ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 1, 1983 Математика

УДК 517. 53

Э. К. ДИЛАНЯН

ДВА СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ О ДВУХ ПОСТОЯННЫХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА H_p

1°. (а). Первоначально в работе [1], а затем в своей монографии [2] М. М. Джрбашяном впервые была построена завершенная теория гармонического анализа в собственно комплексной плоскости, а именно, на конечной системе лучей, исходящих из начала координат. Эта теория является существенным обобщением теории Фурье—Планшереля и получила многочисленные и важные приложения в различных областях теории функций (см., напр. [2], [3], и т. д.). В частности, в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [3] были введены широкие классы аналитических в угловых областях функций и получены параметрические представления этих классов, что явилось существенным обобщением теоремы Винера—Пэли о представлении класса H_2 в полуплоскости.

Как известно (см., напр., [4]) класс $H_p(G^+)$ $(0<p<+\infty)$ в полуплоскости $G^+=\{z;\ \mathrm{Re}\, z>0\}$ определяется как множество функций $f(z)$, голоморфных при $\mathrm{Re}\, z>0$ и таких, что

$$\|f\|_{H_p(G^+)}=\sup_{0<x<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^p\, dy\right\}^{1/p}<+\infty. \tag{1}$$

Известно также [4], что каждая функция $f(z)\in H_p(G^+)$ почти всюду на мнимой оси имеет угловые граничные значения $f(iy)\in$ $\in L_p(-\infty;\ +\infty)$, причем

$$\|f\|_{H_p(G^+)}=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(iy)|^p\, dy\right\}^{1/p}.$$

(б). М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [3] впервые были введены классы $H_p^*(G^+)$ $(0<p<+\infty)$ функций $f(z)$, голоморфных в полуплоскости G^+ и таких, что

$$\|f\|_{H_p^*(G^+)}=\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p\, dr\right\}^{1/p}<+\infty. \tag{2}$$

Ими же впервые было установлено, что $H_2(G^+)\equiv H_2^*(G^+)$. Отметим, что намного позже этот факт был передоказан К. ван Винтером [5]. Отметим также, что из совпаднния классов $H_2\equiv H_2^*$ легко следует включение $H_p(G^+) \subset H_p^*(G^+)$. Это включение непосредственно вытекает также из следующей теоремы С. А. Акопяна [6] о двух постоянных для функций класса H_p.

Теорема А. *Если* $f(z) \in H_p(G^+)$ $(0 < p < +\infty)$ *и* $f(z) \neq 0$, *то**

$$\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p\,dr < \left(\int_0^{+\infty} |f(iy)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}} \left(\int_0^{+\infty} |f(-iy)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}},$$

$$\left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right). \tag{3}$$

В дальнейшем А. М. Седлецким было установлено, что обратное включение $H_p(G^+) \supset H_p^*(G^+)$ справедливо также при $p \neq 2$ [7].

Таким образом, $H_p(G^+) = H_p^*(G^+)$ $(0 < p < +\infty)$.

В данной работе доказывается усиление одного известного неравенства Л. Фейера и Ф. Рисса для функций класса H_p в круге [8], а также один аналог теоремы Харди [4]. Отправным пунктом для этого служит факт о совпадении пространства $H_p(G^+)$ и $H_p^*(G^+)$ и теорема А о двух постоянных.

2°. Обозначим через $H_p(D)$ $(0 < p < +\infty)$ класс функций $f(z)$, аналитичных в круге $D = \{z;\ |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_p(D)} = \sup_{0<r<1} \left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\nu})|^p\,d\nu\right\}^{1/p} < +\infty. \tag{4}$$

Известно, (см. напр., [4]), что любая функция $f(z)$ из класса $H_p(D)$ $(0 < p < +\infty)$ почти всюду на окружности $|z| = 1$ имеет угловые граничные значения $f(e^{i\nu}) \in L_p(-\pi, \pi)$, причем

$$\|f\|_{H_p(D)} = \left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\nu})|^p\,d\nu\right\}^{1/p}.$$

В работе Л. Фейера и Ф. Рисса [8] было установлено следующее утверждение.

