

УДК 517.53

Г. М. АЙРАПЕТЯН

КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПОДКЛАССАХ  $H^\infty$  И  
БАЗИСНОСТЬ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ В СЛАБОЙ  
ТОПОЛОГИИ  $L^-$ 

## § 0. В в е д е н и е

0.1. Пусть  $\{a_k\}_1^\infty$  ( $0 < |a_k| < 1$ ) — произвольная последовательность комплексных чисел. Для любого целого  $k$  ( $1 \leq k < \infty$ ) обозначим через  $s_k > 1$  и  $p_k \geq 1$  кратность появления числа  $a_k$  на отрезках  $\{a_j\}_1^k$  и во всей последовательности  $\{a_j\}_1^\infty$  соответственно. Впредь будем предполагать, что наша последовательность удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|) < \infty, \quad (0.1)$$

обеспечивающему сходимость произведения Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z} \frac{|a_k|}{a_k}$$

с нулями  $\{a_k\}_1^\infty$ .

Пусть далее  $H^p$  ( $0 < p \leq \infty$ ) — класс Харди с нормой

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}$$

при  $0 < p < \infty$  и  $\|f\|_\infty = \sup_{|z|<1} |f(z)|$  при  $p = \infty$ .

Следуя М. М. Джрбашяну [1], обозначим через  $\lambda_p \{a_k\}$  ( $0 < p \leq \infty$ ) класс функций, определенных вне точек единичной окружности  $|z|=1$  и удовлетворяющих условиям:

1.  $f(z) \in H^p$ , при  $|z| < 1$ ;
2.  $f(z) = \frac{1}{z} B(z) \tilde{f}(1/z)$ , при  $|z| > 1$  и  $\tilde{f}(z) \in H^p$ ;

3. Угловые граничные значения функции  $f(z)$  изнутри и извне окружности  $|z|=1$  почти всюду совпадают.

При  $1 < p < \infty$  в работе Г. Ц. Тумаркина [2] установлено, что замыкание линейной оболочки системы  $\{(1 - \bar{a}_k z)^{-1}\}_1^\infty$ , по норме  $H^p$  совпадает с классом  $\lambda_p \{a_k\}$ .

Относительно классов  $\lambda_p \{a_k\}$  известны следующие утверждения (см. [3]).

1°. Из определения класса  $\lambda_p \{a_k\}$  следует, что если  $f^{(s_k-1)}(a_k) = 0$  ( $1 \leq k < \infty$ ), то  $f(z) \equiv 0$ .

2°. Класс  $\lambda_p \{a_k\}$  ( $0 < p \leq \infty$ ) совпадает с подклассом функций из  $H^p$ , удовлетворяющих условию

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0, \quad |z| < 1.$$

Наряду с классом  $\lambda_p \{a_k\}$ , порожденным последовательностью  $\{a_k\}_1^\infty$ , мы будем рассматривать также класс  $\lambda_p^* \{a_k\} \subset \lambda_p \{a_k\}$ , порожденный аналогичным образом последовательностью, состоящий из множества всевозможных попарно различных точек из  $\{a_k\}_1^\infty$ .

0.2. Пусть  $\{m_k\}_1^\infty$  — некоторая последовательность положительных чисел. Обозначим через  $l^\infty \{m_k\}$  семейство последовательностей  $w = \{w_k\}_1^\infty$  с конечной нормой  $\|w\| = \sup_{k \geq 1} |w_k| m_k < \infty$ . Рассмотрим оператор  $T$ , сопоставляющий каждой функции  $f \in H^\infty$  последовательность чисел

$$T(f) = \{f^{(s_k-1)}(a_k)\}_1^\infty. \quad (0.2)$$

В работе [4] Л. Карлесон доказал, что если  $s_k = 1$  ( $1 \leq k < \infty$ ) (т. е. числа последовательности  $\{a_k\}_1^\infty$  попарно различны), то для того, чтобы

$$T(H^\infty) \equiv l^\infty,$$

где  $l^\infty$  — пространство ограниченных последовательностей комплексных чисел, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\inf_{a_j \neq a_k} \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_j a_k} \right| = \delta > 0. \quad (0.3)$$

Далее в работе [5] А. М. Джрбашьяном впервые было установлено, что если последовательность, уже не обязательно различных чисел,  $\{a_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию

$$\sup_{k \geq 1} s_k = \sup_{k \geq 1} p_k = p < \infty, \quad (0.4)$$

то условие (1.3) необходимо и достаточно, чтобы

$$T(H^\infty) \equiv l^\infty \{(1 - |a_k|^2)^{s_k-1}\}.$$

После работы [4] Г. Шапиро и А. Шилдс [6] установили, что при  $s_k = 1$  условие (0.3) необходимо и достаточно для того, чтобы имело место

$$T(H^p) \equiv l^p \{(1 - |a_k|^2)^{1/p}\},$$

где  $l^p \{(1 - |a_k|^2)^{1/p}\}$  — семейство последовательностей  $w = \{w_k\}_1^\infty$  с конечной нормой

$$\|w\| = \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p (1 - |a_k|^2) < \infty.$$

В работе [7] В. Кабайла построил интерполяционные последовательности для классов  $H^p$ ,  $p \leq 1$ .



В работах Дж. Розенбаума [8] и Б. Л. Чалмерса [9] установлено условие существования интерполяционной задачи с узлами одинаковой кратности в классе  $H^2$ .

