

УДК 517.983

Р. А. ШАХБАГЯН

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье обобщаются результаты работ [1], [2] на случай уравнений высокого порядка и общих краевых условий.

1°. Пусть $H=l_2$. Обозначим через H_1 гильбертово пространство последовательностей $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ с конечной нормой

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_l^2 \sigma_l^{-2} \right)^{1/2},$$

где $\{\sigma_l\}_{l=1}^{\infty}$ — заданная последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum \sigma_l^{-2} < +\infty$.

H_1^+ — полупространство: $H_1^+ = \{x \in H_1, x_1 > 0\}$.

В полупространстве H_1^+ рассматривается оператор с символом $P(x, A(x, \xi, \lambda))$ вида

$$P(x, A(x, \xi, \lambda)) = \sum_{k=0}^m a_k(x) [A(x, \xi, \lambda)]^k, \quad (1)$$

$$x \in H_1^+, \xi \in H,$$

где

$$A(x, \xi, \lambda) = (A_1(x) \xi, \xi) + \lambda,$$

$$(A_1(x) \xi, \xi) = \xi_1^2 + \sum_{l,k=2}^{\infty} a_{lk}(x) \xi_l \xi_k.$$

Матрица $[a_{lk}]$ предполагается симметрической, а функции $a_{lk} \in C^{(\infty)}(H_1^+)$, λ — комплексный параметр, принадлежащий $C_+ = \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Коэффициенты $a_k(x)$ оператора $\hat{P}$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми и ограниченными на H_1^+ . Коэффициент при старшем члене $a_m(x) \neq 0$, при $x \in H_1^+$.

Основное условие, налагаемое на оператор $\hat{P}$ — это условие его эллиптичности, а именно, требуется, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\gamma^{-1} \|x\|^2 \leq \xi_1^2 + \sum_{i,k=2}^m a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \leq \gamma \|x\|^2, \quad \forall x \in H_1^+, \xi \in H \quad (2)$$

с некоторой постоянной $\gamma > 0$, не зависящей от ξ (символом $\|x\|^2$ обозначена $\left(\sum_{k=1}^m \xi_k^2\right)^{1/2}$).

На гиперплоскости $x_1 > 0$ зададим операторы N_j с символами

$$N_j(B(x', \xi, \lambda)) = [B(x', \xi, \lambda)]^{n_j}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где

$$B(x', \xi, \lambda) = \xi_1 + \sum_{k=2}^m b_k(x') \xi_k + \lambda, \quad (4)$$

$$x' \in H_1' = \{x' = (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots), \sum x_k^2 \sigma_k^{-2} < +\infty\},$$

$$b = (b_2(x'), \dots, b_n(x'), \dots) \in H \text{ для } \forall x' \in H_1'.$$

Коэффициенты $b_k(x')$ бесконечно дифференцируемы на H_1' , а порядки операторов N_j : $\text{ord } N_j \leq 2m$.

2°. В связи с изучением краевой задачи в полупространстве, а также свойств операторов, порожденных символами P и N_j , введем в рассмотрение классы символов и соответствующие функциональные пространства. Напомним вкратце их определения (подробнее см. в [1], [4]).

Определение класса $\Sigma_{\lambda, \mu}^s$. Пусть $A_0(\xi, \lambda)$ — заданный фиксированный символ, удовлетворяющий условию эллиптичности (2).

Обозначим через $Q(x, \xi, \lambda)$ бесконечно дифференцируемую функцию, заданную на $H_1(x) \times \{H(\xi) \setminus 0\} \times C_+(\lambda)$.

Пусть, далее, $Q(x, \xi^N, \lambda) = Q(x, P^N \xi, \lambda)$ — ограничение $Q(x, \xi, \lambda)$ на $H_1(x) \times \{H^N \setminus 0\} \times C_+$.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} G(x, z^N, \lambda) &= F_{\xi^N \rightarrow z^N}^{-1} Q(x, \xi^N, \lambda) = \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int_{H^N} e^{i(z^N, \xi^N)} Q(x, \xi^N, \lambda) d\xi^N. \end{aligned}$$

Определим норму

$$\|f\|_{L_1(H_2^N)} = \int_{R^{N_1}} f(z^{N_1}) dz^{N_1},$$

где $L_1(H_2^N)$ — пространство, образованное вообще говоря обобщенными функциями следующего вида: $f(z^N) = f(z^{N_1}) \times \delta(z^{N_2})$, $z^{N_2} = (0, \dots, z_{N_1+1}, \dots, z_N)$, $z^N = z^{N_1} + z^{N_2}$, $N_1 + N_2 = N$, $f \in L_1(R^{N_1})$, $\delta(z^{N_2})$ — δ -функция.

Предположим, далее, что ядро $G_N(x, z^N, \lambda)$, отвечающее символу $Q(x, \xi^N, \lambda)$, принадлежит пространству $L_1(H_2^N)$.

Положим

$$1. \quad \|Q(x, \xi, \lambda)\|_0 = \sup_N \|G^N(x, z^N, \lambda)\|_{L_1(H_x^N)}$$

и

$$2. \quad \|Q(x, \xi, \lambda)\|_0^{(q)} = \sup_{\alpha, \beta} \|A_0^{-\alpha + |\beta|/2}(\xi, \lambda) D_x^\alpha \partial_\xi^\beta Q(x, \xi, \lambda)\|_0,$$

где $\sup$ берется по всевозможным α, β : $|\alpha| \leq \alpha_0, |\beta| \leq \beta_0, \operatorname{Re} \lambda \geq a > 0$.