Теорема В. *Если* $f(z) \in H_p(D)$ $(0 < p < +\infty)$, *то интеграл от* $|f(x)|^p$ *вдоль сегмента* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ *сходится и*

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p\,dx \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\nu})|^p\,d\nu. \tag{5}$$

Постоянная $1/2$ *является наилучшей возможной.*

Из этой теоремы вытекает следующее интересное

Следствие. *Если единичный круг* $|z| < 1$ *конформно отображается на внутренность спрямляемой замкнутой жордановой*

---

* В работе С. А. Акопяна [6] в (3) вместо знака $<$ стоит знак $\leqslant$. Однако небольшой анализ рассуждений С. А. Акопяна показывает, что если $f(z) \neq 0$, то имеет место (3).

кривой C, то длина образа произвольного диаметра не превосходит половины длины кривой C.

Мы докажем следующее усиление теоремы B.

Теорема 1. *Если $f(z) \in H_p(D)$, $(0<p<+\infty)$ и $f(z) \not\equiv 0$, то*

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p\, dx < \sqrt{\int_{0}^{\pi} |f(e^{i\nu})|^p\, d\nu \cdot \int_{-\pi}^{0} |f(e^{i\nu})|^p\, d\nu}, \tag{6}$$

причем это неравенство усилить нельзя.

Следствие 1. *Если $f(z) \in H_p(D)$ $(0<p<+\infty)$ и $f(z) \not\equiv 0$, то*

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p\, dx < \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\nu})|^p\, d\nu. \tag{7}$$

Иначе говоря, для отличных от тождественного нуля функций в (5) имеет место строгое неравенство.

Следствие 2. *Если единичный круг $|z|<1$ конформно отображается на внутренность спрямляемой замкнутой жордановой кривой C, то длина образа произвольного диаметра меньше половины длины этой кривой.*

Следствие 3. *Если единичный круг $|z|<1$ конформно отображается на внутренность спрямляемой жордановой кривой C, то длина образа произвольного диаметра меньше среднего геометрического длин дуг, на которые разбивается кривая C образами концов этого диаметра.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(z) \not\equiv 0$ — любая функция из класса $H_p(D)(0<p<+\infty)$. Рассмотрим функцию $g(w) = f\left(\frac{w-1}{w+1}\right)$, $\operatorname{Re} w > 0$. Известно [8], что в этом случае функция

$$g(w)(1+w)^{-\frac{2}{p}} \in H_p(G^+).$$

Из теоремы A (при $\varphi = 0$) следует, что

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{|g(x)|^p}{(1+x)^2}\, dx < \sqrt{\int_{0}^{+\infty} \frac{|g(iy)|^p}{1+y^2}\, dy \cdot \int_{-\infty}^{0} \frac{|g(iy)|^p}{1+y^2}\, dy}. \tag{8}$$

После замены переменной $x = \dfrac{y-1}{y+1}$ для левой части неравенства (7) получим

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p\, dx = \int_{0}^{+\infty} \left| f\left(\frac{y-1}{y+1}\right)\right|^p \frac{2}{(1+y)^2}\, dy = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{|g(y)|^p}{(1+y)^2}\, dy. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p\, dx < 2\sqrt{\int_{0}^{+\infty} \frac{|g(iy)|^p}{1+y^2}\, dy \cdot \int_{-\infty}^{0} \frac{|g(iy)|^p}{1+y^2}\, dy}. \tag{10}$$

В правой части неравенства (10) сделаем замену переменной $iy=\frac{1+e^{i\nu}}{1-e^{i\nu}}$. После этого имеем

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\,dx<2\sqrt{\int_{0}^{+\infty}\frac{|g(iy)|^p}{1+y^2}\,dy\cdot\int_{-\infty}^{0}\frac{|g(iy)|^p}{1+y^2}\,dy}=$$

$$=\sqrt{\int_{-\pi}^{0}|f(e^{i\nu})|^p\,d\nu\cdot\int_{0}^{\pi}|f(e^{i\nu})|^p\,d\nu},$$

т. е. получим (6). Наконец, так как в (5) константа 1/2 является наилучшей возможной, то в (6) константа 1 также является наилучшей возможной. Теорема доказана.