В работе М. М. Джрбашяна [10] был предложен чисто аналитический способ для полного и эффективного решения задачи кратной интерполяции в  $H^2$ . Им было доказано, что при условии (0.4) условие (0.3) необходимо и достаточно для того, чтобы

$$T(H^2) \equiv l^2 \{(1 - |a_k|^2)^{s_k - 1/2}\}.$$

При этом было также установлено, что решения интерполяционной задачи представимы в явном виде в качестве сумм специальных интерполяционных рядов.

Вопросам операторной интерполяции и базисности собственных подпространств операторов посвящен ряд работ. Систематическую библиографию по этим вопросам можно найти в книге [11].

Подробному изучению интерполяции в других классах аналитических функций посвящена обзорная статья С. А. Виноградова и В. П. Хавина [12], [13].

Автором впервые была рассмотрена аналогичная интерполяционная задача в классах  $\lambda_p\{a_k\}$  ( $1 < p < \infty$ ). Сначала нами рассматривался случай  $s_k = 1$  ( $1 \leq k < \infty$ ) (см. [3] и в частности впервые была установлена базисность системы  $\{(1 - \bar{a}_k z)^{-1}\}_1^\infty$  в  $\lambda_p\{a_k\}$ ,  $1 < p < \infty$ , когда последовательность  $\{a_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (0.3). Затем в работах [14] и [15] рассматривались также вопросы кратной интерполяции и было установлено, что условия (1.3) и (1.4) необходимы и достаточны для того, чтобы имело место

$$T(\lambda_p\{a_k\}) = l^p \{(1 - |a_k|^2)^{s_k - 1/p}\}$$

(исключение составляет случай, когда  $a_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ). При этом было установлено, что в этих случаях также решения интерполяционной задачи представимы рядом по системе М. М. Джрбашяна  $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$  (определение см. ниже (2.1)).

В этих работах было доказано также, что система  $\{r_k(z)\}_1^\infty$ , а также биортогональная с нею система  $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$  образуют базис в  $\lambda_p\{a_k\}$  тогда и только тогда, когда выполняются условия (0.3) и (0.4) (исключением опять является случай  $a_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ).

Отметим, что необходимость условия (0.4) в рассматриваемых задачах независимо была установлена также в работе В. И. Васюнина [16].

0.3. В работе автора [17] было доказано, что при  $s_k = 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) условие (0.3) вместе с равномерным условием Фростмана

$$\sup_{|z|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |a_k|}{|1 - \bar{a}_k z|} < \infty \quad (0.5)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы  $T(\lambda_\infty\{a_k\}) \equiv l^\infty$ .

В настоящей работе устанавливается, что при условии (0.4) условия (0.3) и (0.5) необходимы и достаточны для того, чтобы

$$T(\lambda_\infty \{a_k\}) = l^\infty \{(1 - |a_k|^2)^{s_k-1}\}. \quad (0.6)$$

Наряду с этим при условии (0.4) нами устанавливается также что условия (0.3) и (0.5) необходимы и достаточны для того, чтобы, система простейших дробей

$$r_k(z) = (s_k - 1)! \frac{(1 - |a_k|^2)^{s_k}}{(1 - \bar{a}_k z)^{s_k}} z^{s_k-1} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (0.7)$$

образовала безусловный базис в  $\lambda_\infty \{a_k\}$  в слабой топологии  $L^\infty$ , причем пространство коэффициентов совпадает с классом  $l^\infty$ .

Отметим, что в работе С. А. Виноградова и С. В. Хрущева [18], в частности, было доказано, что при  $s_k = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$  условия (0.3) и (0.5) необходимы и достаточны, чтобы система  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  образовала безусловный базис в  $\bar{\lambda}_\infty \{a_k\}$ , причем пространство коэффициентов разложения совпадает с пространством  $C_0$  всех сходящихся к нулю последовательностей. Здесь  $\bar{\lambda}_\infty \{a_k\}$  — замыкание линейной оболочки системы  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  в метрике  $H^\infty$ .

Ясно, что  $\bar{\lambda}_\infty \{a_k\} \subset \lambda_\infty \{a_k\}$  и это включение строгое, так как для любой последовательности  $\{a_k\}_1^\infty$ , удовлетворяющей условию (0.1),

$$\frac{B(z)}{z - a_k} \in \lambda_\infty \{a_k\} \text{ и } \frac{B(z)}{z - a_k} \notin \bar{\lambda}_\infty \{a_k\}.$$

## § 1. Кратная интерполяция в $\lambda_\infty \{a_k\}$

1.1. Наряду с системой (0.7) рассмотрим систему функций

$$\varrho_k(z) = \frac{B(z)}{(s_k - 1)!} \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{a_v(a_k)}{(z - a_k)^{p_k - s_k + 1 - v}}, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (1.1)$$

где

$$a_v(a_k) = \frac{1}{v!} \frac{d^v}{dz^v} \left\{ \frac{(z - a_k)^{p_k}}{B(z)} \right\}_{z=a_k} \quad (v = 1, 2, \dots). \quad (1.2)$$

Системы (1.1) и (0.7), а также их модификации впервые были введены М. М. Джрбашяном, в частности, с целью построения аналитического аппарата для решения интерполяционных задач в классах  $H^p$ , а также для исследования вопросов базисности систем  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  ([9], [10]).

Другие модификации этих систем для круга и области угла послужили основой в серии работ М. М. Джрбашяна [20] и В. М. Мартиросяна [21], [22], посвященных вопросам интерполяции и базисности

Обозначим  $\bar{r}_k(z) = (1 - |a_k|^2)^{-s_k} r_k(z)$ . Следующие важные для дальнейших наших целей леммы также доказаны в работе [10] (см. также [20]).