Обозначим

$$\|Q(x, \xi, \lambda)\|_{s, R}^{(q)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \sup_{\substack{\|x\|_1 \leq R \\ \operatorname{Re} \lambda \geq a}} \|D_x^\alpha Q(x, \xi, \lambda)\|_0^{(q)}.$$

Символ $Q(x, \xi, \lambda)$ принадлежит, по определению, классу $\Sigma_{A, s}^{q, s}$, если $\forall \alpha_0, \beta_0, a$ выполняются следующие условия:

$$3. \quad \|Q(x, \xi, \lambda)\|_{s, \infty}^{(q)} < +\infty, \|Q(x^N, \xi, \lambda)\|_{s, \infty}^{(q)} < +\infty, \forall N,$$

$$4. \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|Q(x, \xi, \lambda) - Q(x^N, \xi, \lambda)\|_{s, R}^{(q)} = 0, \forall R, 0 < R < +\infty.$$

Топология вводится следующим образом: последовательность $\{Q_k(x, \xi, \lambda)\}_{k=1}^\infty, Q_k \in \Sigma_{A, s}^{q, s}$ сходится к нулю, если

$$\sup_k \|Q_k(x, \xi, \lambda)\|_{s, \infty}^{(q)} < +\infty,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_k(x, \xi, \lambda)\|_{s, R}^{(q)} = 0, \forall R, 0 < R < +\infty.$$

Определение класса $\Sigma_{A, s}^{q, s}(\xi', \lambda)$. Символ $S(x, \xi') \in \Sigma_{A, s}^{q, s}$, ($\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots)$), если выполнены условия 3 и 4, преобразование Фурье берется по $(\xi')^{N-1} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$, а под знаком нормы в условии 2 стоит дифференцирование по ξ' .

Пространства $CL^s(H_1)$ и $CL^s(H_1^+)$. Функция $f \in CL^s(H_1)$, если $f \in C^s$ и существует последовательность бесконечно дифференцируемых цилиндрических функций $\{f_n\}$ такая, что

$$a) \sup \|f_n\|_{s, \infty} \leq M < +\infty \quad (M - \text{постоянная}),$$

$$b) \quad \|f_n - f\|_{s, R} \rightarrow 0 \quad \forall R > 0,$$

где введены обозначения

$$\|f\|_{s, R} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha f\|_{0, R}, \quad 0 < R \leq +\infty,$$

II

$$\|f\|_{0, R} = \sup_{\|x\|_1 \leq R} |f(x)|, \quad 0 < R \leq +\infty.$$

И, наконец, будем считать, что $f \in CL^s(H_1^+)$, если она является сужением на H_1^+ функции пространства $CL^s(H_1)$.

3°. Обозначим через $P_0(x, \xi, \lambda)$ главную часть символа P , то есть

$$P_0(x, \xi, \lambda) = a_m(x) [A(x, \xi, \lambda)]^m, \quad (5)$$

$$P_1(x, \xi, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x) [A(x, \xi, \lambda)]^j. \quad (6)$$

Не ограничивая общность можно считать, что $a_m(x) \equiv 1$.

Операторы $\hat{P}$ и $\hat{N}_j$ подчиним следующему алгебраическому условию:

$$\det \left[N_j \left(B \left(x', -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda \right) \omega_k(x, x_1, \xi', \lambda) \right) \right]_{|x_1=0} \neq 0 \quad (7)$$

$$\forall x' \in H_1', \|\xi'\| + |\lambda| \neq 0,$$

$$\begin{aligned} N_j \left(B \left(x', -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda \right) \right) &= F_{\xi_1 - x_1}^{-1} N_j(B(x', \xi_1, \xi', \lambda)), \\ \omega_k(x, x_1, \xi', \lambda) &= x_1^{k-1} e^{-S(x, \xi', \lambda) x_1} \\ k &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (8)$$

— базис в пространстве устойчивых решений уравнения

$$P_0 \left(x, -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda \right) v = 0, \quad (9)$$

$$a \quad S(x, \xi', \lambda) = \left(\sum_{j, k \geq 2} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k + \lambda \right)^{1/2}.$$

Условие (7) является бесконечномерным аналогом условия Лопатинского.

По аналогии с конечномерным случаем введем в рассмотрение так называемый „канонический“ базис $\Omega_k(x, x_1, \xi', \lambda)$ в пространстве устойчивых решений уравнения (9), определяемый следующими граничными условиями:

$$N_j \left(B \left(x', -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda \right) \right) \Omega_k(x, x_1, \xi', \lambda) \Big|_{x_1=0} = \delta_{jk}, \quad (10)$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Тогда, очевидно, решение v уравнения (9), удовлетворяющее граничным условиям

$$N_j \left(B \left(x', -i \frac{d}{dx_1}, \xi', \lambda \right) \right) v \Big|_{x_1=0} = h_j \quad (11)$$

с произвольными правыми частями h_j , представляется в виде

$$v = \sum_{j=1}^m \Omega_j h_{j1}. \quad (12)$$

Как доказано в [2], теорема 1, оператор $\hat{P}$ допускает замыкание в $CL^0(H_1^+)$.

Предложение 1. Операторы $\hat{N}_j$ ($j=1, 2, \dots, m$) допускают замыкание в пространстве $CL^0(H_1)$.

Доказательство. Покажем, что символы $N_j(B) \in \sum_{A, \epsilon}^{m_j+1, s}$. Действительно, при достаточно больших $|\xi|$ имеет место неравенство

$$|A_0^{-q+|\xi|/2}(\xi, \lambda) D_x^\alpha \partial_\xi^\beta N_j(B(x', \xi, \lambda))| \leq C |\xi|^{-q+m_j},$$

где $C > 0$ — постоянная, откуда следует, что нормы

$$\|N_j(B(x', \xi, \lambda))\|_0^{(q)} = \sup_{\alpha, \beta} \|A_0^{-q+|\xi|/2}(\xi, \lambda) D_x^\alpha \partial_\xi^\beta N_j(B)\|_0 < +\infty,$$

а также конечны нормы $\|N_j(B(x', \xi, \lambda))\|_{s, R}^{(q)}$ для любого $0 < R < +\infty$ и целого $s \geq 0$, если положить $q = m_j + \epsilon$. Но тогда, в силу теоремы 6.1 работы [5], при $s > m_j + 2 + \epsilon$, операторы $\hat{N}_j$ допускают замыкание в пространстве $CL^0(H_1)$. Этим завершается доказательство предложения.