3°. Известна следующая теорема Харди (см., напр., [4], стр. 9).

Теорема С. *Если* $f(z)$ *аналитична в* $D=\{z;\ |z|<1\}$ *и*

$$M_p(f;r)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\nu})|^p\,d\nu\right\}^{1/p},\ 0<p<+\infty,$$

то

1°. $M_p(f;\ r)$ — *неубывающая функция от* r;

2°. $\log M_p(f;\ r)$ — *выпуклая функция от* $\log r$.

Мы хотим получить аналог этой теоремы.

Пусть $f(z)\in H_p(G^+)$. Обозначим

$$M_f(\varphi)=\int_{0}^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p\,dr\quad\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Из теоремы А очевидно следует, что $M_f(\varphi)$ конечна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Следующая теорема является аналогом теоремы С.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)\in H_p(G^+)(0<p<+\infty)$ *и* $f(z)\not\equiv 0$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. $M_f(\varphi)$ *непрерывна на отрезке* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

2. $\log M_f(\varphi)$ — *строго выпуклая функция на отрезке* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Доказательство. Отправным пунктом для доказательства этой теоремы также является теорема А. Докажем непрерывность $M_f(\varphi)$. Рассмотрим сначала случай $p=2$. Пусть $F(z)\in H_2(G^+)$. Тогда (см. [2], стр. 444, следствие 2)

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{0}^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^2\,dr\right\}<+\infty.$$

Следовательно (см. [2], стр. 414, теорема 7.5 (1°)),

$$\lim_{\varphi \to \pm \frac{\pi}{2} \mp 0} \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi}) - F(re^{\pm i \frac{\pi}{2}})|^2 dr = 0.$$

Пусть теперь $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$. Очевидно, что отображением

$$z = (we^{-i \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}})^{\frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1}} \quad (\varphi_1 < \arg w < \varphi_2)$$

задается конформный изоморфизм между угловой областью

$$\Delta(\varphi_1; \varphi_2) = \{w;\ \varphi_1 < \arg w < \varphi_2,\ 0 < |w| < +\infty\}$$

и полуплоскостью $\operatorname{Re} z > 0$. Обратное отображение имеет вид

$$w = e^{i \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} z^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

(При этом для вещественного a рассматривается та ветвь функции z^a, которая на полуоси $(0; +\infty)$ принимает положительные значения).

Если $f(z) \in H_2(G^+)$, то она аналитична в области $\Delta(\varphi_1; \varphi_2) \subset G^+$. Значит функция

$$F(z) = f(e^{i \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} z^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}}) z^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1 - \pi}{2\pi}}, \quad \operatorname{Re} z > 0, \tag{11}$$

аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Более того

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 dr = \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |f(e^{i \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} e^{i \frac{\varphi(\varphi_2 - \varphi_1)}{\pi}} r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}})|^2 r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1 - \pi}{\pi}} dr =$$

$$= \sup_{\varphi_1 < \nu < \varphi_2} \int_0^{+\infty} |f(e^{i\nu} r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}})|^2 \cdot r^{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} - 1} dr = \sup_{\varphi_1 < \nu < \varphi_2} \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\nu})|^2 dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \sup_{|\nu| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\nu})|^2 dr.$$

Поскольку $f(z) \in H_2(G^+) \equiv \overset{*}{H_2}(G^+)$, то

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 dr < +\infty. \tag{12}$$

Следовательно, $F(z) \in H_2(G^+)$, откуда $F(z) \in \overset{*}{H_2}(G^+)$. Отсюда и из (11) имеем

$$\lim_{\varphi \to \varphi_1 + 0} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi}) - f(re^{i(\varphi_1 + 0)})|^2 dr = 0,$$

$$\lim_{\varphi\to\varphi_1-0}\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})-f(re^{i(\varphi_1-0)})|^2\,dr=0.$$