Лемма А. Системы функций  $\{\bar{r}_k(z)\}_1^\infty$  и  $\{\varrho_k(z)\}_1^\infty$  биортогональны на окружности  $|t|=1$  в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \bar{r}_v(t) \overline{\varrho_k(t)} |dt| = \delta_{v,k} \quad (1 \leq k, v < \infty).$$



Из этой леммы немедленно вытекает следующая

**Лемма Б.** Функции  $\Omega_k(z)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) удовлетворяют интерполяционным условиям

$$\Omega_k^{(j-1)}(a_j) = \delta_{k,j} \quad (1 \leq k, j < \infty).$$

**Лемма С.** Если последовательность  $\{a_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условиям (0.3) и (0.4), то для коэффициентов (2.2) справедливы неравенства

$$|a_\nu(a_k)| \leq a(\delta, p) (1 - |z_k|)^{pk-\nu} \quad (1 \leq k < \infty, 0 \leq \nu < p_k), \quad (1.3)$$

где  $a(\delta, p)$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $k$  и  $\nu$ .

Нам понадобится также следующая теорема (см. [23], [17], а также [18], где полностью доказывается эта теорема).

**Теорема А.** Пусть  $B(z)$  — некоторое произведение Бляшке с нулями  $\{a_k\}_1^\infty$ . Для того чтобы для любой функции  $f(z) \in H^\infty$  интеграл типа Коши

$$K_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad |z| < 1$$

принадлежал классу  $H^\infty$ , необходимо и достаточно, чтобы последовательность  $\{a_k\}_1^\infty$  удовлетворяла равномерному условию Фростмана (0.5).

**1.2. Лемма 1.** Пусть  $\{m_k\}_1^\infty$  — некоторая последовательность положительных чисел. Если для любой последовательности  $w = \{w_k\}_1^\infty \in l^\infty \{m_k\}$  существует функция  $f_w(z) \in \lambda_\infty \{a_k\}$ , удовлетворяющая интерполяционным данным

$$f_w^{(k-1)}(a_k) = w_k \quad (1 \leq k < \infty), \quad (1.4)$$

то каждая такая функция представима в виде ряда

$$f_w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \Omega_k(z) \quad (|z| < 1). \quad (1.5)$$

**Доказательство.** Так как для любой последовательности  $w = \{w_k\}_1^\infty \in l^\infty \{m_k\}$  согласно утверждению 1° существует единственная функция из  $\lambda_\infty \{a_k\}$ , удовлетворяющая условиям (1.4), то тем самым на  $l^\infty \{m_k\}$  определен некоторый оператор  $A$ , который каждому элементу из  $l^\infty \{m_k\}$  сопоставляет функцию  $f_w(z) \in \lambda_\infty \{a_k\}$ . Так как из сходимости по метрике  $H^\infty$  следует равномерная сходимость в круге  $|z| < 1$ , то этот оператор замкнут и поэтому по известной теореме о замкнутом графике ограничен. Тем самым существует некоторая постоянная  $C$  такая, что

$$\|f_w\|_\infty \leq C \|w\|_\infty. \quad (1.6)$$

Рассмотрим любую конечную подсумму ряда (1.5)

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^n w_{k_i} \Omega_{k_i}(z).$$

Так как  $\Omega_k(z) \in \lambda_\infty \{a_k\}$ , ( $1 \leq k < \infty$ ), то  $\varphi(z) \in \lambda_\infty \{a_k\}$ . Из леммы Б вытекает, что функция  $\varphi(z)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi^{(s_l-1)}(a_l) = u_l \quad (l=1, 2, \dots),$$

где

$$u_l = \begin{cases} w_{kj}, & \text{если } l=k, \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ 0, & \text{если } l \neq k, \quad (j=1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

Согласно (26) будем иметь

$$\|\varphi(z)\|_\infty \leq C \|u\|_\infty \leq C \|w\|_\infty.$$

Поскольку конечные подсуммы ряда (1.5) равномерно ограничены, то этот ряд сходится абсолютно и равномерно в единичном круге и определяет некоторую функцию  $f_w(z) \in H^\infty$ , которая удовлетворяет условиям (1.4). Докажем, что  $f_w(z) \in \lambda_\infty \{a_k\}$ . Так как частичные суммы ряда (1.5)

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n w_k Q_k(z)$$

равномерно ограничены, то из сходимости ряда (1.5) и из слабой компактности пространства  $L^\infty$  для любого  $z$  ( $|z| < 1$ ) будем иметь

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f_w(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|\zeta|=1} \frac{S_n(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

так как  $S_n(z) \in \lambda_\infty \{a_k\}$ . Учитывая теперь утверждение 2°, получим, что  $f_w(z) \in \lambda_\infty \{a_k\}$ .

**Лемма 2.** Если последовательность  $\{a_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условиям (0.3) и (0.4), то любая функция  $f(z) \in H^\infty$  допускает разложение вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(a_k) Q_k(z) + \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad |z| < 1, \quad (1.7)$$

где ряд сходится по метрике  $H^p$  при любом  $p$  ( $1 < p < \infty$ ).