Рассмотрим краевую задачу

$$\hat{P}u(x) = f(x), \quad x \in H_1^+, \quad (13)$$

$$\hat{N}_j u|_{x_j=0} = g_j(x'), \quad x' \in H_1, \quad j = \overline{1, m}. \quad (14)$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ оператор, действующий следующим образом:

$$\mathfrak{M}u = \{\hat{P}u(x), x \in H_1^+, \hat{N}_1 u|_{x_1=0}, \dots, N_m u|_{x_m=0}\},$$

а через $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{M}}$ — область определения его замыкания.

Пусть $u \in \mathfrak{Q}_{\mathfrak{M}}$, $f \in CL^0(H_1^+)$, $g_j \in CL^0(H_1)$, $j = \overline{1, m}$. Левый и правый регуляризатор задачи (13), (14) по аналогии с конечномерным случаем будем искать в виде (см. [3])

$$\hat{R}(f_1, g_1, \dots, g_m) = P^+ \left\{ \hat{P}_0^{-1} f + \sum_{j=1}^m \hat{Q}_j [g_j(x') - \hat{N}_j u_0|_{x_j=0}] \right\}, \quad (15)$$

где P^+ — оператор сужения функции, заданной на H_1 , на полупространство H_1^+ , $lf \in CL^0(H_1)$ — гладкое продолжение f на H_1 , $u_0 = \hat{P}_0^{-1} lf$.

Лемма 1. Оператор $P^+ P_0^{-1} \circ l$ отображает пространство $CL^{2m}(H_1^+)$ в $CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{Q}_{\hat{P}}$, где $\mathfrak{Q}_{\hat{P}}$ — область определения замыкания оператора $\hat{P}$.

Доказательство. В идейном отношении рассуждения аналогичны доказательству, проведенному в лемме 1 работы [2].

Установим вначале, что оператор $P^+ P_0^{-1}$ отображает пространство $CL^{2m}(H_1^+)$ в себя. Действительно, пусть последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\varphi_n \in C_0(H_1)$ сходится в $CL^{2m}(H_1)$ к функции φ . Введем обозначение

$$\varphi_N(x^N) = P^+ \left\{ (2\pi)^{-n/2} \int_{H^n} e^{i(\xi^N, x^N)} P_0^{-1}(x^N, \xi^N, \lambda) \tilde{\varphi}_n(\xi^N) d\xi^N, \quad N \geq n. \right.$$

Очевидно, последовательность $\psi_N \in C^\infty(H_1^+)$ и, следовательно $CL^{2m}(H_1^+)$. Рассмотрим производную $D^a \psi_N \forall a, a = (a_1, \dots, a_k), 1 \leq k \leq N$. Имеем

$$D^a \psi_N = D^a P^+ \hat{P}_0^{-1} \varphi_n = P^+ \hat{P}_0^{-1} (D^a \varphi_n) + P^+ (D^a \hat{P}_0^{-1} (x^N, \xi^n, \lambda) \varphi_n). \quad (16)$$

Символ $\hat{P}_0^{-1}$ очевидно принадлежит классу $\Sigma_{A_0}^{-2m+1, s}$ ($s > 0, s$ — любое), откуда в силу определения класса $\Sigma_{A_0}^{q, s}$ (условие 4) имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|a| \leq s} \|D_x^a (\hat{P}_0^{-1} (x, \xi^n, \lambda) - \hat{P}_0^{-1} (x^N, \xi^n, \lambda))\|_0 = 0. \quad (17)$$

Отсюда следует существование предела

$$\psi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N(x^N) \text{ в } CL^0(H_1^+).$$

Далее, из сходимости последовательности $\{\varphi_n\}$ в пространстве $CL^{2m}(H_1)$, а также воспользовавшись (17), получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|P^+ \hat{P}_0^{-1} (x^N, \xi^n, \lambda) D^a \varphi_n - P^+ \hat{P}_0^{-1} (x, \xi^n, \lambda) D^a \varphi_n\|_{C(S_R^+)} = 0$$

и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|P^+ D^a \hat{P}_0^{-1} (x^N, \xi^n, \lambda) \varphi_n - P^+ D^a \hat{P}_0^{-1} (x, \xi^n, \lambda) \varphi_n\|_{C(S_R^+)} = 0$$

$$(S_R^+ = \{x \in H_1, x_1 > 0, \|x\|_H < R\}).$$

В силу (16) имеем

$$\|D^a \psi_N - D^a \psi\|_{C(S_R^+)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \forall R > 0, \forall a, |a| \leq 2m,$$

а отсюда выводим, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N = \psi$ в смысле сходимости в пространстве $CL^{2m}(H_1^+)$.

Нам надлежит далее совершить в CL^{2m} предельный переход по n (заметим, что функция ψ зависит от n).

Это возможно сделать, поскольку $\hat{P}_0^{-1} \in \Sigma_{A_0}^{-2m+1, s}$, а в представлении (16) — заменить x^N на x . Таким образом, доказано, что $P^+ \hat{P}_0^{-1} : CL^{2m}(H_1) \rightarrow CL^{2m}(H_1^+)$.

Воспользовавшись, наконец, тем, что оператор продолжения l отображает пространство $CL^{2m}(H_1^+)$ в $CL^{2m}(H_1)$, и что $\psi \equiv \psi^{(n)} \in \mathfrak{Q}_{\hat{P}}$,

$\psi^{(n)} \rightarrow P^+ \hat{P}_0^{-1} (x, \xi, \lambda)$ в $CL^{2m}(H_1^+)$, получим

$$P^+ \hat{P}_0^{-1} \circ l : CL^{2m}(H_1^+) \rightarrow CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{Q}_{\hat{P}},$$

чем и завершается доказательство леммы.

Замечание. Можно доказать, что оператор $P^+ \hat{P}_0^{-1} \circ l$ не зависит от оператора продолжения.

Рассмотрим теперь операторы

$$P^+ \mathcal{Q}_j [g_j(x') - \hat{N}_j u_0|_{x_1=0}], \quad j = \overline{1, m},$$

входящие в выражение для регуляризатора $\hat{R}$ задачи (13), (14).

