ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 2, 1983 Математика

УДК 517.51

К. С. КАЗАРЯН

ЗАМЕЧАНИЕ О РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

В 1927 г. А. Н. Колмогоровым [1] было сформулировано следующее утверждение: существует такая функция $f(x) \in L^2[0,2\pi]$, что члены ее тригонометрического ряда Фурье можно переставить таким образом, чтобы полученный ряд расходился почти всюду на $[0,2\pi]$. Только спустя более тридцати лет З. Загорский [2] привел доказательство вышеуказанного утверждения. Затем П. Л. Ульянов доказал подобное утверждение для рядов по системам Хаара и Уолша. П. Л. Ульянов (см. [4], [5]), а также А. М. Олевский (см. [6], [7]) доказали следующую теорему: любую полную ортонормированную систему можно переставить таким образом, чтобы ряд Фурье некоторой функции из L^2 по полученной системе расходился почти всюду.

П. Л. Ульяновым был доказан более общий факт касающийся базисов пространства L^2, но в настоящей заметке рассматриваются только ортонормированные системы, и поэтому не будем останавливаться на обобщениях в этом направлении. Из теоремы П. Л. Ульянова — А. М. Олевского естественно возникает вопрос: насколько можно в этой теореме ослабить условие полноты для конкретных ортонормированных систем?

Одно из направлений, в котором могут развиваться исследования для решения приведенной задачи, является изучение таких подсистем данной полной ортонормированной системы, которые полны на подмножествах области определения функций данной системы. Вопросом описания подсистем классических ортонормированных систем, которые полны на подмножествах области определения функций, занимались американские математики Дж. Прайс и Р. Зинк (см. [8], [9]). Для системы Хаара они в совместной работе [9] дали полное решение этого вопроса. А для тригонометрической системы и системы Уолша этот вопрос пока ждет своего решения. Для дальнейшего изложения приведем несколько определений

Определение 1. Скажем, что система функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ аппроксимативно полна на измеримом множестве E положительной меры, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset E$, $|E_\varepsilon| > |E| - \varepsilon$ такое, что система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в пространстве $L^2(E_\varepsilon)$.

Определение 2. Скажем, что система функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на отрезке $[a, b]$, нигде не полна, если для любого множества $F \subset [a, b]$ положительной меры система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не является полной в пространстве $L^2(F)$.

Определение 3. Ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой сходимости, если из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ сходится почти всюду.

Определение 4. Ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой безусловной сходимости, если любая перестановка этой системы является системой сходимости.

В обзорной работе [10] Дж. Прайс показал, что система Радемахера и системы $\{\sin 2^n \pi x\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos 2^n \pi x\}_{n=0}^{\infty}$, определенные на отрезке $[0,1]$, нигде не полны, иепользовав следующий признак неполноты:

(*) если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие непересекающие интервалы $\{\Delta_n\}$, что $\bigcup \Delta_n = [0,1]$, $|\Delta_n| < \varepsilon$ и для любого Δ_n все функции системы $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, начиная с некоторого номера, симметричны на этом интервале относительно его центра или перпендикуляра, проведенного через центр, тогда система $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ является нигде не полной на $[0,1]$.

Очевидно Дж. Прайс в работе [10] сознавал, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы некоторая подсистема системы Хаара являлась системой безусловной сходимости является условие, чтобы эта подсистема нигде не была полной. Это сразу следует из теоремы П. Л. Ульянова—Е. М. Никишина [12] и критерия, описывающего полные на множествах положительной меры подсистемы системы Хаара данного Дж. Прайсом и Р. Зинком. Наверно поэтому, учитывая еще то, что ортонормированные системы $\{\sin 2^n \pi x\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos 2^n \pi x\}_{n=0}^{\infty}$ и система Радемахера нигде не полны и являются системами безусловной сходимости, Дж. Прайс предположил, что для того, чтобы ортонормированная система была системой безусловной сходимости, необходимо и достаточно, чтобы она была нигде не полной системой. Существование нигде не полной ортонормальной системы, не являющейся системой безусловной сходимости, было установлено А. А. Талаляном и доказательство этого факта было им сообщено автору.

Из следующей теоремы вытекает, что даже равномерно ограниченные ортонормированные системы безусловной сходимости могут быть полными на множествах, имеющих меру сколь угодно близкую к полной мере.