**Доказательство.** Если  $f(z) \in H^\infty$ , то положив

$$f_2(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad (1.8)$$

по теореме М. Рисса будем иметь  $f_2(z) \in H^p$  для любого  $p$  ( $1 < p < \infty$ ). Обозначая  $f_1(z) = f(z) - f_2(z)$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} &= \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{|\zeta|=1} \frac{f_2(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \\ &= \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0, \end{aligned}$$



при  $|z| < 1$ . Учитывая теперь утверждение 2° получим, что  $f_1(z) \in \lambda_p \{a_k\}$  и

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z). \quad (1.9)$$

Теперь, если последовательность  $\{a_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условиям леммы, то система функций  $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$  образует безусловный базис в  $\lambda_p \{a_k\}$  ( $1 < p < \infty$ ) (см. [12]). Значит функция  $f_1(z) \in \lambda_p \{a_k\}$  разлагается в интерполяционный ряд по этой системе:

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1) \Omega_k(z), \quad |z| < 1, \quad (1.10)$$

сходящийся в метрике  $H^p$  ( $1 < p < \infty$ ), причем коэффициенты определяются из формул

$$\begin{aligned} c_k(f_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} f_1(\zeta) \overline{r_k(\zeta)} |d\zeta| = \frac{(s_k-1)!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - a_k)^{s_k}} d\zeta = \\ &= f_1^{(s_k-1)}(a_k) = f^{(s_k-1)}(a_k) \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

так как  $f_2^{(s_k-1)}(a_k) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Сопоставляя (1.10), (1.9) и (1.8), получим представление (1.7).

1.3. Теорема 1. Если последовательность  $\{a_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (1.4), то для

$$T(\lambda_\infty \{a_k\}) \equiv l^\infty \{(1 - |a_k|^2)^{s_k-1}\}$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность  $\{a_k\}_1^\infty$  удовлетворяла условиям (0.3) и (0.5).

Доказательство. Необходимость условия (1.3) была установлена в ряде работ (см., например, [24]). Так как при условии (0.4) для любой функции  $f(z) \in H^\infty$

$$\{f^{(s_k-1)}(a_k)\}_1^\infty \in l^\infty \{(1 - |a_k|^2)^{s_k-1}\},$$

то по лемме 1 будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(a_k) \Omega_k(z) \in \lambda_\infty \{a_k\},$$

и, следовательно, согласно лемме 2, для любой функции  $f(z) \in H^\infty$

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H^\infty.$$

Применяя теперь теорему А, получим необходимость условия (1.5).

Достаточность. Пусть выполняются условия теоремы и  $w = \{w_k\}_1^\infty \in l^\infty \{(1 - |a_k|^2)^{s_k-1}\}$  — любая последовательность. Тогда существует функция  $f(z) \in H^\infty$  такая, что

$$f^{(s_k-1)}(a_k) = w_k \quad (1 \leq k < \infty). \quad (1.11)$$

Для этой функции равенство (1.7) примет следующий вид:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \Omega_k(z) + \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad |z| < 1. \quad (1.12)$$

Так как согласно теореме А

$$\frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H^{\infty},$$

то из равенства (1.12) получаем

$$f_w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \Omega_k(z) \in H^{\infty}.$$

Из равенства (1.12) также имеем

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f_w(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

при  $|z| < 1$ . Следовательно, согласно утверждению 2°  $f_w(z) \in \lambda_{\infty}\{a_k\}$  и теорема доказана.

## § 2. О базисности систем $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ в $\lambda_{\infty}\{a_k\}$

2.1. Пусть  $\bar{\Omega}_k(z) = (1 - |a_k|^2)^{-j_k} \Omega_k(z)$ . Для любой функции  $f(z) \in \lambda_{\infty}\{a_k\}$  рассмотрим ее разложение по системе  $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) r_k(z), \quad (2.1)$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} f(\zeta) \overline{\bar{\Omega}_k(\zeta)} |d\zeta|. \quad (2.2)$$

Будем говорить, что ряд (2.1) слабо сходится к функции  $f$  в  $L^{\infty}$ , если для любой функции  $g(\zeta) \in L^1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|\zeta|=1} S_n(\zeta) \overline{g(\zeta)} |d\zeta| = \int_{|\zeta|=1} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} |d\zeta|,$$

где  $s_n(\zeta)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) — частные суммы (2.1).

Лемма 3. Если для каждой функции  $f(z) \in \lambda_{\infty}\{a_k\}$  соответствующий ряд (2.1) слабо сходится в  $L^{\infty}$ , то последовательность  $\{a_k\}_1^{\infty}$  удовлетворяет условию (0.3).

Доказательство. Обозначим через  $\{n_k\}_1^{\infty} \subset \{k\}_1^{\infty}$  последовательность индексов  $k$ , для которых  $s_{n_k} = p_k$  ( $1 \leq k < \infty$ ). Тогда согласно (1.1), (1.2) будем иметь

$$\bar{\Omega}_{n_k}(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \frac{a_0(a_{n_k})}{(z - a_{n_k})} (1 - |a_{n_k}|^2)^{-j_{n_k}} \quad (2.3)$$



и

$$a_0(a_{n_k}) = \frac{(z - a_{n_k})^{p_k}}{B(z)} \Big|_{z=a_k} = \frac{(1 - |a_{n_k}|^2)^{p_k}}{B_{n_k}(a_{n_k})} \frac{|a_{n_k}|}{a_{n_k}}, \quad (2.4)$$

где

$$B_{n_k}(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ a_j \neq a_{n_k}}}^n \frac{a_j - z}{1 - \bar{a}_j z} \frac{|a_j|}{a_j}.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(z) = \frac{B(z)}{z - a_1} \in \lambda_\infty\{a_k\}.$$