Таким образом, окончательно получаем, что если $f(z)\in H_2(G^+)$, то

$$\lim_{\nu\to\varphi}\int_0^{+\infty}|f(re^{i\nu})-f(re^{i\varphi})|^2\,dr=0\quad\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right).\tag{13}$$

Пусть теперь $f(z)\in H_p(G^+)(0<p<+\infty)$. Тогда справедлива факторизация (см. [4])

$$f(z)=B(z)\,g(z),\ \operatorname{Re}z>0,$$

где $B(z)$ — произведения Бляшке нулей функции $f(z)$, а $g(z)$ не имеет нулей и $g(z)\in H_2(G^+)$. Очевидно, что $[g(z)]^{p/2}\in H_2(G^+)$. Следовательно

$$\lim_{\nu\to\varphi}\int_0^{+\infty}|[g(re^{i\nu})]^{p/2}-[g(re^{i\varphi})]^{p/2}|^2\,dr=0\quad\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Значит в некоторой окрестности $|\nu-\varphi|<\delta$ точки $\varphi\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ имеют место условия:

1. $\lim\limits_{\operatorname{mes}E\to0}\int_E|g(re^{i\varphi})|^p\,dr=0$ равномерно по $\nu\,(|\varphi-\nu|<\delta)$,
2. $\forall\varepsilon>0\ \exists E_\varepsilon$, $\operatorname{mes}E_\varepsilon<+\infty$, так что

$$\int_{(0,+\infty)\setminus E_\varepsilon}|g(re^{i\nu})|^p\,dr<\varepsilon,\quad|\nu-\varphi|<\delta.$$

Так как $|B(z)|\leqslant1$ и $f(z)=B(z)\,g(z)$, то имеем также:

1. $\lim\limits_{\operatorname{mes}E\to0}\int_E|f(re^{i\nu})|^p\,dr=0$ равномерно по $\nu\,(|\varphi-\nu|<\delta)$,
2. $\forall\varepsilon>0\ \exists E_\varepsilon$, $\operatorname{mes}E_\varepsilon<+\infty$, так что

$$\int_{(0,+\infty)\setminus E_\varepsilon}|f(re^{i\nu})|^p\,dr<\varepsilon\quad(|\varphi-\nu|<\delta).$$

Отсюда на основании теоремы Витали о предельном переходе под знаком интеграла заключаем, что

$$\lim_{\nu\to\varphi}\int_0^{+\infty}|f(re^{i\nu})|^p\,dr=\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p\,dr\quad\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right).$$

Это и означает непрерывность $M_f(\varphi)\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. Пусть $f(z)\in H_p(G^+)$ $(0<p<+\infty)$ и $f(z)\not\equiv0$. Докажем строгую выпуклость функции

$\log M_f(\varphi)\left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Так как $f(z) \in H_p(G^+)$ $(0 < p < +\infty)$, то она аналитична в области $\Delta(\varphi_1; \varphi_2) \subset G^+$. Из условия $H_p^*(G^+) \equiv H_p(G^+)$ следует, что $f(z)$ удовлетворяет условию (1). Значит функция

$$F(z) = f\left(e^{i\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}} z^{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}}\right) z^{\frac{\varphi_2-\varphi_1-\pi}{p\pi}}, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

будет из $H_p(G^+)$. Действительно, аналитичность $F(z)$ в G^+ очевидна. Более того

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p\, dr = \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} \left|f\left(e^{i\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}} e^{i\frac{\varphi(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi}} r^{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}}\right)\right|^p r^{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}-1}\, dr =$$

$$= \sup_{\varphi_1 < \nu < \varphi_2} \int_0^{+\infty} \left|f\left(e^{i\nu} r^{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}}\right)\right|^p r^{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}-1}\, dr =$$

$$= \sup_{\varphi_1 < \nu < \varphi_2} \left(\frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\nu})|^p\, dr\right) \leqslant \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \sup_{|\nu| < \frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\nu})|^p\, dr.$$