Лемма 2. Пусть $n_j > m - 1$, тогда операторы $P^+ \hat{\mathcal{Q}}_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) непрерывным образом отображают пространство $CL^0(H_1)$ в $CL^0(H_1^+)$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n((x')^{n-1})\}_{n=2}^\infty$, $\varphi_n \in C_\Phi(H_1)$ — сходящаяся последовательность в $CL^0(H_1)$. Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_N^j(x^N) &= P^+ \hat{\mathcal{Q}}_j \varphi_n = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} P^+ \int_{H^{n-1}} e^{i((x')^{n-1}, (\xi')^{n-1})} \times \\ &\times \mathcal{Q}_j(x^N, x_1, (\xi')^{n-1}, \lambda) \tilde{\varphi}_n((\xi')^{n-1}) d(\xi')^{n-1} \equiv \hat{G}_N^j \varphi_n. \end{aligned} \quad (18)$$

Символы операторов $\hat{\mathcal{Q}}_j$ имеют следующий вид:

$$\mathcal{Q}_j(x, x_1, \xi', \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(j)}(x', \xi', \lambda) x_1^k e^{-S x_1}, \quad (19)$$

где коэффициенты $c_k^{(j)}$ определяются из условия (10).

Несложно убедиться в том, что $c_k^{(j)}$, $k = 0, m-1$ имеют порядок по ξ' степени $m - n_j - 1$. Иными словами, справедлива оценка

$$|c_k^{(j)}(x', \xi', \lambda)| \leq K(\|\xi'\| + |\lambda|)^{m-n_j-1}, \quad (20)$$

K — константа.

Далее, поскольку $\operatorname{Re} S > 0$, то при $x_1 > 0$, в силу (20), имеем, что $\mathcal{Q}_j \in \Sigma_{A, (\xi', \lambda)}^{m-n_j-1+s}$ ($s > 0$ — любое, $s > 0$).

Рассмотрим ядра операторов $\hat{G}_N^j$:

$$\begin{aligned} G_N^j(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda) &= P^+ (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int_{H^{n-1}} e^{i((x')^{n-1}, (\xi')^{n-1})} \times \\ &\times \mathcal{Q}_j(x^N, x_1, (\xi')^{n-1}, \lambda) d(\xi')^{n-1}. \end{aligned}$$

В силу условия леммы они принадлежат пространству $L_1(H^{n-1})$. Иными словами

$$\|G_N^j\|_{L_1(H^{n-1})} \leq K < +\infty, \quad (21)$$

при $\forall N$, n и любом фиксированном $x^N \in H_+^N = \{x^N \in H^N, x_1 > 0\}$. Действительно, обозначив

$$\|\mathcal{Q}_j(x^N, x_1, \xi', \lambda)\|_0^{\text{def}} = \sup_{n=1} \|G_N^j\|_{L_1(H^{n-1})}, \quad (22)$$

имеем

$$\|G_N^j(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda)\|_{L_1(H^{n-1})} \leq \|\mathcal{Q}_j\|_0. \quad (23)$$

Представим $\Omega_j(x^N, \xi', \lambda)$ в следующем виде:

$$\Omega_j(x^N, x_1, \xi', \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} S^{-r}((x')^{N-1}, \xi', \lambda) c_k^{(j)}(x')^{N-1}, \xi', \lambda) S^r x_1^k e^{-Sx_1},$$

где $r_j = m - n_j - 1 + \varepsilon$, $r > \max_{1 \leq j \leq m} r_j$. Тогда

$$\begin{aligned} \|S^{-r} c_k^{(j)}\|_0' &= \|S^{-r}((x')^{N-1}, \xi', \lambda) A_0'^{r/2}(\xi', \lambda) A_0^{-r/2} c_k^{(j)}(x')^{N-1}, \xi', \lambda)\|_0' \leq \\ &\leq \|S^{-r} A_0'^{r/2}\|_0' \|A_0^{-r/2} c_k^{(j)}\|_0'. \end{aligned} \quad (24)$$

В силу оценки (20) символы $c_k^{(j)} \in \sum_{\lambda_0(\xi', \lambda)}^{r_j, s}$, $k = \overline{0, m-1}$, откуда следует, что существует постоянная $M_j^{(1)}$ такая, что

$$\|A_0^{-r/2}(\xi', \lambda) c_k^{(j)}((x')^{N-1}, \xi', \lambda)\| \leq M_j^{(1)}, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (25)$$

Используя теперь лемму 3.3 работы [4], при $r > r_j$ имеем

$$\|S^{-r}((x')^{N-1}, \xi', \lambda) A_0'^{r/2}(\xi', \lambda)\|_0' \leq M_j^{(2)}. \quad (26)$$

Таким образом, из оценок (24)–(26) получаем

$$\|S^{-r} c_k^{(j)}\|_0' \leq M_j^{(1)} \cdot M_j^{(2)}, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (27)$$

Обратимся к оценке символов $x_1^k S^r e^{-Sx_1}$. Как показано в работе [4] имеет место оценка

$$\|S^r e^{-Sx_1}\|_0' \leq \int_{\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2}}^{\infty} e^{-a \sqrt{t} x_1} t^{-1+\frac{r}{2}} dt \leq M < +\infty,$$

где $a > 0$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Из этой оценки получаем

$$\begin{aligned} \|S^r x_1^k e^{-Sx_1}\|_0' &\leq \int_{\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2}}^{\infty} e^{-a \sqrt{t} x_1} x_1^k t^{-1+\frac{r}{2}} dt \leq M_1 < +\infty, \\ k &= \overline{0, m-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из неравенств (27), (28) вытекает, что

$$\|\Omega_j(x^N, x_1, \xi', \lambda)\|_0' \leq K,$$

откуда с учетом (22) получаем оценку (21).