Согласно (3.3) будем иметь

$$\begin{aligned} c_{n_k}(\varphi) &= \frac{a_0(a_{n_k})}{2\pi} \cdot \frac{(1 - |a_{n_k}|^2)^{-p_k}}{(p_k - 1)!} \int_{|\zeta|=1} \frac{B(\zeta)}{\zeta - a_1} \cdot \frac{\overline{B(\zeta)}}{\zeta - a_{n_k}} |d\zeta| = \\ &= \frac{a_0(a_{n_k}) (1 - |a_{n_k}|^2)^{-p_k}}{(p_k - 1)!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{1}{1 - \zeta \bar{a}_{n_k}} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - a_1} = \\ &= \frac{a_0(a_{n_k}) (1 - |a_{n_k}|^2)^{-p_k}}{(p_k - 1)! (1 - a_1 \bar{a}_{n_k})}. \end{aligned}$$

Учитывая (2.4), получаем

$$c_{n_k}(\varphi) = \frac{1}{B_{n_k}(a_{n_k}) (1 - a_1 \bar{a}_{n_k}) (p_k - 1)!} \cdot \left( \frac{|a_{n_k}|}{a_{n_k}} \right)^{p_k}. \quad (2.5)$$

Пусть теперь для функции  $\varphi(z)$  имеем разложение в ряд

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varphi) r_k(z)$$

и

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n c_k(\varphi) r_k(z)$$

— его частичная сумма. Из условия леммы следует, что для любой функции  $g \in L^1$ 

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|\zeta|=1} S_n(\zeta) g(\zeta) d\zeta = \int_{|\zeta|=1} \varphi(\zeta) g(\zeta) d\zeta.$$

Применяя теперь известную теорему Банаха—Штейнгауза можем утверждать, что последовательность  $\{S_n(z)\}_n^\infty$  равномерно ограничена в  $H^\infty$ . Следовательно, существует число  $C$  ( $0 < C < \infty$ ) такое, что для любого  $n$  ( $1 \leq n < \infty$ )

$$\|S_n - S_{n-1}\|_\infty < C. \quad (2.6)$$

При  $n = n_k$  согласно (2.5) будем иметь

$$\begin{aligned} |S_{n_k} - S_{n_k-1}|_\infty &= |C_{n_k}(\varphi)| \cdot |r_{n_k}(z)|_\infty = \\ &= \frac{1}{|1 - \bar{a}_{n_k} a_1| \cdot B_{n_k}(a_{n_k})} \left| \frac{(1 - |a_{n_k}|^2)^{p_k}}{(1 - \bar{a}_{n_k} z)^{p_k}} \right| > \frac{(1 + |a_{n_k}|)^{p_k}}{(1 - |a_1|) |B_{n_k}(a_{n_k})|}. \end{aligned}$$

Наконец, учитывая (2.6), получаем оценку снизу

$$|B_{n_k}(a_{n_k})| > \frac{1}{(1 - |a_1|) C},$$

что равносильно условию (1.3).

2.2. Выбирая всевозможные попарно различные числа из последовательности  $\{a_k\}_1^\infty$ , можем составить произведение Бляшке  $\tilde{B}(z)$  с простыми нулями. Положив

$$F(z) = \frac{\tilde{B}(z)}{z - a_1} \quad (2.7)$$

будем иметь  $F(z) \in \lambda_\infty \{a_k\} \subset \lambda_2 \{a_k\}$ .

Лемма 4. Если для данного номера  $k$  ( $1 \leq k < \infty$ )  $s_k > 1$ , то  $c_k(F) = 0$ .

Доказательство. Пусть  $\{n_j\} \subset \mathbb{N}$  — последовательность индексов  $j$ , для которых  $s_{n_j} = 1$ . Положив

$$l_j(z) = r_{n_j}(z) \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (2.8)$$

рассмотрим систему функций

$$l_j(z) = \frac{1 - |a_{n_j}|}{1 - \bar{a}_{n_j} z} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Если  $s_k > 1$ , то согласно лемме А имеем

$$c_k(l_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (2.9)$$

Так как

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{F(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{(\zeta - a_k)(\zeta - z)} = 0, \quad |z| < 1,$$

то из утверждения 2° следует, что  $F(z)$  принадлежит замыканию линейной оболочки системы  $\{l_j(z)\}_1^\infty$  по норме  $H^2$ . Теперь, учитывая (2.9), получим, что  $c_k(F) = 0$  при  $s_k > 1$ .

Лемма 5. Пусть функциональный ряд

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) \quad (2.10)$$

сходится безусловно в слабой топологии  $L^\infty$ . Тогда множество конечных подсумм этого ряда равномерно ограничено.

Доказательство. Пусть существует последовательность конечных групп индексов

$$\{k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, \dots, k_n^{(n)}\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$



такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_{k(n)}(z) + \dots + \varphi_{k_j(n)}(z)]_- = \infty. \quad (2.11)$$

Не теряя общности можем предположить, что  $k_{j_n}^{(n)} < k_1^{(n+1)}$ , откуда, в частности, следует, что эти группы попарно не пересекаются. Теперь переставим члены ряда (2.10) так, чтобы функции каждой группы следовали друг за другом. Из условия теоремы следует, что полученный после перестановки ряд слабо сходится к  $\varphi(z)$ . Следовательно, по теореме Банаха—Штейнгауза частичные суммы этого ряда равномерно ограничены в  $L^\infty$ . Но тогда будем иметь

$$\sup_{n \geq 1} [\varphi_{k(n)}(z) + \dots + \varphi_{k_j(n)}(z)]_\infty < \infty,$$

что противоречит (2.11).

