t} dt \right\}, \quad r \rightarrow R.$$

В [9] устанавливается следующая оценка ([9], предложение 1). В теоремах А и В $\varphi(r)$ можно выбрать таковым, чтобы для величины $Q_2(r)$ на некоторой последовательности $r_n \rightarrow R$ выполнялось соотношение

$$\int_{R_0}^r \frac{Q_2(t)}{t} dt = o[T(r)].$$

Величины $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ однотипны и для величины $Q_1(t)$ на той же последовательности $r_n \rightarrow R$ выполняется

$$\int_{R_0}^r \frac{Q_1(t)}{t} dt = o[T(r)].$$

При установлении последних оценок используется то обстоятельство, что функцию $\varphi(r)$ можно выбрать произвольно медленно растущей. В силу этого $\varphi(r)$ можем выбрать таковым, чтобы одновременно с выполнением этих оценок имело бы место неравенство $\varphi(r) < \left(\frac{T(r)}{\ln r}\right)^{1/2}$.

Тогда, легко видеть, выполняется также соотношение

$$\int_{R_0}^r \frac{\varphi(t)}{t} dt = o[T(r)], \quad r \rightarrow R.$$

Из последних соотношений и неравенства (18) вытекает утверждение теоремы 2.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.XI.1981

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵԳՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների a -կետերի և ասիմպտոտիկ տեղերի փոխադարձ դասավորության մասին. (ամփոփում)

Աշխատանքում հալտեարերված է $|z| < \infty$ -ում $w(z)$ մերոմորֆ ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ վարքի մի էֆեկտ, որը որակապես կարելի է բնութագրել հետևյալ կերպ՝ եթե $w(z)$ -ը ունի Γ , ասիմպտոտիկ գծերի լայն համախումբ, որոնցով $w(z) \rightarrow a$, երբ $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \Gamma$, ապա կետերը հիմնականում խոտափում են գտնվել կորերի վրա, և ավելին, խոտափում են գտնվել Γ , կորերի այն շրջակայքներում, որոնք սահմանափակված են հարևան ասիմպտոտիկ կորերով: 1-ին թեորեմի հետևանքը պատասխանում է Վինկլերի մի հարցադրմանը, որը բերված է Հեյմանի շրջված խնդիրների ժողովածուի մեջ (տես [1]):

G. A. BARSEGHIAN. On the arrangement of asymptotic paths and a -points of meromorphic functions (summary)

This article presents a new property of asymptotic behaviour of functions $w(z)$ meromorphic in $|z| < \infty$, which, loosely is as follows if $w(z)$ has "many" distinct asymptotic paths Γ_0 along which $w(z)$ tends to distinct values a_ν as $z \rightarrow \infty$, $z \in \Gamma_\nu$, then in general the a_ν -points do not belong to Γ_ν , and furthermore, they do not belong to the neighbourhoods of the paths Γ_ν which are bounded by two neighbouring paths. A corollary of theorem 1 gives an answer to a problem by Winkler from the problem book of Hayman [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. W. K. Hayman. Research problem in functions theory, London Math. Soc., Lecture, Note Ser., 1974, № 12, 143—154.
2. А. А. Гольдберг, А. Э. Еременко. Об асимптотических кривых целых функций конечного порядка, *Мат. сборник* 79, 109 (151), № 4, 555—581.
3. Г. А. Барсегян. О дефектах и росте мероморфных функций конечного нижнего порядка, *ДАН Арм. ССР*, 1978, LXII, № 5, 291—294.
4. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.: ОГИЗ, 1941.
5. J. Miles. A note on Ahlfors' theory of covering surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 1969, v. 21, № 1, 30—32.
6. Б. О. Гыжа. Замечание к теории Альфорса накрывающих поверхностей, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, 1974, № 20, 70—72.
7. Г. А. Барсегян. Новые результаты в теории мероморфных функций, *ДАН СССР*, 1978, 238, № 4, 777—780.
8. Г. А. Барсегян. О геометрии мероморфных функций, *Мат. сборник*, 1981, 114 (156), № 2, 178—226.
9. Г. А. Барсегян. Свойство близости a -точек мероморфных функций, *Мат. сборник*, 1983, 120 (162), № 1, 42—67.