Для доказательства сходимости последовательности ψ_N^j , кроме (21) нам надо установить также следующее:

$$a) \quad \sup_{k \geq 2} \int_{H^{n-1}} |z_k^2 G_N^j(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda)| d(z')^{n-1} \leq K < +\infty \quad (29)$$

$\forall N$, n и при любом фиксированном $x^N \in H_1^N$,

$$b) \quad \sup_{\substack{H_1^+ \\ |z_1| < R}} \|G_N^j(x^N, x_1, (z')^{n-1}, \lambda) - G_{N+k}^j(x^{N+k}, x_1, (z')^{n-1}, \lambda)\|_{L_1(H^{n-1})} \rightarrow 0 \quad (30)$$

при $N \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$,

Сходимость интегралов (29) вытекает из того, что производные символов $\mathcal{Q}_j$ второго порядка по переменным ξ_i ($i = 2, 3, \dots$): $\frac{\partial^2 \mathcal{Q}_j}{\partial \xi_i^2} \in \epsilon' \Sigma_{A_0}^{0,0}(\xi', \lambda)$.

Действительно, из представления (19) выводим, что если дифференцирование падает на символы $c_k^{(j)}(x^N, \xi', \lambda)$, то ввиду того, что их порядок не превосходит $m - n_j - 1 < 0$,

$$\frac{\partial^a c_k^{(j)}}{\partial x_l^a} \in \Sigma_{A_0}^{0,0}(\xi', \lambda), \quad a = 1, 2, \dots, i = 2, 3, \dots,$$

а при дифференцировании экспоненты появляются члены вида $S^a e^{-Sx_1}$, которые оцениваются аналогично (28).

Таким образом, оценка (29) доказывается, с учетом сделанного замечания, точно так же, как и (21). Выполнение условия в) для ядер G'_N является непосредственным следствием принадлежности символов $\mathcal{Q}_j$ классу $\Sigma_{A_0}^{r,s}(\xi', \lambda)$ (см. условие 4 определения класса $\Sigma_{A_0}^{r,s}(\xi', \lambda)$).

Из (21) и (29) (см. [5]) следует существование $\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N^l(x^N)$ в смысле сходимости в $CL^0(H_1^+)$. Обозначим этот предел $\psi_n^l(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N(x^N)$ (предел зависит от n). Для завершения доказательства леммы нам остается совершить предельный переход по n в $CL^0(H_1^+)$, а это обеспечивается тем, что символы $\mathcal{Q}_j(x, x_1, \xi', \lambda) \in \Sigma_{A_0}^{r,s}(\xi', \lambda)$.

Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 вытекает, что операторы $P^+ \widehat{P}_0^{-1} \circ l$ и $P^+ \widehat{\mathcal{Q}}_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) порождаются счетно-аддитивными мерами, определенными на H_1^+ и H_1 соответственно. Иными словами справедливы следующие предложения.

Предложение 2. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ существует счетно-аддитивная мера $\mu(x, dz, \lambda)$, заданная на H_1 такая, что имеет место представление

$$P^+ \widehat{P}_0^{-1} \circ l f(x) = P^+ \int_{H_1} l f(x - z) \mu(x, dz, \lambda)$$

для любого $f \in CL^0(H_1^+)$.

Это утверждение является следствием теоремы 3.3 работы [5], надо лишь заметить, что символ $P_0^{-1}(x, \xi, \lambda) \in \Sigma_{A_0}^{-2m+s, s}(\xi, \lambda) \subset \Sigma_{A_0}^{0,0}(\xi, \lambda)$.

Предложение 3. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ и $j = 1, 2, \dots, m$ существуют счетно-аддитивные меры $\mu_j(x, x_1, dz', \lambda)$, заданные на H_1 такие, что имеют место представления

$$P^+ \widehat{\mathcal{Q}}_j g(x') = P^+ \int_{H_1} g(x' - z') \mu_j(x, x_1, dz', \lambda). \quad (31)$$

Справедливость утверждения леммы вытекает из оценок (21), (29) и условия (30), обеспечивающих, в силу упомянутой выше теоремы, существование мер μ_j и представление (31).

4°. В этом пункте будет доказано, что оператор $\hat{R}$, задаваемый формулой (15), является двусторонним регуляризатором задачи (13), (14), а именно справедлива

Теорема 1. Пусть операторы $\hat{P}$ и $\hat{N}_j$ ($j=1, 2, \dots, m$) с символами (1) и (3), соответственно, удовлетворяют условиям (2) и (7). Тогда при достаточно больших $|\operatorname{Re} \lambda|$ оператор $\hat{R}$, задаваемый формулой (15), является двусторонним регуляризатором задачи (13), (14), т. е. имеют место представления

$$\mathfrak{M} \circ \hat{R} = E + \hat{T}_1, \quad \text{где} \quad \|\hat{T}_1\|_{C(H_1^+)} < 1, \quad (32)$$

$$\hat{R} \circ \mathfrak{M} = E + \hat{T}_2, \quad \text{где} \quad \|\hat{T}_2\|_{C(H_1^+)} < 1, \quad (33)$$

операторы $\hat{T}_1, \hat{T}_2$ отображают $\mathcal{Q}_{\mathfrak{M}}$ в себя.

Доказательство этого утверждения опирается на следующие теоремы работы [4].

Теорема А. ([4], теорема 1.2). Пусть симбол $P(x, \xi') \in \Sigma_{A_0}^{p, s}(\xi', \lambda)$, тогда символы

$$Q(x, \xi, \lambda) = \frac{P(x, \xi')}{(\xi_1 + iS(x, \xi', \lambda))^s S'(x, \xi', \lambda)} \quad (34)$$

принадлежат классу $\Sigma_{A_0}^{q, s}$, где $q = p - k - l - \varepsilon$, $k \in Z$, $\varepsilon > 0$ — произвольное число. При этом справедлива оценка

$$\|A_0(\xi', \lambda)^{-q/2} Q(x, \xi, \lambda)\|_0 \leq M |\operatorname{Re} \lambda|^{-\varepsilon/2}, \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon, \quad \operatorname{Re} \lambda > a > 0. \quad (35)$$

Теорема В. ([4], теорема 2.3). Пусть символы $Q_i(x, \xi, \lambda)$, $i=1, 2$, принадлежат классам $\Sigma_{A_0}^{p_i, s}$, где s достаточно велико. Тогда

оператор $\hat{Q} = \hat{Q}_1 \circ \hat{Q}_2$ порождается символом $Q(x, \xi, \lambda)$, принадлежащим $\Sigma_{A_0}^{p, s}$, где $p = p_1 + p_2$, при этом имеет место разложение

$$Q(x, \xi, \lambda) \subset \sum_{|\alpha| < r} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} Q_1(x, \xi, \lambda) D_x^{\alpha} Q_2(x, \xi, \lambda) + Q_3(x, \xi, \lambda) \quad (36)$$

и $Q_3 \in \Sigma_{A_0}^{p_3, s}$ для любого $p_3 > p_1 + p_2 - r$.