2.3. Пусть  $f(z) \in \lambda_\infty \{a_k\}$  и  $\tilde{f}(z)$  — ассоциированная с нею функция, согласно определению класса  $\lambda_\infty \{a_k\}$ . Легко проверить, что  $\tilde{f}(z) \in \lambda_\infty \{\bar{a}_k\}$  и такое соотношение между классами  $\lambda_\infty \{a_k\}$  и  $\lambda_\infty \{\bar{a}_k\}$  является изоморфизмом.

Лемма 6. Пусть  $f(z) \in \lambda_\infty \{a_k\}$ . Тогда коэффициенты разложения (2.1) имеют следующий вид:

$$c_k(f) = - \frac{(1 - |a_k|^2)^{-s_k} p_k^{-s_k}}{(s_k - 1)!} \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{\overline{a_v(a_k)}}{(p_k - s_k - v)!} \tilde{f}^{(p_k - s_k - v)}(\bar{a}_k) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.12)$$

Доказательство. Так как почти всюду на  $|z|=1$  имеем

$$f(z) = \frac{1}{z} B(z) \tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right),$$

то из (2.2) будем иметь

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} f(\zeta) \overline{\tilde{2}_k(\zeta)} |d\zeta| = \\ &= \frac{(1 - |a_k|^2)^{-s_k} p_k^{-s_k}}{(s_k - 1)!} \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta} \tilde{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \cdot \frac{\overline{a_v(a_k)}}{(\bar{\zeta} - \bar{a}_k)^{p_k - s_k + 1 - v}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \\ &= - \frac{(1 - |a_k|^2)^{-s_k} p_k^{-s_k}}{(s_k - 1)!} \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \overline{a_v(a_k)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\tilde{f}(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \bar{a}_k)^{p_k - s_k + 1 - v}} = \\ &= - \frac{(1 - |a_k|^2)^{-s_k} p_k^{-s_k}}{(s_k - 1)!} \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{\overline{a_v(a_k)}}{(p_k - s_k - v)!} \tilde{f}^{(p_k - s_k - v)}(\bar{a}_k). \end{aligned}$$

2.4. Теорема 2. Пусть последовательность  $\{a_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (0.4). Для того чтобы последовательность функций  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  образовала безусловный базис в  $\lambda_\infty \{a_k\}$  в слабой топологии

$L^\infty$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\{a_k\}_1^\infty$  удовлетворяла условиям (0.3) и (0.5).

**Доказательство.** Необходимость условия (0.3) следует из леммы 3. Пусть опять  $\{n_j\}_1^\infty \subset \{j\}_1^\infty$  — последовательность индексов, для которых  $s_{n_j} = 1$ , а  $F(z)$  — функция из (2.7). Согласно лемме 4 будем иметь

$$F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{n_j}(F) r_{n_j}(z),$$

где коэффициенты  $c_{n_j}(F)$  определяются по формулам (2.2). Учитывая теперь, что система функций

$$\Omega_j^*(z) = \frac{\tilde{B}(z)}{(z - a_{n_j}) \tilde{B}_{n_j}(a_{n_j})} \frac{|a_{n_j}|}{\tilde{B}_{n_j}(a_{n_j})},$$

где

$$\tilde{B}_{n_j}(z) = \prod_{k \neq j} \frac{a_{n_k} - z}{1 - \bar{a}_{n_k} z} \frac{|a_{n_k}|}{a_{n_k}}$$

биортогональна с системой  $\{r_{n_j}(z)\}_1^\infty$ , будем иметь

$$\begin{aligned} c_{n_j}(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} F(\zeta) \overline{\Omega_j^*(\zeta)} |d\zeta| = \frac{1 - |a_{n_j}|^2}{\tilde{B}_{n_j}(a_{n_j})} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{1}{1 - \bar{a}_{n_j} \zeta} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - a_1} = \\ &= \frac{1 - |a_{n_j}|^2}{\tilde{B}_{n_j}(a_{n_j})} \cdot \frac{1}{1 - \bar{a}_{n_j} a_1}, \end{aligned}$$

так что

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{B}_{n_j}(a_{n_j})} \cdot \frac{1}{1 - \bar{a}_{n_j} a_1} \cdot \frac{1 - |a_{n_j}|^2}{1 - \bar{a}_{n_j} z}. \quad (2.13)$$

Применяя теперь лемму 5 к ряду (2.13), получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\tilde{B}_{n_j}(a_{n_j})|} \cdot \frac{1}{|1 - \bar{a}_{n_j} a_1| |1 - \bar{a}_{n_j} z|} < C_1, \quad (2.14)$$

где постоянная  $C_1$  не зависит от  $z$ . Учитывая теперь лемму 3 и неравенство  $|1 - \bar{a}_k a_1| > 1 - |a_1|$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), получаем,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - |a_{n_j}|^2}{|1 - \bar{a}_{n_j} z|} < C,$$

что, согласно (0.4), равносильно условию (0.5).