Из теоремы А следует, что

$$\int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p\, dr < \left(\int_0^{+\infty} \left|F\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}} \left(\int_0^{+\infty} \left|F\left(re^{-i\frac{\pi}{2}}\right)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}}$$

$$\left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{14}$$

Для правой части этого неравенства после замены переменной получаем

$$\left(\int_0^{+\infty} \left|F\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}} \left(\int_0^{+\infty} \left|F\left(re^{-i\frac{\pi}{2}}\right)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} =$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} \left|f\left(r^{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}} e^{i\varphi_1}\right)\right|^p r^{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}-1}\, dr\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}} \times$$

$$\times \left(\int_0^{+\infty} \left|f\left(r^{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}} e^{i\varphi_2}\right)\right|^p r^{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}-1}\, dr\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}} = \tag{15}$$

$$= \left(\frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi_1})|^p\, dr\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} \left(\frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi_2})\, dr\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} =$$

$$= \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \left(\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi_1})|^p\, dr\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}} \left(\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi_2})|^p\, dr\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}}.$$

В частности, для случая $\varphi=0$ из (14) и (15) имеем

$$\int_0^{+\infty}|F(r)|^p\,dr<\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}\sqrt{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi_1})|^p\,dr\cdot\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi_2})|^p\,dr}\;. \tag{16}$$

Но

$$\int_0^{+\infty}|F(r)|^p\,dr=\int_0^{+\infty}\left|f\left(e^{i\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}}r^{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}}\right)\right|^p r^{\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}-1}\,dr=$$

$$=\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}\int_0^{+\infty}\left|f\left(re^{i\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}}\right)\right|^p dr. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что для любых $-\frac{\pi}{2}<\varphi_1<\varphi_2<\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{+\infty}\left|f\left(re^{i\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}}\right)\right|^p dr<\sqrt{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi_1})|^p\,dr\cdot\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi_2})|^p\,dr}.$$

Таким образом, получаем что $\log M_f(\varphi)$ — строго выпуклая функция на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Теорема 2 полностью доказана.

Армянский сельскохозяйственный институт

Поступила 7.IX.1981

Է. Կ. ԴԻԼԱՆՅԱՆ. Երկու հետևանք H_p դասի ֆունկցիաների համար երկու հաստատուն-ների մասին թեորեմից *(ամփոփում)*

Ս. Հ. Հակոբյանի H_p դասի ֆունկցիաների համար երկու հաստատունների մասին թեորեմից որպես հետևանք ստացվել է Լ. Ֆեյերի և Ֆ. Ռիսսի մի կարևոր անհավասարության ուժեղացումը, որը հնարավորություն է տալիս գնահատելու H_p դասի ֆունկցիայի ինտեգրալը շրջանի տրամագծով այդ ֆունկցիայի եզրային արժեքների ինտեգրալով կիսաշրջանագծերի վրա։ Ստացվել է նաև Հարդիի մի թեորեմի անալոգը։

E. C. DILANIAN. *Two corollaries of the theorem about two constants for functions of H_p class* (summary)

As a corollary of the theorem of S. H. Hacobian about two constants for functions of class H_p a stronger version of an important inequality of L. Fejer and F. Riesz is obtained. Also a version of a theorem of Hardy is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (обобщение интеграла Фурье), Изв. АН СССР, сер. матем., 18, 1954, 427—448.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.

3. *М. М. Джрбашян* и *А. Е. Аветисян*. Интегральное представление некоторых классов, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сибирский матем. журнал 1, № 3, 1960, 383—426.
4. *L. Duren*. Theory of H_p spaces, Academic Press, New York and London, 1970.
5. *Glasine van Winter*. Fredholm equations on a Hilbert spaces of analitic functions, Transactions of the AMS, 162, December, 1971, 103—139.
6. *С. А. Акопян*. Теорема о двух постоянных для функций класса H_p, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 2, № 2, 1967.
7. *А. М. Седлецкий*. Эквивалентное определение пространств H_p в полуплоскости и некоторые приложения, Матем. сб., 96 (138), № 1, 1975.
8. *L. Fejer and Riesz*. Uber einige funktionentheoretische Ungleichungen, Math. Z., 11, 1921.
9. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1975.