Замечание. Теорема остается справедливой и в том случае, когда $Q_1 = S^{p_1}$, $Q_2 \in \Sigma_{A_0}^{p_2, s}(\xi', \lambda)$, а также при $Q_1 \in \Sigma_{A_0}^{p_1, s}$, $Q_2 = (\xi_1^2 + S^2)^{p_2}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть вначале $f \in CL^{2m}(H_1^+)$.

Тогда в силу леммы 1 $P^+ \hat{P}_0^{-1} f \in CL^{2m}(H_1^+)$. Применим к оператору $P^+ \hat{P}_0^{-1}$ слева дифференциальный оператор $\hat{P}_0$. Воспользовавшись формулой композиции псевдодифференциальных операторов с символами, принадлежащими классам $\Sigma_{A_0}^{p, s}$ (теорема В), получим

$$\hat{P}_0 \circ P^+ \hat{P}_0^{-1} = P^+ \left(E + \sum_{l=1}^{2m} \hat{C}_{-l} \right), \quad (37)$$

где символы C_{-l} операторов $\hat{C}_{-l}$ имеют вид

$$C_{-l}(x, \xi, \lambda) = \sum_{|z|=l} \frac{1}{a!} \partial_{\xi}^z P_0(x, \xi, \lambda) D_x^z P_0^{-1}(x, \xi, \lambda) \quad (38)$$

(сумма в (37) конечна, поскольку оператор $\hat{P}_0$ — дифференциальный). Символы C_{-l} имеют порядок по ξ , равный $-l$.

Легко видеть, что символы $\partial_{\xi}^z P_0(x, \xi, \lambda)$ и $D_x^z P_0^{-1}(x, \xi, \lambda)$, входящие в представление (38), принадлежат, соответственно, классам $\sum_{A_i}^{2m-l+1, s}$ и $\sum_{A_i}^{-2m+1, s}$, откуда выводим, что символ $C_{-l} \in \sum_{A_i}^{-l+1, s}$ ($i = \overline{1, 2m}$). Заметим далее, что символы C_{-l} представимы в виде суммы произведений символов вида (34), откуда в силу теоремы А получим оценку

$$\|C_{-l}(x, \xi, \lambda)\|_0 \leq M |\operatorname{Re} \lambda|^{-\frac{l}{2}+s}, \quad i = \overline{1, 2m}, \quad (39)$$

где $M > 0$ — некоторая константа, не зависящая от λ .

Рассмотрим теперь оператор $\hat{P}_1 \circ P^+ \hat{P}_0^{-1}$. Символ оператора $\hat{P}_1$ задается формулой (6), в силу чего имеем

$$\hat{P}_1 \circ P^+ \hat{P}_0^{-1} = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{P}_j \circ P^+ \hat{P}_0^{-1},$$

где $\hat{P}_j$ — операторы, порожденные символами $a_j(x) A^j(x, \xi, \lambda)$. В соответствии с формулой композиции (36) будем иметь

$$\hat{P}_j \circ P^+ \hat{P}_0^{-1} = a_j(x) \hat{A}^j \circ P^+ \hat{P}_0^{-1} = a_j(x) \circ \sum_{l=1}^{2j} P^+ \hat{C}_l^{(j)},$$

где символы операторов $C_l^{(j)}$ определяются следующим образом:

$$C_l^{(j)}(x, \xi, \lambda) = \sum_{|z|=l} \frac{1}{a!} \partial_{\xi}^z A^j(x, \xi, \lambda) D_x^z P_0^{-1}(x, \xi, \lambda) \quad (39')$$

и имеют порядок по ξ , равный $2(j-m) - l$. Так как и выше имеем, что символы $C_l^{(j)} \in \sum_{A_i}^{2(j-m)-l+1, s}$ ($i = \overline{1, 2j}, j = \overline{0, m-1}$) и вновь применяя теорему А получим

$$\|C_l^{(j)}(x, \xi, \lambda)\|_0 \leq M_1 |\operatorname{Re} \lambda|^{j-m-\frac{l}{2}+s}. \quad (40)$$

Обратимся к рассмотрению композиции операторов $\hat{P}_0 \circ P^+ \hat{Q}_j$, $j = \overline{1, m}$. Предположим, как и выше, что вначале $g_j \in CL^k(H_1^+)$. Тогда, повторяя по существу рассуждения леммы 2, можно убедиться в том, что $P^+ \hat{Q}_j g_j \notin CL^k(H_1^+)$. Действительно, для этого необходимо продифференцировать нужное число раз функции $\psi_N^j(x^N)$, задаваемые выраже-

нием (18) и для соответствующих ядер проверить выполнение условий, аналогичных (21) и (29).

Как было показано выше символы $\mathcal{Q}_j(x, x_1, \xi', \lambda) \in \sum_{\lambda_2}^{m-n_j-1+\varepsilon, s}(\xi', \lambda)$ при $x_1 > 0$, а символ $P_0 = (\xi^2 + S^2)^m$.

Рассмотрим композицию операторов $\left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + S^2\right)^m \circ P^+ \mathcal{Q}_j, j = \overline{1, m}$, где $\left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + S^2\right)^m = F_{\xi_1 \rightarrow x_1}^{-1} P_0(x, \xi, \lambda)$, а символ оператора $\widehat{\mathcal{Q}}_j$ имеет вид (19):

$$\mathcal{Q}_j(x, x_1, \xi', \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(j)}(x', \xi', \lambda) x_1^k e^{-S(x, \xi', \lambda) x_1}.$$

Эта композиция представляет собой конечную сумму операторов вида $\widehat{S}^{2l} \circ P^+ \widehat{\mathcal{Q}}_j (l \leq m)$, где

$$\mathcal{Q}'_j(x, x_1, \xi', \lambda) = t'_j(x', \xi', \lambda) \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^q x_1^p S^r e^{-Sx_1}.$$

При дифференцировании по переменной x_1 возникают также слагаемые, содержащие сомножители вида $(i\xi_1)^l$. Заметим, что $(i\xi_1)^l F_\varphi = -\hbar \left(\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^l}\right)$ и поэтому достаточно рассмотреть операторы с символами вида $\mathcal{Q}'_j$.