Теорема 1. *Для любого a, $0 < a < 1$ на отрезке $[0,1]$ существует равномерно ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая полна в $L^2[0, a]$ и является системой безусловной сходимости.*

Систему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям теоремы 1, можно просто выписать:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{\pi}{a}nx, & \text{при } x \in [0, a] \\[2ex] \dfrac{1-\dfrac{1}{2^{2n}}}{(1-a)^{1/2}}\, r_n[a+(1-a)x], & \text{при } x \in (a, 1], \quad n = 1,2,\cdots, \end{cases}$$

где $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Радемахера. Ортонормированность системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ проверяется непосредственно. Полнота системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сразу следует из полноты системы $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ в $L^2[0,\pi]$. Безусловная сходимость почти всюду на $[0,1]$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ при $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ следует с одной стороны из того, что $\{1/2^n c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$, и с другой стороны—ввиду того, что $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой безусловной сходимости. Таким образом, система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

Докажем теперь теорему, из которой как следствие получаем, что тригонометрическая система и система Уолша содержат подсистемы, которые нигде не полны и не являются системами безусловной сходимости. Таким образом, ситуация для этих систем существенно отличается от системы Хаара. Из нижеследующей теоремы будут видны те структурные особенности функций этих систем, которые являются причиной таких отличающихся друг от друга результатов. Как отмечалось выше, пример, показывающий, что в вопросе Дж. Прайса условие о нигде не полноте системы не является достаточным, раньше автора был построен А. А. Талаляном.

Определение 5. Скажем, что система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определенных на $[0,1]$ функций обладает свойством (Γ), если для любых натуральных чисел m и N найдется некоторое натуральное число $n > m$ такое, что все функции $f_i(2^n x)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ принадлежат системе $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где предполагается, что функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ периодически продолжены на всю действительную ось.

Теорема 2. *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *полная ортонормированная система, обладающая свойством* (Γ). *Тогда существует подсистема* $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ *системы* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что* $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — *нигде не полна на* $[0,1]$ *и* $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ *является системой безусловной сходимости.*

Доказательство проводится по следующей схеме: согласно теореме П. Л. Ульянова — А. М. Олевского в пространстве L^2 есть ряд по системе $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, который не является почти всюду безусловно сходящимся. Затем, используя (Γ)-свойство системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, строится такая подсистема системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая удовлетворяет признаку неполноты ($*$) и по которой можно написать ряд, сходящийся в $L^2[0,1]$, частичные суммы которого, в смысле сходимости почти всюду, ведут себя „плохо", как и первоначально взятый ряд.

Используя формулировку теоремы П. Л. Ульянова (см. [5], стр. 132), где утверждается существование ряда по любой полной ортонормированной системе, сходящегося в $L^2[0,1]$, который после некоторой перестановки неограниченно расходится почти всюду, сейчас в условиях теоремы 2 получим существование подсистемы $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, которая нигде не полна на $[0,1]$ и ряд по которой с коэффициентами $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ после некоторой перестановки неограниченно расходится.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность чисел, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1 \tag{1}$$

и при некоторой перестановке $\{\vartheta_n\}_{n=1}^{\infty}$ натуральных чисел ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\vartheta_n} f_{\vartheta_n}(x)$$

почти всюду неограниченно расходится. Отсюда, очевидно, что для любого натурального i можем выбрать число k_i и множество E_i такие, что

$$\sup_{1 < s \leqslant k_i} \left| \sum_{n=1}^{s} a_{\vartheta_n} f_{\vartheta_n}(x) \right| > 4^i, \quad x \in E_i, \tag{2}$$

$$E_i \subset [0,1]; \ |E_i| > 1 - \frac{1}{2^i}. \tag{3}$$

Выберем натуральные числа $1 < p_1 < p_2 < \cdots$ таким образом, чтобы функции $f_j(2^{p_i} x)$ $(j = 1, 2, \cdots)$ не принадлежали совокупности функций

$$\{f_\vartheta(2^{p_s} x), \ 1 \leqslant \vartheta \leqslant \max_{1 < l < k_s} \vartheta_l, \ s = 1, 2, \cdots, i-1\}.$$