**Достаточность.** Пусть теперь  $f(z) \in \lambda_\infty \{a_k\}$  — любая функция. Так как, в частности,  $f(z) \in \lambda_2 \{a_k\}$ , то будем иметь

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) r_k(z), \quad (2.15)$$



где функциональный ряд сходится к функции  $f(z)$  безусловно в круге  $|z| < 1$  [15]. Из (2.12) следует, что ряд (2.15) можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( - \frac{(1 - |a_k|^2)^{-s_k}}{(s_k - 1)!} \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{\overline{a_v(a_k)}}{(p_k - s_k - v)!} \tilde{f}^{(p_k - s_k - v)}(\overline{a_k}) \right) r_k(z). \quad (2.16)$$

Пусть  $S(z)$  — произвольная подсумма ряда (2.16). Тогда для любой функции  $g(\zeta) \in L^1$  будем иметь

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \overline{S(\zeta)} g(\zeta) |d\zeta| \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{\overline{a_v(a_k)}}{(p_k - s_k - v)!} \tilde{f}^{(p_k - s_k - v)}(a_k) \right| \int_{|\zeta|=1} \frac{|g(\zeta)| |d\zeta|}{|1 - \overline{a_k} \zeta|^{s_k}}.$$

Применяя лемму С, получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \overline{S(\zeta)} g(\zeta) |d\zeta| \right| &\leq \frac{\alpha(\delta, p)}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{v=0}^{p_k - s_k} (1 - |a_k|^2)^{p_k - v} \tilde{f}^{(p_k - s_k - v)}(a_k) \right| \times \\ &\times \int_{|\zeta|=1} \frac{|g(\zeta)|}{|1 - \overline{a_k} \zeta|^{s_k}} |d\zeta| \leq \frac{p\alpha(\delta, p)}{2\pi} \sup_{k \geq 1} \left\{ (1 - |a_k|^2)^{p_k - s_k - v} |\tilde{f}^{(p_k - s_k - v)}(\overline{a_k})| \times \right. \\ &\times \lg h \sup_{|\zeta|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - |a_k|^2)^{s_k}}{|1 - \overline{a_k} \zeta|^{s_k}} \}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Так как  $p < \infty$ , то

$$\sup \left\{ (1 - |a_k|^2)^{p_k - s_k - v} |\tilde{f}^{(p_k - s_k - v)}(\overline{a_k})| \right\} = C_1 < \infty. \quad (2.18)$$

Из условий (1.5) и (1.4) следует также, что

$$\sup_{|\zeta|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - |a_k|^2)^{s_k}}{|1 - \overline{a_k} \zeta|^{s_k}} = C_2 < \infty. \quad (2.19)$$

Сопоставляя теперь (2.17), (2.16) и (2.19), получим

$$\|S(\zeta)\|_{\infty} = \sup_{\substack{g \in L^1 \\ \|g\|=1}} \left| \int_{|\zeta|=1} \overline{S(\zeta)} g(\zeta) |d\zeta| \right| \leq C < \infty,$$

так что функции  $S(z)$  равномерно ограничены в  $L^\infty$ . Учитывая теперь безусловную сходимость ряда (2.15) в  $|z| < 1$ , а также слабую компактность пространства  $L^\infty$ , завершаем доказательство теоремы.

2.5. Обозначим через  $M\{a_k\}$  множество коэффициентов разложений функций класса  $\lambda_\infty\{z_k\}$ . Как следствие из теорем 1 и 2 получаем следующую теорему.

**Теорема 3.** Если последовательность  $\{a_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (0.4), то следующие утверждения равносильны.

1. Семейство  $\{r_k(z)\}_1^\infty$  образует безусловный базис в слабой топологии пространства  $L^\infty$  в  $\lambda_\infty\{a_k\}$ .

2.  $M\{a_k\} = l^\infty$ .

**Доказательство.** Пусть выполняется утверждение 1. Тогда учитывая неравенства (1.3) и формулы (2.12) коэффициентов разложения, для любой функции  $f(z) \in \lambda_\infty \{a_k\}$  будем иметь  $\{c_k(f)\}_1^\infty \in l^\infty$  и тем самым

$$M \{a_k\} \subset l^\infty. \quad (2.20)$$

Возьмем произвольную последовательность  $w = \{w_k\}_1^\infty \in l^\infty$  и составим функцию

$$f_w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k r_k(z). \quad (2.21)$$

Из условий (0.4) и (0.5) следует, что ряд сходится равномерно в  $|z| < 1$  и частичные суммы  $S_n(z)$  этого ряда равномерно ограничены. Это означает, что последовательность  $\{S_n(z)\}_1^\infty$  слабо сходится к функции  $f_w(z)$ . Учитывая теперь утверждение 2°, получаем  $f_w(z) \in \lambda_\infty \{a_k\}$ . Тем самым из утверждения 1 следует 2.

Пусть теперь  $M \{a_k\} = l^\infty$  и  $w = \{w_k\}_1^\infty \in l^\infty$  — произвольная последовательность. Рассмотрим опять последовательность индексов  $\{n_j\}_1^\infty \subset \{j\}_1^\infty$ , для которых  $s_{n_j} = 1$ . Согласно утверждению 2 функция

$$g_w(z) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j \frac{1 - |a_{n_j}|}{1 - \overline{a_{n_j}} z}$$

принадлежит классу  $\lambda_\infty^* \{a_k\}$  и из биортогональности систем  $\{r_{n_j}(z)\}_1^\infty$  и  $\{\varphi_j(z)\}_1^\infty$  будем иметь

$$w_j = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} g_w(\zeta) \overline{\varphi_j(\zeta)} |d\zeta| = - \frac{\overline{g_w(\overline{a_{n_j}})}}{B_j(a_{n_j})}, \quad (j=1, 2, \dots), \quad (2.22)$$

где  $\tilde{g}_w(z) \in \lambda_\infty^* \{\overline{a_k}\}$  — ассоциированная с нею функция согласно определению класса  $\lambda_\infty^* \{a_k\}$ . Из (2.22) теперь следует, что последовательность  $\{a_k\}$  удовлетворяет условию (0.3) и

$$T(\lambda_\infty^* \{a_k\}) = l^\infty.$$

Из теоремы 1 тогда вытекает, что  $\{a_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию (0.5) и, тем самым, по теореме 2 выполняется утверждение 1.