Пусть $t_j(x, \xi', \lambda) = t'_j(x', \xi', \lambda) \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^q$, тогда

$$\mathcal{Q}'_j(x, x_1, \xi', \lambda) = t_j(x, \xi', \lambda) x_1^p S^r e^{-Sx_1}. \quad (41)$$

Легко видеть, что $t_j \in \sum_{\lambda_2}^{r_j} (r_j = m + q - n_j - 1 + \varepsilon)$. В силу формулы композиции (36) имеем

$$S^{2l} \circ P^+ \widehat{\mathcal{Q}}_j = \sum_{i=1}^{2l} \widehat{d}_{i,j},$$

где символы операторов $\widehat{d}_{i,j}$ имеют вид

$$d_{i,j}(x, x_1, \xi', \lambda) = \sum_{|a|=i} \frac{1}{a!} \partial_{\xi_1}^{2l} S^{2l}(x, \xi', \lambda) D_x^a \mathcal{Q}'_j(x, x_1, \xi', \lambda). \quad (42)$$

Оценим вначале символы $\mathcal{Q}'_j$. С этой целью возьмем произвольное $r_0 > r_j$. Имеем, как и выше, $\|S^{-r_0} t_j\|_0' \leq M_1$,

$$\|\mathcal{Q}'_j\|_0' \leq M_2 x_1^p \|e^{-Sx_1} S^{r_0+r} \|_0' \|S^{-r_0} t_j\|_0' \leq M_3 x_1^p \|S^{r_0+r} e^{-Sx_1}\|_0'. \quad (43)$$

Воспользовавшись теперь оценкой (1.14) работы [4], получим

$$\|S^{r_0+r} e^{-Sx_1}\|_0' \leq M_4 \int_{\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2}}^{\infty} e^{-a \sqrt{t} x_1} t^{-1} |t|^{(r+r_0)/2} dt \quad (a > 0).$$

Принтегрируем теперь неравенство (43) по x_1 . Из последней оценки, а также того, что $\mathcal{Q}'_j \equiv 0$, при $x_1 < 0$, получим

$$\begin{aligned}
\|\Omega_j'(x, x_1, \xi', \lambda)\|_0 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \|\Omega_j'(x, x_1, \xi', \lambda)\|_0 dx_1 \leq \\
&\leq M_5 \int_0^{\infty} x_1^p \left\{ \int_{\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2}}^{\infty} e^{-a \sqrt{t} x_1} t^{-1} |t|^{r+r_0/2} dt \right\} dx_1 = \\
&= M_5 \int_{\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2}}^{\infty} |t|^{\frac{r+r_0}{2}-1} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a \sqrt{t} x_1} x_1^p dx_1 \right\} dt \leq \\
&\leq M_6 \int_{\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2}}^{\infty} t^{\frac{r+r_0}{2}-1-p_1} dt \leq M_7 |\operatorname{Re} \lambda|^{-\varepsilon},
\end{aligned} \tag{44}$$

где p_1 выбрано настолько большим, чтобы $p_1 > \frac{r+r_0}{2}$, а $\varepsilon = p_1 - \frac{r+r_0}{2}$.

Заметим, далее, что при дифференцировании символов $S^{2l}(x, \xi', \lambda)$ по ξ' и $\Omega_j'(x, x_1, \xi', \lambda)$, $t_j(x, \xi', \lambda)$ по x' возникает сумма символов, аналогичных (41), с той лишь разницей, что в их выражения входят производные вида $\partial_{x_i}^2 S$, $D_{x_i}^3 S$ и $D_{x_i}^1 t_j$. Легко видеть, что их оценку можно провести по существу повторяя рассуждения, проведенные при выводе неравенства (44) для Ω_j' . Таким образом, имеем

$$\|d_{l,j}(x, x_1, \xi', \lambda)\|_0 \leq M_8 |\operatorname{Re} \lambda|^{-\varepsilon}. \tag{45}$$

Отсюда выводим, что операторы $\widehat{S}^{2l} \circ P^+ \widehat{\Omega}_j'$ представляют собой сумму операторов, для символов которых справедлива оценка (45).

Совершенно аналогично доказываются такие же оценки для композиции операторов $\widehat{P}_k \circ P^+ \widehat{\Omega}_j(k, j = \overline{1, m})$, где $F_{\xi_1 \rightarrow x_1}^{-1} P_k(x, \xi, \lambda) = a_k(x) \left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + S^2 \right)^k$.

Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть композиции операторов $\widehat{N}_k \circ P^+ \widehat{P}_0^{-1}|_{x_1=0}$ и $\widehat{N}_k \circ P^+ \widehat{\Omega}_j|_{x_1=0}$.

Символ N_k имеет вид (3):

$$N_k(x', \xi, \lambda) = N_k(B(x', \xi, \lambda)) = \left(\xi_1 + \sum_{k=2}^n b_k(x') \xi_k + \lambda \right)^{n_k}.$$

Отсюда выводим, что он принадлежит классу $\sum_{\lambda_0}^{n_k + \varepsilon, s}$, где по условию $n_k < 2m$ ($k = \overline{1, m}$). Применяя формулу композиции к операторам $\widehat{N}_k \circ P^+ \widehat{P}_0^{-1}$, получаем

$$\widehat{N}_k \circ P^+ \widehat{P}_0^{-1} = \sum_{l=1}^{n_k} P^+ \widehat{\gamma}_1^{(k)},$$

где символы

$$\gamma_i^{(k)}(x, \xi, \lambda) = \sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha N_k(x', \xi, \lambda) D_x^\alpha P_0^{-1}(x, \xi, \lambda). \quad (46)$$