Ввиду того, что система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обладает свойством (Г), согласно выбору чисел p_i $(i = 1, 2, \cdots)$ система

$$\{f_\vartheta(2^{p_s} x); \ 1 \leqslant \vartheta < \max_{1 < l < k_s} \vartheta_l\}_{s=1}^{\infty} \tag{4}$$

является подсистемой $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и удовлетворяет условию неполноты (*). Следовательно, система (4) нигде не полна на [0,1]. Покажем, что можно написать ряд по некоторой перестановке этой системы, который сходится в $L^2[0,1]$ и почти всюду неограниченно расходится на [0,1]. Рассмотрим ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k_l} \frac{1}{2^l} a_{\vartheta_n} f_{\vartheta_n}(2^{p_l} x). \tag{5}$$

Из условий (2) и (3) очевидно, что ряд (5) неограниченно расходится на множестве $E = \lim_l \sup E_l$, т. е. почти всюду на [0,1], так как из (3) $|E| = 1$. Ввиду того, что из условия (1)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k_l} \left(\frac{1}{2^l} a_{\vartheta_n} \right)^2 \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{4^l} < 1,$$

то теорема 2 доказана.

Замечание 1. Учитывая, что П. Л. Ульяновым (см. [15], стр. 132) доказано, что полные ортонормированные системы не являются системами безусловной сходимости и в смысле суммируемости для широких классов методов суммирования, то теорему 2 можно аналогичным образом доказать и для этих методов суммирования.

Из теоремы 2 сразу вытекают такие следствия.

С л е д с т в и е 1. Существует нигде не полная подсистема тригонометрической системы, которая не является системой безусловной сходимости.

С л е д с т в и е 2. Существует нигде не полная подсистема системы Уолша $\{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая не является системой безусловной сходимости.

Отметим, что подсистемы, существование которых утверждается в следствиях 1 и 2, можно вполне конкретно выписать. Например, для тригонометрической системы подсистема

$$\{\cos 2^{i^2} nx,\ \sin 2^{i^2} nx;\ n = 1, 2, \cdots, 2^i\}_{i=1}^{\infty}$$

удовлетворяет всем условиям следствия 1.

Таким образом, добавляя условие равномерной ограниченности ортонормированной системы, мы не спасаем вопрос, поставленный Дж. Прайсом: из того, что равномерно ограниченная ортонормированная система нигде не полна не следует, что она является системой безусловной сходимости и наоборот, если равномерно ограниченная ортонормированная система является системой безусловной сходимости, то не обязательно, чтобы она была нигде не полной системой.

Что касается ослабления условия полноты в теореме П. Л. Ульянова — А. М. Олевского, то на первый взгляд кажется, что аппроксимативно полные равномерно ограниченные ортонормированные системы не являются системами безусловной сходимости.

Признак (*), примененный Дж. Прайсом, полезен при построениях нигде не полных систем, но в общих ситуациях его нельзя применить, так как в этом признаке учитываются только структурные особенности функций. Здесь мы дадим еще один признак для определения нигде не полных систем. Этот признак уже будет основываться на метрических свойствах данных систем.

Хорошо известно, что сходимость в метрике

$$\rho(f) = \int_0^1 \frac{|f(t)|}{1 + |f(t)|}\, dt$$

эквивалентна сходимости по мере в пространстве S конечных измеримых функций. Пусть R — метрическое пространство, строго входящее в S (существует функция $f \in S$, которая не принадлежит R), все функции, почти всюду совпадающие с некоторой функцией из R, эквивалентны ей и (R, ρ_1) образует полное метрическое пространство.

Будем говорить, что метрика ρ_1 сильнее метрики ρ, если из сходимости в метрике ρ_1 любой последовательности функций следует сходимость этой последовательности в метрике ρ.

Имеет место следующее

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть* $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset R$ — *система функций, определенных на отрезке* $[0,1]$, E — *измеримое подмножество* $[0,1]$.

Если для любого ряда по системе $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из сходимости некоторой подпоследовательности его частичных сумм по мере на E следует сходимость некоторой подпоследовательности частичных сумм этого ряда на E по более сильной метрике ρ_1, то система функций $g_n(x)_{n=1}^{\infty}$ не полна по мере на множестве E.