В заключение выражаю благодарность М. М. Джрбашяну за полезные обсуждения и внимание к работе.

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила 15.IX.1981

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Բազմապատիկ ինտեգրալային  $H^\infty$ -ի ենթադասերում և ազդեցիկ կառուցվածքի բազիսությունը  $L^\infty$ -ի բույլ տալով լոգիստիկ (ամփոփում)

Դիցուք  $\{a_k\}_1^\infty$ -ն որևէ հաջորդականություն է միավոր շրջանից, որը բավարարում է  $\sum (1 - |a_k|) < \infty$  պայմանին, իսկ  $\lambda_\infty \{a_k\}$ -ն,  $H^\infty$ -ի ենթադաս է (տես (0, 1)) ծնված այդ հաջորդականությամբ: Աշխատանքում դիտարկվում է սահմանափակ պատիկությունը ինտեգրալային խնդրի  $\lambda_\infty \{a_k\}$ -ում, և ցույց է տրվում, որ այդ խնդրի լուծման գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $\{a_k\}_1^\infty$  հաջորդականությունը բավարարի



հաշվետերի և Յրոստմանի պայմաններին Ապացուցվում է նաև, որ այդ պայմանները անհրաժեշտ և բավարար են որպեսզի  $\{(1 - \bar{a}_k z)^{-1}\}_1^\infty$  ֆունկցիաների հաշորդականությունը  $\lambda_\infty(a_k)$ -ում կազմի բազիս  $L^\infty$ -ի թույլ տոպոլոգիայում:

**H. M. HAIRAPETIAN. Multiple interpolation in the subclasses of  $H^\infty$  and basisity of rational fractions in weak  $L^\infty$ -topology (summary)**

Let  $\{a_k\}_1^\infty$  be any sequence in unit disc, satisfying the condition  $\sum (1 - |a_k|) < \infty$ , and  $\lambda_\infty(a_k)$  be a subclass of Hardy class  $H^\infty$  generated by this sequence (see (0.1)). It is proved in the article that for existence of a solution of interpolation problem in  $\lambda_\infty(a_k)$  with bounded multiplicity it is sufficient and necessary that the sequence  $\{a_k\}_1^\infty$ , satisfy Carleson and Frostman conditions.

It is proved also, that those conditions are sufficient and necessary for the sequence of simplest rational fractions to make up a basis in  $\lambda_\infty(a_k)$  by weak  $L^\infty$ -topology.

### ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
2. Г. Ц. Тумаркин. Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 4, № 1, 1969, 9—31.
3. Г. М. Айрапетян. О базисе рациональных функций в подпространствах классов Харди  $H^p$  ( $1 < p < \infty$ ), Изв. АН АрмССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 439—450.
4. L. Carleson. An interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 80, 1958, 921—930.
5. А. М. Джрбашян. Кратная интерполяция в  $H^p$  ( $0 < p \leq \infty$ ), ДАН СССР, 1977, 234, № 6, 1253—1256.
6. H. S. Shapiro, A. L. Shields. On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
7. В. Кабайла. Интерполяционные последовательности для классов  $H^p$  в случае  $p < 1$ , Lit. mat. renk, III, 1, 1963, 141—147.
8. J. T. Rosenbaum. Simultaneous interpolation in  $H^2$ , Michigan Math. J., 14, № 1, 1967, 65—70.
9. B. L. Chalmers. Some interpolation problem in Hilbert spaces, Michigan Math. J., 18, № 1, 1971, 41—50.
10. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе  $H^2$ , Изв. АН АрмССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
11. Н. К. Никольский. Лекции об операторе сдвига, М., 1980.
12. С. А. Виноградов, В. П. Хавин. Свободная интерполяция в  $H^\infty$  и в некоторых других классах функций, I, Зап. науч. семин. ЛОМИ, 56, 1976, 12—58.
13. С. А. Виноградов, В. П. Хавин. Свободная интерполяция в  $H^\infty$  и в некоторых других классах функций, II, Зап. научн. семин. ЛОМИ, 56, 1976, 12—58.
14. Г. М. Айрапетян. О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области, Изв. АН АрмССР, сер. матем., X, № 2, 1975, 133—152.
15. Г. М. Айрапетян. Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах  $H^p$  Харди, Изв. АН АрмССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 262—277.
16. В. И. Васюнин. Базисы из рациональных функций и кратная интерполяция, Записки науч. сем. ЛОМИ, 36, 1976.

17. Г. М. Айрапетян. Об интерполяциях в подклассах  $H^\infty$  и  $H^1$  и некоторые вопросы, связанные с интегралом Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIII, №№ 5—6, 1978, 448—459.
18. S. V. Hruščev, S. A. Vinogradov. Inner functions and multipliers of Cauchy type integrals, LOMI, preprints, E—I—80, Leningrad, 1980.
19. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
20. М. М. Джрбашян. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в  $H^p$  в полуплоскости, Изв. АН СССР, сер. матем., 43, № 6, 1978, 1322—1384.
21. В. М. Мартirosян. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
22. В. М. Мартirosян. Эффективное решение задачи кратной интерполяции в  $H^\infty$  применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVI, № 5, 1981, 339—357.
23. С. А. Виноградов, М. Г. Голузина, В. П. Хахин. Мультипликаторы и делители интегралов типа Коши—Стилтьеса, Зап. науч. семин. ЛОМИ, 19, 1970, 55—78.
24. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.