Повторяя рассуждения, приведенные при выводе оценки (40), получим

$$\|\gamma_i^{(k)}(x, \xi, \lambda)\|_0 \leq M |\operatorname{Re} \lambda|^{\frac{n_k - i}{2} - m + 1} \quad (i \geq 1). \quad (47)$$

Оценки для операторов $\tilde{N}_k \circ P^+ \tilde{Q}_j$ проводятся аналогично оценке оператора $\tilde{P}_0 \circ P^+ \tilde{Q}_j$. Действительно

$$F_{\xi_1 \rightarrow x_1} N_k(x', \xi, \lambda) = \left(-i \frac{d}{dx_1} + b_0(x', \xi', \lambda) \right)^{n_k},$$

$$\text{где } b_0(x', \xi', \lambda) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k(x') \xi_k + \lambda.$$

Отсюда вытекает как и выше, что задача сводится к оценке оператора вида $\tilde{b}_0^i \circ P^+ \tilde{Q}_j'$, где $\tilde{Q}_j'$ задается формулой (41). Разлагая символ оператора $\tilde{b}_0^i \circ P^+ \tilde{Q}_j'$ по формуле композиции и проводя аналогичные рассуждения, придем к неравенству (45) для слагаемых разложения символа.

Поскольку константы, входящие в оценки вида (47) не зависят от x_1 , они остаются справедливыми и при предельном переходе на „гиперплоскость“ $x_1 = 0$.

Резюмируя полученные результаты, имеем, что

$$\tilde{P} \circ P^+ \tilde{R} = E + \tilde{T}_1, \quad (48)$$

где символ оператора $\tilde{T}_1$ складывается из символов вида (38), (39'), (41), для которых справедливы оценки (39), (40), (45), в силу которых при достаточно больших $|\operatorname{Re} \lambda|$ имеем $\|\tilde{T}_1\|_{C(H_1^+)} < 1$.

Аналогично, при любом $k=1, 2, \dots, m$

$$\tilde{N}_k \circ P^+ \tilde{R}|_{x_1=0} = E + \tilde{T}_1, \quad (49)$$

и символ оператора $\tilde{T}_1$ представляет собой сумму операторов с символами вида (46), для которых справедливы неравенства типа (47), откуда вытекает, что для оператора $\tilde{T}_1$ справедлива оценка $\|\tilde{T}_1\|_{C(H_1^+)} < 1$ при достаточно больших $|\operatorname{Re} \lambda|$.

Из (48) и (49) следует представление (32) и оценка для оператора $\tilde{T}_1$.

Таким образом, установили, что оператор $\tilde{R}$ является правым регуляризатором для оператора $\tilde{\mathcal{R}}$.

Совершенно аналогично можно доказать, что $\bar{R}$ является левым регуляризатором для оператора $\mathfrak{M}$.

Освободимся теперь от условий гладкости на функции $f(x)$ и $g_j(x')$, наложенных в начале доказательства теоремы.

Пусть f и g_j — произвольные функции, принадлежащие, соответственно, пространствам $CL^0(H_1^+)$ и $CL^0(H_1')$. Выберем последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{g_n^{(j)}\}_{n=1}^\infty$, сходящиеся, соответственно, к f в $CL^0(H_1^+)$ и g_j — в $CL^0(H_1')$, $j = 1, m$. Для каждого n имеем

$$\|\hat{T}_1[f, g_1, \dots, g_m]\|_{C(H_1^+)} \leq M |\operatorname{Re} \lambda|^{-\sigma} \left\{ \|f_n\|_{C(H_1^+)} + \sum_{j=1}^m \|g_n^{(j)}\|_{C(H_1')} \right\} (\sigma > 0).$$

Совершая теперь предельный переход в этих неравенствах, приходим к оценке для произвольных f и g_j .

Теорема доказана.

Следствие. При достаточно больших $|\operatorname{Re} \lambda|$ оператор $\mathfrak{M}$ гомеоморфно отображает пространство $\mathfrak{U}_{\mathfrak{M}}$ на пространство $CL(H_1^+) \times \prod_{j=1}^m CL^0(H_1')$.

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 30.VII.1982:

Ռ. Լ. ՇԱԽԲԱԴՅԱՆ. Ընդհանուր եզրային խնդիր անվերջ թվով անկախ փոփոխականներով բարձր կարգի էլիպտական երկայնական երկայնական երկայնական համար (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում ընդհանրացվում են հեղինակի [1], [2] աշխատանքների արդյունքները անվերջ թվով անկախ փոփոխականներով պարամետրից կախված բարձր կարգի էլիպտական հավասարումների և ընդհանուր եզրային խնդիրների դեպքի համար:

Ենթադրելով, որ սահմանային օպերատորները բավարարում են որոշակի հանրահաշվական պայմանի կառուցվում է դիտարկվող խնդրի պարամետրիքային և ապացուցվում է նրա լուծման գոյության և միակության թեորեմ համապատասխան ֆունկցիոնալ տարածություններում:

R. L. SHAKHBAGIAN. General boundary problem for high order equations of elliptic type with infinite number of independent variables (summary)

In this paper the results of the author's papers [1], [2] are generalized to the case of high order elliptic equations with parameter, infinite number of independent variables and general boundary conditions.

Under assumption that boundary operators satisfy some algebraic condition, the parametrix of the problem is constructed and existence and uniqueness of the solution in appropriate functional spaces is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Шахбалян. Эллиптическая задача с параметром для уравнений второго порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 252—261.
2. Р. Л. Шахбалян. Задача Дирихле в полупространстве для эллиптических операторов высокого порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVI, № 2, 1981, 150—166.

3. М. С. Агранович, М. И. Вишик. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, XIX; вып. 3 (117), 1964, 53—161.
4. М. И. Вишик, А. В. Марченко. Краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений второго порядка на бесконечномерных многообразиях с краем, Матем. сб., 90, № 3, 1973, 331—371.
5. П. М. Блехер, М. И. Вишик. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и их приложениях, Матем. сб., 86, № 3, 1971, 446—494.