Доказательство утверждения 1 проводится с помощью одной теоремы А. А. Талаляна [11] (см. также работу К. Гофмана и Д. Уотермана [13]), согласно которой удаляя из полной по мере на множестве E системы функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ конечное число функций опять получим полную по мере на E систему функций. Предполагая, что $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна по мере на множестве E для любой функции $f \in S$ можно определить последовательность линейных комбинаций по системе $\{g_n(x)_{n=1}^{\infty}$

$$\Phi_k(x) = \sum_{l=n_k}^{n_{k+1}} a_l\, g_l(x) \quad (n_1 < n_2 < \cdots)$$

такую, что

$$\rho\left(f - \sum_{k=1}^{n} \Phi_k\right) < \frac{1}{2^n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Отсюда следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x)$, в метрике ρ, т. е. сходимость ряда $\sum_{l=1}^{\infty} a_l g_l(x)$ по подпоследовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Но согласно условиям утверждения 1 некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда $\sum_{l=1}^{\infty} a_l g_l(x)$ должна сходиться по более сильной метрике ρ_1. Выбирая функцию $f \in S$ таким образом, чтобы f не принадлежала полному метрическому пространству (R, ρ_1), приходим к противоречию. Это доказывает утверждение 1.

Из утверждения 1 сразу вытекает следующий признак неполноты:

если для любого измеримого множества $E \subset [0,1]$ из сходимости по мере $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ следует сходимость этого ряда на E по более сильной метрике, то система $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ нигде не полна по мере на $[0,1]$.

Для того чтобы применить этот признак к мультипликативным системам, к числу которых относятся тригонометрическая система и система Уолша, приведем некоторые определения и обозначения. Ввиду того, что хотим воспользоваться теоремой, которая в наиболее общей форме сформулирована в работе В. Ф. Гапошкина [14], то будем придерживаться обозначений из этой работы. Система комплексозначных функций $X = \{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, определенных на отрезке $[0,1]$, называется мультипликативной ортогональной системой, если она ортонормальна и вместе с двумя любыми функциями χ_{k_1} и χ_{k_2} системе X принадлежат и функции $\chi_{k_1}^{-1}$, $\chi_{k_1}\cdot\chi_{k_2}$. Считается, что $\chi_0(x) = 1$. В группе целых неотрицательных чисел определяются операции сложения и вычитания согласно следующим правилам:

$$\vartheta = n \dotplus m, \text{ если } \chi_n \cdot \chi_m = \chi_\vartheta; \quad \vartheta = n \mathbin{\dot{-}} m, \text{ если } \chi_n \cdot \overline{\chi_m} = \chi_\vartheta.$$

Для тригонометрической системы операции $\dotplus$ и $\dot{-}$ совпадают с операциями сложения и вычитания. Пусть $N = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $n_k \geqslant 0$, $n_k \neq n_j$ при $k \neq j$ — некоторая последовательность номеров. Систему $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ для заданной последовательности N будем обозначать $X(N)$.

Скажем, что $N \in \dot{D}_2^-$, если $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \Phi$ $(i \neq j)$, группа Δ_i содержит не более s элементов и число решений уравнения

$$n_{k_1} \mathbin{\dot{-}} n_{k_2} = \vartheta \quad (n_{k_1} \in \Delta_{i_1},\ n_{k_2} \in \Delta_{i_2},\ i_1 > i_2)$$

при каждом $\vartheta > 0$ не превосходит A, $A = \text{const}$; $N \in \dot{G}_2^-$, если

$$\lim_{k_1 \neq k_2,\ k_1 - k_2 \to \infty} (n_{k_1} \mathbin{\dot{-}} n_{k_2}) = \infty.$$

Из теоремы 4 работы В. Ф. Гапошкина [14] в частности следует, что если $N \in \dot{D}_2^- \cap \dot{G}_2^-$ и модули некоторых частичных сумм ряда $\sum_{l=1}^{\infty} c_l \chi_{k_l}(x)$ по мультипликативной ортогональной системе конечны на некотором измеримом множестве E положительной меры, то $\sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 < \infty$. Отсюда и из сформулированного выше признака неполноты сразу следует

Теорема 3. *Мультипликативная ортогональная система $X(N)$, где $N \in \dot{D}_2^- \cap \dot{G}_2^-$, является нигде не полной на отрезке* $[0,1]$.

Учитывая замечание к теореме 4 в работе [14], получим также утверждение.

Теорема 3′. Если $N \in \dot{D}_2^-$, то система $\{e^{in_k 2\pi x}\}_{k=1}^{\infty}$ нигде не полна по мере на отрезке $[0,1]$.

Отсюда, в частности, следует, что любая лакунарная тригонометрическая система $\{e^{in_k x}\}_{k=1}^{\infty}$, где $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1$, нигде не полна по мере на $[0,2\pi]$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 12.II.1982

Գ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Դիտողություն ֆուրյեի շարքերի տարամիտության վերաբերյալ (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկվում է $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ $(\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *օրթոնորմավորված սիստեմ է) շարքերի համարյա ամենուրեք ոչ պայմանականորեն զուգամիտելու հարցը, կախված* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *սիստեմի լրիվությունից։ Բերվում են օրթոնորմավորված սիստեմների օրինակներ, որոնք հավասարաչափ սահմանափակ են և լրիվ այնպիսի բազմությունների վրա, որոնց չափը ինչքան ասեք մոտ է լրիվ բազմության չափին, բայց, չնայած դրան, ցանկացած* $\{c_n\} \in l^2$ *հաջորդականության համար* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ *շարքը ոչ պայմանականորեն զուգամիտում է հ. ա.։ Ցույց է տրվում նաև, որ գոյություն ունեն եռանկյունաչափական սիստեմի և Ուոլշի սիստեմի ենթասիստեմներ, որոնք ոչ մի դրական չափի բազմության վրա լրիվ չեն և չեն հանդիսանում ոչ պայմանական զուգամիտության սիստեմներ։ Առաջարկված է մի նոր հայտանիշ, որը հնարավորություն է տալիս պարզել տրված սիստեմի ամենուրեք ոչ լրիվությունը, ելնելով այդ սիստեմի մետրիկական հատկություններից։*

K. S. KAZARIAN. *A remark on divergence of Fourier series* (summary)

In the paper unconditional convergence a. e. of the series $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ is considered, where $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$—is an orthonormal system and $\{c_n\} \in l^2$. Examples of bounded orrthonormal systems $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ which are complete on sets with measures arbitrary close to the total measure and yet the series $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ for every $\{c_n\} \in l^2$ unconditionally converge a. e. are stated. It is shown that there exist subsystems of the trigonometric and Walsh systems which are nowhere complete and are systems of unconditional convergence. New criteria for checking the nowhere completeness of a system based on metric properties is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Kolmogoroff, D. Menschoff.* Sur la convergence des se'ries de fonctions, orthogonales, Math. Zeitchr, 1927, 26, 432—441.
2. *Z. Zahorski.* Une serie de Fourier permutee' d'une fonction de classe L^2 divergent, presque partont, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), 1966, 251, 501—503.
3. *П. Л. Ульянов.* Расходящиеся ряды класса L_p, ДАН СССР, 1961, 137, № 4, 786—789.
4. *П. Л. Ульянов*, Расходящиеся ряды по системе Хаара и по базисам, ДАН СССР, 1961, 138, № 3, 556—559.
5. *П. Л. Ульянов.* Расходящиеся ряды Фурье, УМН, 1961, 16, 3 (99), 61—142.
6. *А. М. Олевский.* Расходящиеся ряды из L^2 по полным системам, ДАН СССР, 1961, 138, № 3, 545—548.
7. *А. М. Олевский*, Расходящиеся ряды Фурье, Изв. АН СССР, серия матем., 1963, 27, 343—366.
8. *J. J. Price.* Sparse subsets of orthonormal systems, Proc. Amer. Math. Soc., 1972. 35, 161—164.
9. *J. J. Price and R. E. Zink.* On sets of completness for families of Haar functions Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 119, 262—269.
10. *J. J. Price.* Topics in orthonormal functions, Amer. Math. Month., 1975, 82, 594—609,
11. *А. А. Талалян.* Представление измеримых функций рядами, УМН, 1960, 15, № 5, 77—141.
12. *Е. М. Никишин и П. Л. Ульянов.* Об абсолютной и безусловной сходимости, УМН, 1967, 22, № 3, 240—242.
13. *C. Goffman and D. Waterman.* Basic sequences in the space of measurable functions, Proc. Amer. Math. Soc., 1960, 11, 211—213.
14. *В. Ф. Гапошкин.* О лакунарных рядах по мультипликативным системам функций, Сиб. мат. журн., 1971, 12, № 2, 65—83.